

Stima di variazioni di funzioni di matrice con polinomi di Faber

Calcolo di misure di centralità per variazioni di rango basso

Nikita Deniskin

Relatore: prof. Michele Benzi

Scuola Normale Superiore

11 maggio 2020

Un **grafo** \mathcal{G} è definito da un insieme di vertici V e da un insieme di archi $E \subseteq V \times V$.

Ci occupiamo di grafi finiti, $V = \{1, 2, \dots, n\}$

Un **grafo** \mathcal{G} è definito da un insieme di vertici V e da un insieme di archi $E \subseteq V \times V$.

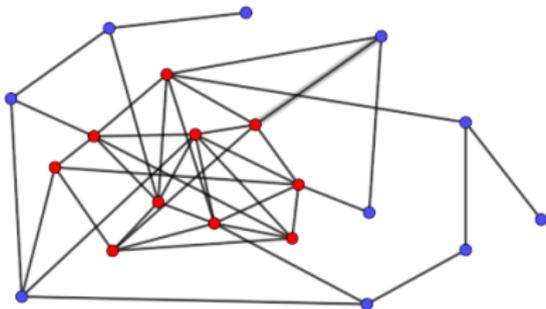
Ci occupiamo di grafi finiti, $V = \{1, 2, \dots, n\}$

Misura di centralità: è una funzione $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, tale che più un vertice i è "importante" e "ben collegato", maggiore è $f(i)$.

Un **grafo** \mathcal{G} è definito da un insieme di vertici V e da un insieme di archi $E \subseteq V \times V$.

Ci occupiamo di grafi finiti, $V = \{1, 2, \dots, n\}$

Misura di centralità: è una funzione $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, tale che più un vertice i è "importante" e "ben collegato", maggiore è $f(i)$.



- **vertici rossi** → centrali e importanti
- **vertici blu** → periferici e poco importanti

Un **grafo** \mathcal{G} è definito da un insieme di vertici V e da un insieme di archi $E \subseteq V \times V$.

Ci occupiamo di grafi finiti, $V = \{1, 2, \dots, n\}$

Misura di centralità: è una funzione $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, tale che più un vertice i è "importante" e "ben collegato", maggiore è $f(i)$.

Obiettivo

Dato un grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ ottenuto modificando alcuni archi di \mathcal{G} , come posso stimare la nuova misura di centralità $f(\tilde{\mathcal{G}}, i)$ conoscendo quella vecchia $f(\mathcal{G}, i)$?

Un **grafo** \mathcal{G} è definito da un insieme di vertici V e da un insieme di archi $E \subseteq V \times V$.

Ci occupiamo di grafi finiti, $V = \{1, 2, \dots, n\}$

Misura di centralità: è una funzione $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, tale che più un vertice i è "importante" e "ben collegato", maggiore è $f(i)$.

Obiettivo

Dato un grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ ottenuto modificando alcuni archi di \mathcal{G} , come posso stimare la nuova misura di centralità $f(\tilde{\mathcal{G}}, i)$ conoscendo quella vecchia $f(\mathcal{G}, i)$?

Studieremo misure di centralità ottenute da funzioni di matrici, e troveremo un modo per stimare la variazione utilizzando i polinomi di Faber.

Bibliografia

- 1 S. POZZA, F. TUDISCO, *On the stability of network indices defined by means of matrix functions* SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 39, No. 4 (2018), pp. 1521-1546
- 2 B. BECKERMANN, *Image numérique, GMRES et polynômes de Faber*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005), pp. 855-860.
- 3 P.K. SUETIN, *Series of Faber Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers (1998).
- 4 J.H. CURTISS, *Polynomials and the Faber Series*, The American Mathematical Monthly, Vol. 78, No. 6 (1971), pp. 577-596

Grafì \iff Matrici

A ogni grafo possiamo associare una *matrice di adiacenza* A , mettendo $A_{ij} = 1$ se c'è un arco $i \rightarrow j$, e 0 altrimenti.

Grafì \iff Matrici

A ogni grafo possiamo associare una *matrice di adiacenza* A , mettendo $A_{ij} = 1$ se c'è un arco $i \rightarrow j$, e 0 altrimenti.

Se il grafo è non orientato (se c'è un arco $i \rightarrow j$, c'è anche $j \rightarrow i$) allora A è simmetrica.

Se il grafo è orientato, A in generale non è simmetrica.

Grafì \iff Matrici

A ogni grafo possiamo associare una *matrice di adiacenza* A , mettendo $A_{ij} = 1$ se c'è un arco $i \rightarrow j$, e 0 altrimenti.

Se il grafo è non orientato (se c'è un arco $i \rightarrow j$, c'è anche $j \rightarrow i$) allora A è simmetrica.

Se il grafo è orientato, A in generale non è simmetrica.

Grafì pesati Possiamo generalizzare la definizione e assegnare a ciascun arco di un grafo un numero (di solito reale positivo).

In tal caso nella matrice di adiacenza il valore di A_{ij} è il peso dell'arco $i \rightarrow j$, e 0 se non c'è nessun arco $i \rightarrow j$.

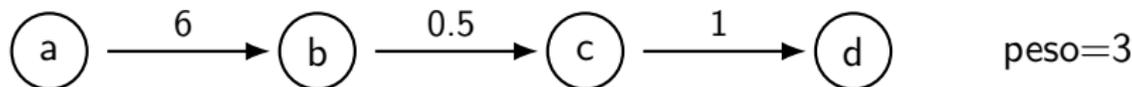
Per A matrice di adiacenza di \mathcal{G} grafo non pesato (diretto o non diretto), si ha:

$$[A^k]_{ij} = \text{numero di cammini da } i \text{ a } j \text{ di lunghezza } k$$

Per A matrice di adiacenza di \mathcal{G} grafo non pesato (diretto o non diretto), si ha:

$$[A^k]_{ij} = \text{numero di cammini da } i \text{ a } j \text{ di lunghezza } k$$

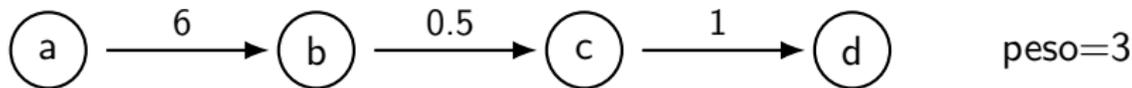
Se \mathcal{G} grafo è pesato (diretto o non diretto), il peso di un cammino è definito come il prodotto dei valori su ogni arco.



Per A matrice di adiacenza di \mathcal{G} grafo non pesato (diretto o non diretto), si ha:

$$[A^k]_{ij} = \text{numero di cammini da } i \text{ a } j \text{ di lunghezza } k$$

Se \mathcal{G} grafo è pesato (diretto o non diretto), il peso di un cammino è definito come il prodotto dei valori su ogni arco.



In questo caso si ha:

$$[A^k]_{ij} = \text{somma dei pesi dei cammini da } i \text{ a } j \text{ di lunghezza } k$$

Funzioni di Matrice

Definizione

Sia A matrice diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,
 $A = QDQ^{-1}$. Sia f una funzione definita sullo spettro di A a valori
in \mathbb{C} . Allora:

$$f(A) = Q f(D) Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Se A ha blocchi di Jordan di dimensione k_j relativi a λ_j , bisogna
richiedere anche che f sia derivabile $k_j - 1$ volte in λ_j .

Proposizione

Sia A matrice con raggio spettrale $\rho(A)$.

Se $f(x)$ è analitica in $x = 0$ con raggio di convergenza $R > \rho(A)$, con sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

Allora $f(A)$ si può calcolare come:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + \dots$$

Proposizione

Sia A matrice con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto contenente lo spettro di A e sia Γ una curva in Ω che racchiude tutti gli autovalori di A .

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

Alcuni esempi di misure di centralità:

Alcuni esempi di misure di centralità:

- **Eigenvector centrality** (simile al PageRank): A ha un autovettore v con tutte componenti positive, con autovalore $\rho(A)$ (per Perron-Frobenius). $centr(i) = v(i)$.

Alcuni esempi di misure di centralità:

- **Eigenvector centrality** (simile al PageRank): A ha un autovettore v con tutte componenti positive, con autovalore $\rho(A)$ (per Perron-Frobenius). $centr(i) = v(i)$.
- **Exponential subgraph centrality** $centr(i) = [e^{\beta A}]_{ii}$ con $\beta \in \mathbb{R}^+$ parametro.

Alcuni esempi di misure di centralità:

- **Eigenvector centrality** (simile al PageRank): A ha un autovettore v con tutte componenti positive, con autovalore $\rho(A)$ (per Perron-Frobenius). $centr(i) = v(i)$.
- **Exponential subgraph centrality** $centr(i) = [e^{\beta A}]_{ii}$ con $\beta \in \mathbb{R}^+$ parametro.
- **Resolvent subgraph centrality** $centr(i) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii}$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tale che $\rho(\alpha A) < 1$.

Alcuni esempi di misure di centralità:

- **Eigenvector centrality** (simile al PageRank): A ha un autovettore v con tutte componenti positive, con autovalore $\rho(A)$ (per Perron-Frobenius). $centr(i) = v(i)$.
- **Exponential subgraph centrality** $centr(i) = [e^{\beta A}]_{ii}$ con $\beta \in \mathbb{R}^+$ parametro.
- **Resolvent subgraph centrality** $centr(i) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii}$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tale che $\rho(\alpha A) < 1$.
- Ce ne sono molte altre, definite sia attraverso l'algebra lineare o funzioni di matrici, sia più direttamente dalla struttura del grafo.

Interpretazione di $[e^{\beta A}]_{ii}$ in termini di cammini sul grafo:

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2}\beta^2 A^2 + \frac{1}{3!}\beta^3 A^3 + \dots$$

Interpretazione di $[e^{\beta A}]_{ii}$ in termini di cammini sul grafo:

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2}\beta^2 A^2 + \frac{1}{3!}\beta^3 A^3 + \dots$$

$$[e^{\beta A}]_{ii} = 1 + \beta[A]_{ii} + \frac{1}{2}\beta^2[A^2]_{ii} + \frac{1}{3!}\beta^3[A^3]_{ii} + \dots$$

Si ottiene il numero di cammini chiusi che partono e tornano in i , pesati con un coefficiente $\frac{\beta^k}{k!}$.

Polinomi di Faber

Polinomi di Faber

Una funzione olomorfa in 0 si può sviluppare localmente in una serie di potenze:

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c^3z^3 + \dots$$

Polinomi di Faber

Una funzione olomorfa in 0 si può sviluppare localmente in una serie di potenze:

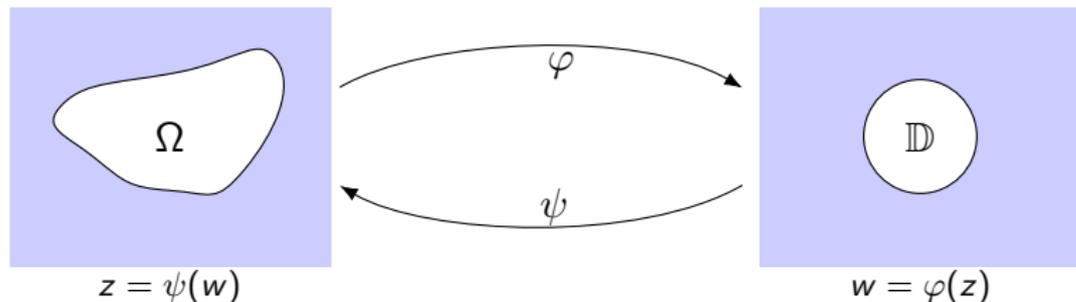
$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c^3z^3 + \dots$$

Dato un dominio Ω , una funzione f olomorfa su Ω si può sviluppare in serie di polinomi di Faber:

$$f(z) = f_0\Phi_0(z) + f_1\Phi_1(z) + f_2\Phi_2(z) + \dots$$

Identifichiamo \mathbb{C} in maniera naturale dentro la sfera di Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.
Sia Ω un aperto connesso limitato di \mathbb{C} e tale che l'aperto complementare $\overline{\Omega}^c$ sia un aperto semplicemente connesso di $\widehat{\mathbb{C}}$ contenente ∞ .

Per il teorema della mappa di Riemann, esiste (ed è unico) un biolomorfismo $\varphi : \overline{\Omega}^c \rightarrow \overline{\mathbb{D}}^c$ tale che $\varphi(\infty) = \infty$ e $\varphi'(\infty) = \alpha > 0$.

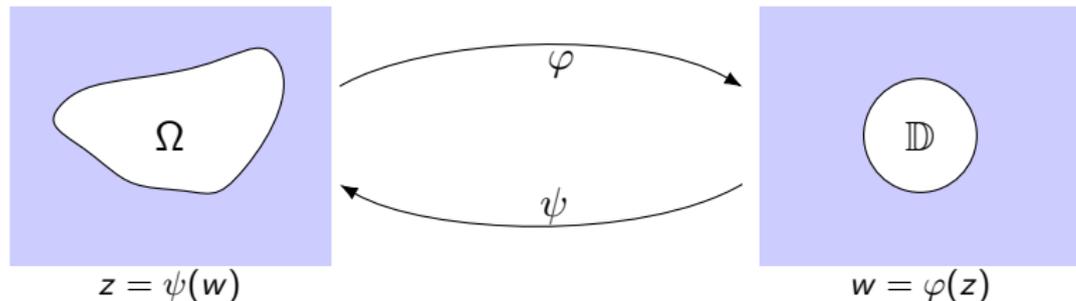


La condizione $\varphi'(\infty) = \alpha$ vuol dire che φ si può sviluppare in un intorno di ∞ come:

$$\varphi(z) = \alpha z + a_0 + a_{-1} \frac{1}{z} + a_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

Analogamente si può scrivere ψ l'inversa di φ :

$$\psi(w) = \frac{1}{\alpha} w + b_0 + b_{-1} \frac{1}{w} + b_{-2} \frac{1}{w^2} + \dots$$



$$\varphi(z) = \alpha z + a_0 + a_{-1} \frac{1}{z} + a_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$\varphi(z)^n = \alpha^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + a_{-1}^{(n)} \frac{1}{z} + a_{-2}^{(n)} \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$\varphi(z) = \alpha z + a_0 + a_{-1} \frac{1}{z} + a_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$\varphi(z)^n = \alpha^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + a_{-1}^{(n)} \frac{1}{z} + a_{-2}^{(n)} \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$\varphi(z) = \alpha z + a_0 + a_{-1} \frac{1}{z} + a_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$\varphi(z)^n = \underbrace{\alpha^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}}_{\Phi_n(z)} + \underbrace{a_{-1}^{(n)} \frac{1}{z} + a_{-2}^{(n)} \frac{1}{z^2} + \dots}_{R_n(z)}$$

$$\varphi(z)^n = \Phi_n(z) + R_n(z)$$

$$\varphi(z) = \alpha z + a_0 + a_{-1} \frac{1}{z} + a_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$\varphi(z)^n = \underbrace{\alpha^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}}_{\Phi_n(z)} + \underbrace{a_{-1}^{(n)} \frac{1}{z} + a_{-2}^{(n)} \frac{1}{z^2} + \dots}_{R_n(z)}$$

$$\varphi(z)^n = \Phi_n(z) + R_n(z)$$

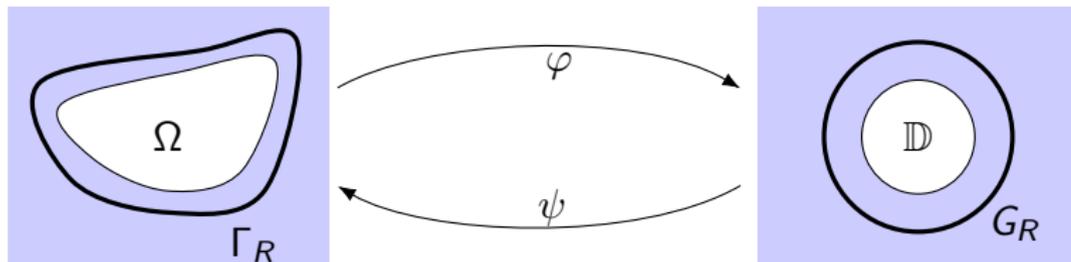
$\Phi_n(z)$ è l' n -esimo polinomio di Faber per il dominio Ω .

Si pone $\Phi_0(z) = 1$.

$\Phi_n(z)$ è un polinomio, quindi è ben definito su tutto \mathbb{C} .

Sia Γ il bordo di Ω e d'ora in poi assumiamo che sia analitico.

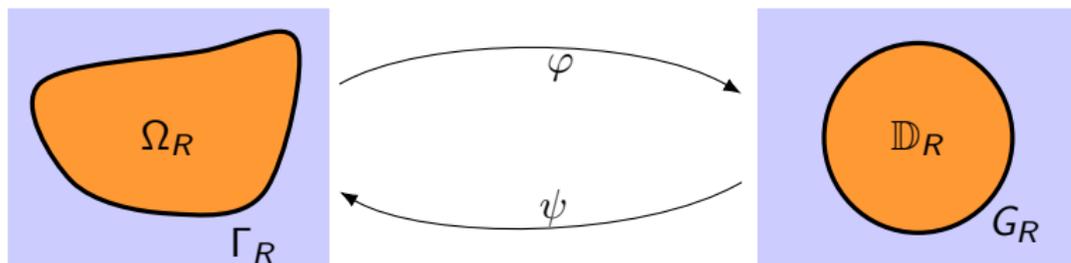
Sia $G_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ e $\Gamma_R = \psi(G_R)$.



Sia Γ il bordo di Ω e d'ora in poi assumiamo che sia analitico.

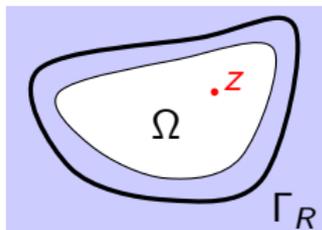
Sia $G_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ e $\Gamma_R = \psi(G_R)$.

Siano Ω_R e \mathbb{D}_R le regioni delimitate da Γ_R e G_R .



Sia $z \in \Omega_R$. $\varphi(z)^n = \Phi_n(z) + R_n(z)$

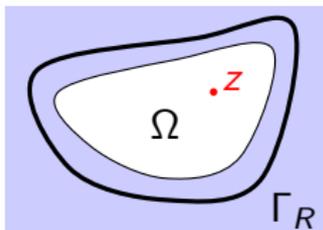
$$\int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds + \int_{\Gamma_R} \frac{R_n(s)}{s-z} ds$$



Sia $z \in \Omega_R$. $\varphi(z)^n = \Phi_n(z) + R_n(z)$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds + \int_{\Gamma_R} \frac{R_n(s)}{s-z} ds$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds = \Phi_n(z) \quad \text{per la formula integrale di Cauchy su } \Omega_R$$

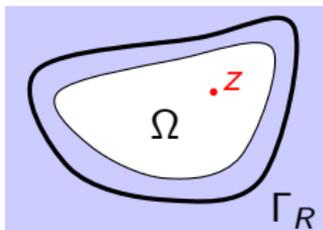


Sia $z \in \Omega_R$. $\varphi(z)^n = \Phi_n(z) + R_n(z)$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds + \int_{\Gamma_R} \frac{R_n(s)}{s-z} ds$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds = \Phi_n(z) \quad \text{per la formula integrale di Cauchy su } \Omega_R$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{R_n(s)}{s-z} ds = 0 \quad \text{per la formula integrale di Cauchy su } \Omega_R^c$$



Sia $z \in \Omega_R$. $\varphi(z)^n = \Phi_n(z) + R_n(z)$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds + \int_{\Gamma_R} \frac{R_n(s)}{s-z} ds$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds = \Phi_n(z) \quad \text{per la formula integrale di Cauchy su } \Omega_R$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{R_n(s)}{s-z} ds = 0 \quad \text{per la formula integrale di Cauchy su } \Omega_R^c$$

$$\Phi_n(z) = \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds$$

Sia $z \in \Omega_R$. $\varphi(z)^n = \Phi_n(z) + R_n(z)$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds + \int_{\Gamma_R} \frac{R_n(s)}{s-z} ds$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(s)}{s-z} ds = \Phi_n(z) \quad \text{per la formula integrale di Cauchy su } \Omega_R$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{R_n(s)}{s-z} ds = 0 \quad \text{per la formula integrale di Cauchy su } \Omega_R^c$$

$$\Phi_n(z) = \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \int_{G_R} \frac{t^n \psi'(t)}{\psi(t) - z} dt \quad \text{con } s = \psi(t)$$

Sia $F_z(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}$ definita su $\overline{\Omega}^c$.

Sia $F_z(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}$ definita su $\overline{\Omega}^c$.

Si ha che $F_z(\infty) = 0$, dunque la serie di Laurent in $t = \infty$ non ha termini in t^k con $k \geq 0$.

Sia $F_z(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}$ definita su $\overline{\Omega}^c$.

Si ha che $F_z(\infty) = 0$, dunque la serie di Laurent in $t = \infty$ non ha termini in t^k con $k \geq 0$.

Il coefficiente $\frac{1}{t^{n+1}}$ è dato da $\int_{\Gamma_R} t^n F_z(t) dt = \Phi_n(z)$.

Sia $F_z(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}$ definita su $\overline{\Omega}^c$.

Si ha che $F_z(\infty) = 0$, dunque la serie di Laurent in $t = \infty$ non ha termini in t^k con $k \geq 0$.

Il coefficiente $\frac{1}{t^{n+1}}$ è dato da $\int_{\Gamma_R} t^n F_z(t) dt = \Phi_n(z)$.

Dunque la serie di Laurent di $F_z(t)$ è:

Sia $F_z(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}$ definita su $\bar{\Omega}^c$.

Si ha che $F_z(\infty) = 0$, dunque la serie di Laurent in $t = \infty$ non ha termini in t^k con $k \geq 0$.

Il coefficiente $\frac{1}{t^{n+1}}$ è dato da $\int_{\Gamma_R} t^n F_z(t) dt = \Phi_n(z)$.

Dunque la serie di Laurent di $F_z(t)$ è:

$$F_z(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}$$

Sia $F_z(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}$ definita su $\bar{\Omega}^c$.

Si ha che $F_z(\infty) = 0$, dunque la serie di Laurent in $t = \infty$ non ha termini in t^k con $k \geq 0$.

Il coefficiente $\frac{1}{t^{n+1}}$ è dato da $\int_{\Gamma_R} t^n F_z(t) dt = \Phi_n(z)$.

Dunque la serie di Laurent di $F_z(t)$ è:

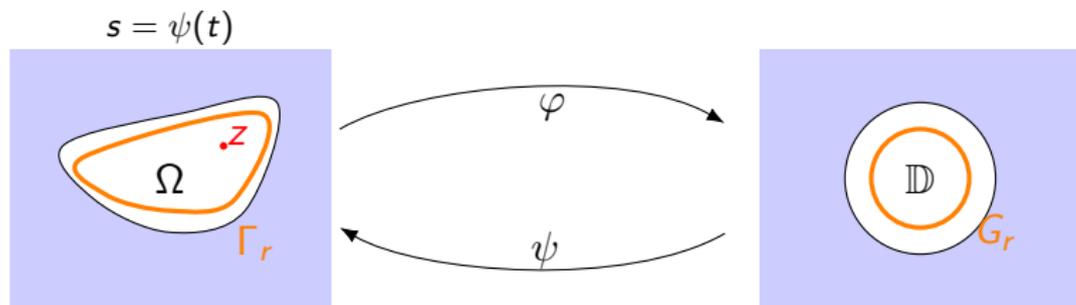
$$F_z(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}$$

Osservazione: $\int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)^{-k}}{s - z} ds = \int_{G_R} \frac{\psi'(t) t^{-k}}{\psi(t) - z} dt = 0$ per $k > 0$.

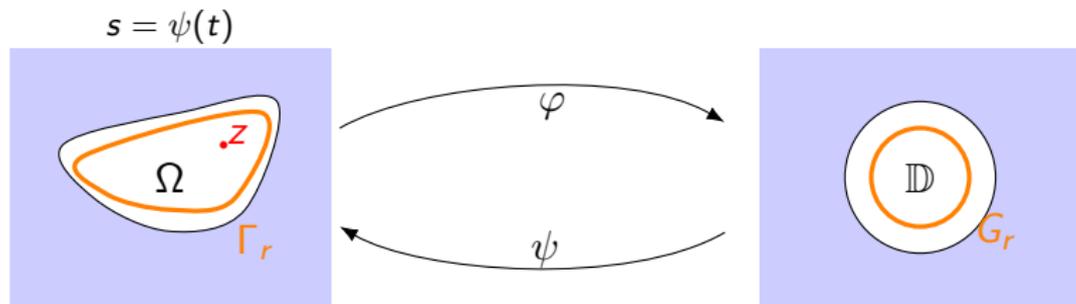
Con l'ipotesi di Γ analitico, ψ e φ possono essere estese ai bordi. Inoltre ψ può essere estesa a \mathbb{D}_r^c con $r < 1$; analogamente essendo φ l'inversa, si può estendere in un intorno di Γ .

Data f funzione olomorfa su Ω , si può calcolare $f(z)$ scegliendo $r < 1$ tale che $z \in \Omega_r$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} \frac{f(\psi(t)) \psi'(t)}{\psi(t)-z} dt$$



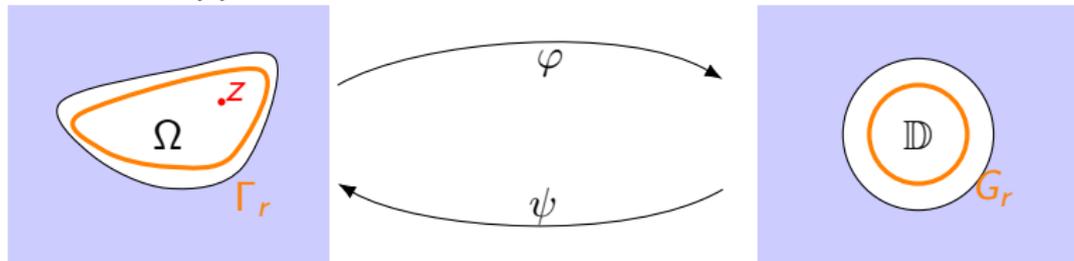
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} f(\psi(t)) \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} f(\psi(t)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}} \right) dt$$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} f(\psi(t)) \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} f(\psi(t)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}} \right) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt$$

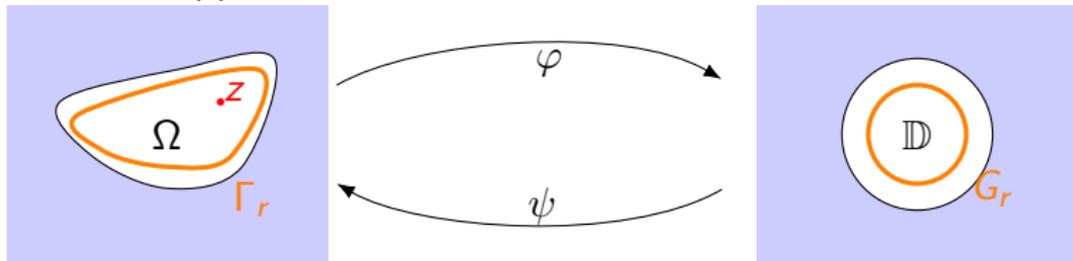
$$s = \psi(t)$$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} f(\psi(t)) \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} f(\psi(t)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}} \right) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt$$

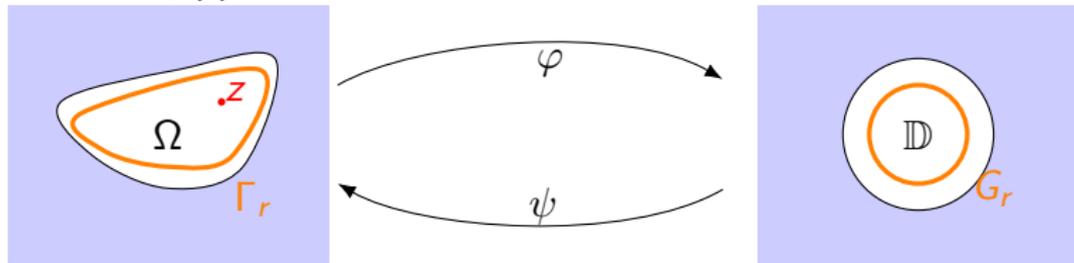
$$s = \psi(t)$$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} f(\psi(t)) \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} f(\psi(t)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}} \right) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{G_r} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) f_n$$

$$s = \psi(t)$$



Range Numerico

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, il **range numerico** di A è definito come:

$$W(A) = \{x^T A x \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}$$

- $W(A)$ è un sottoinsieme compatto e convesso di \mathbb{C}
- $W(A)$ contiene tutti gli autovalori di A
- Se A è normale, allora $W(A)$ è esattamente l'involuppo convesso degli autovalori

Beckermann, 2005

Sia A una matrice e Ω un aperto convesso di \mathbb{C} contenente $W(A)$ con bordo regolare. Chiamato $\Phi_n(z)$ l' n -esimo polinomio di Faber relativo a Ω . Allora:

$$\|\Phi_n(A)\|_2 \leq 2$$

Beckermann, 2005

Sia A una matrice e Ω un aperto convesso di \mathbb{C} contenente $W(A)$ con bordo regolare. Chiamato $\Phi_n(z)$ l' n -esimo polinomio di Faber relativo a Ω . Allora:

$$\|\Phi_n(A)\|_2 \leq 2$$

2 è la costante ottimale.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega = W(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$,

$F_1(z) = 2z$ e $\|F_1(A)\|_2 = 2\|A\|_2 = 2$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \Phi_n(z) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^{-n}}{s-z} ds = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \Phi_n(z) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^{-n}}{s-z} ds = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \Phi_n(z) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^{-n}}{s-z} ds = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (sl - A)^{-1} ds = \Phi_n(A) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^{-n} (sl - A)^{-1} ds = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (sl - A)^{-1} ds = \Phi_n(A) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^{-n} (sl - A)^{-1} ds = 0 \end{array} \right.$$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \Phi_n(z) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^{-n}}{s-z} ds = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (sl - A)^{-1} ds = \Phi_n(A) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^{-n} (sl - A)^{-1} ds = 0 \end{cases}$$

Siccome $s \in \Gamma$, $|\varphi(s)| = 1$ e $\varphi(s)^{-1} = \overline{\varphi(s)}$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{\varphi(s)}^n (sl - A)^{-1} ds$$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^n}{s-z} ds = \Phi_n(z) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)^{-n}}{s-z} ds = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (sl - A)^{-1} ds = \Phi_n(A) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^{-n} (sl - A)^{-1} ds = 0 \end{cases}$$

Siccome $s \in \Gamma$, $|\varphi(s)| = 1$ e $\varphi(s)^{-1} = \overline{\varphi(s)}$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{\varphi(s)}^n (sl - A)^{-1} ds \quad \text{Coniugo e traspongo tutto.}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (\overline{sl} - A^H)^{-1} d\overline{s}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (sI - A)^{-1} ds & = \Phi_n(A) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (\bar{s}I - A^H)^{-1} d\bar{s} & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (sI - A)^{-1} ds & = \Phi_n(A) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (\bar{s}I - A^H)^{-1} d\bar{s} & = 0 \end{cases}$$

Siccome Ω è convesso e ha bordo regolare, per ogni $s \in \Gamma$ è definita la normale $\nu(s)$, che soddisfa $i\nu(s) = \frac{ds}{|ds|}$.

Facciamo un cambio di variabile $ds = i\nu(s)|ds|$ e $d\bar{s} = -i\bar{\nu}(s)|ds|$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (sI - A)^{-1} ds & = \Phi_n(A) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (\bar{s}I - A^H)^{-1} d\bar{s} & = 0 \end{cases}$$

Siccome Ω è convesso e ha bordo regolare, per ogni $s \in \Gamma$ è definita la normale $\nu(s)$, che soddisfa $i\nu(s) = \frac{ds}{|ds|}$.

Facciamo un cambio di variabile $ds = i\nu(s)|ds|$ e $d\bar{s} = -i\bar{\nu}(s)|ds|$

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \nu(s) (sI - A)^{-1} |ds| & = \Phi_n(A) \\ \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \overline{\nu(s)} (\bar{s}I - A^H)^{-1} |ds| & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (sI - A)^{-1} ds & = \Phi_n(A) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n (\bar{s}I - A^H)^{-1} d\bar{s} & = 0 \end{cases}$$

Siccome Ω è convesso e ha bordo regolare, per ogni $s \in \Gamma$ è definita la normale $\nu(s)$, che soddisfa $i\nu(s) = \frac{ds}{|ds|}$.

Facciamo un cambio di variabile $ds = i\nu(s)|ds|$ e $d\bar{s} = -i\bar{\nu}(s)|ds|$

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \nu(s) (sI - A)^{-1} |ds| & = \Phi_n(A) \\ \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \overline{\nu(s)} (\bar{s}I - A^H)^{-1} |ds| & = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \left(\nu(s) (sI - A)^{-1} + \overline{\nu(s)} (\bar{s}I - A^H)^{-1} \right) |ds|$$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \left(\nu(s)(sI - A)^{-1} + \overline{\nu(s)}(\bar{s}I - A^H)^{-1} \right) |ds|$$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left(\nu(s)(sI - A)^{-1} + \overline{\nu(s)}(\overline{s}I - A^H)^{-1} \right)}_{\mu(s, A)} |ds|$$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \left(\nu(s)(sI - A)^{-1} + \overline{\nu(s)}(\overline{s}I - A^H)^{-1} \right) |ds|$$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \mu(s, A) |ds|$$

 $\mu(s, A)$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \left(\nu(s)(sI - A)^{-1} + \overline{\nu(s)}(\overline{s}I - A^H)^{-1} \right) |ds|$$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \mu(s, A) |ds|$$

 $\mu(s, A)$

- $\mu(s, A)$ è Hermitiana, semidefinita positiva (segue dalla convessità)

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \left(\nu(s)(sI - A)^{-1} + \overline{\nu(s)}(\bar{s}I - A^H)^{-1} \right) |ds|$$

 $\mu(s, A)$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \mu(s, A) |ds|$$

- $\mu(s, A)$ è Hermitiana, semidefinita positiva (segue dalla convessità)
- $\|\mu(s, A)\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|\mu(s, A)x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} x^T \mu(s, A)x$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \frac{1}{2\pi} \left(\nu(s)(sI - A)^{-1} + \overline{\nu(s)}(\bar{s}I - A^H)^{-1} \right) |ds|$$

$$\mu(s, A)$$

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \mu(s, A) |ds|$$

- $\mu(s, A)$ è Hermitiana, semidefinita positiva (segue dalla convessità)
- $\|\mu(s, A)\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|\mu(s, A)x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} x^T \mu(s, A)x$
- $\int_{\Gamma} \mu(s, A) |ds| = 2I$ perché l'integrale di ognuno dei due addendi fa I .

$$\text{Infatti } \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \nu(s)(sI - A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (sI - A)^{-1} ds = I$$

$$\text{Infatti } \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \nu(s)(sl - A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (sl - A)^{-1} ds = I$$

Dall'espressione integrale possiamo stimare la norma:

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \mu(s, A) |ds|$$

$$\|\Phi_n(A)\|_2 \leq \sup_{s \in \Gamma} |\varphi(s)|^n \sup_{\|x\|_2=1} \int_{\Gamma} x^T \mu(s, A) x |ds|$$

$$\text{Infatti } \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \nu(s) (sl - A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (sl - A)^{-1} ds = I$$

Dall'espressione integrale possiamo stimare la norma:

$$\Phi_n(A) = \int_{\Gamma} \varphi(s)^n \mu(s, A) |ds|$$

$$\|\Phi_n(A)\|_2 \leq \sup_{s \in \Gamma} |\varphi(s)|^n \sup_{\|x\|_2=1} \int_{\Gamma} x^T \mu(s, A) x |ds|$$

Si ha che $|\varphi(s)| = 1 \quad \forall s \in \Gamma$, e che

$$\int_{\Gamma} x^T \mu(s, A) x |ds| = x^T \left(\int_{\Gamma} \mu(s, A) |ds| \right) x = x^T 2I x = 2x^T x$$

$$\|\Phi_n(A)\|_2 \leq \sup_{\|x\|_2=1} 2x^T x = 2$$

Sia A la matrice di adiacenza di un grafo pesato e sia \tilde{A} la matrice ottenuta aggiungendo, rimuovendo o modificando i pesi di alcuni archi $\delta E \subseteq V \times V$.

Sia A la matrice di adiacenza di un grafo pesato e sia \tilde{A} la matrice ottenuta aggiungendo, rimuovendo o modificando i pesi di alcuni archi $\delta E \subseteq V \times V$.

Dati k, h due vertici, sia $L + 1$ la lunghezza minima di un cammino tra k e h che passa per un arco modificato in δE ; ovvero, ogni cammino di lunghezza $\leq L$ tra k e h non passa per nessun arco modificato.

Siano $S = \{s \mid (s, t) \in \delta E\}$ i vertici iniziali e $T = \{t \mid (s, t) \in \delta E\}$ degli archi modificati in δE , allora $L = d(k, S) + d(T, h)$.

Sia A la matrice di adiacenza di un grafo pesato e sia \tilde{A} la matrice ottenuta aggiungendo, rimuovendo o modificando i pesi di alcuni archi $\delta E \subseteq V \times V$.

Dati k, h due vertici, sia $L + 1$ la lunghezza minima di un cammino tra k e h che passa per un arco modificato in δE ; ovvero, ogni cammino di lunghezza $\leq L$ tra k e h non passa per nessun arco modificato.

Siano $S = \{s \mid (s, t) \in \delta E\}$ i vertici iniziali e $T = \{t \mid (s, t) \in \delta E\}$ degli archi modificati in δE , allora $L = d(k, S) + d(T, h)$.

Pozza, Tudisco 2018

Dati due vertici k, h , per qualsiasi polinomio $p_n(x)$ di grado $n \leq L = d(k, S) + d(T, h)$ si ha:

$$p_n(A)_{kh} = p_n(\tilde{A})_{kh}$$

Pozza, Tudisco 2018

Dati due vertici k, h , per qualsiasi polinomio $p_n(x)$ di grado $n \leq L = d(k, S) + d(T, h)$ si ha:

$$p_n(A)_{kh} = p_n(\tilde{A})_{kh}$$

Dimostrazione: $[A^m]_{kh}$ è uguale alla somma dei cammini pesati da k a h lunghi m in \mathcal{G} , mentre $[\tilde{A}^m]_{kh}$ è la somma di tali cammini nel grafo modificato $\tilde{\mathcal{G}}$. Prendendo $m \leq n \leq L$, i cammini da k a h lunghi m sono gli stessi in \mathcal{G} e $\tilde{\mathcal{G}}$, che implica $[A^m]_{kh} = [\tilde{A}^m]_{kh}$. Per linearità il risultato vale per tutti i polinomi di grado minore o uguale a $L = d(k, S) + d(T, h)$.

Pozza, Tudisco 2018

Sia A matrice, \tilde{A} una sua modifica come sopra e sia Ω un aperto convesso di \mathbb{C} contenente $W(A)$ e $W(\tilde{A})$.

Sia f una funzione analitica su Ω con sviluppo di Faber

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(z).$$

Siano k, h due vertici del grafo e sia L tale che ogni cammino tra k e h di lunghezza minore o uguale a L non passa per un arco modificato.

Allora:

$$|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n|$$

Dimostrazione: Dato che $\Omega \supseteq W(A), W(\tilde{A})$, si ha

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(A) \quad \text{e} \quad f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(\tilde{A})$$

Dimostrazione: Dato che $\Omega \supseteq W(A), W(\tilde{A})$, si ha

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(A) \quad \text{e} \quad f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(\tilde{A})$$
$$f(A) - f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\Phi_n(A) - \Phi_n(\tilde{A}))$$

Dimostrazione: Dato che $\Omega \supseteq W(A), W(\tilde{A})$, si ha

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(A) \quad \text{e} \quad f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(\tilde{A})$$
$$f(A) - f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\Phi_n(A) - \Phi_n(\tilde{A}))$$

Per il lemma, per $n \leq L$ si ha $\Phi_n(A)_{kh} = \Phi_n(\tilde{A})_{kh}$.

Dimostrazione: Dato che $\Omega \supseteq W(A), W(\tilde{A})$, si ha

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(A) \quad \text{e} \quad f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(\tilde{A})$$
$$f(A) - f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\Phi_n(A) - \Phi_n(\tilde{A}))$$

Per il lemma, per $n \leq L$ si ha $\Phi_n(A)_{kh} = \Phi_n(\tilde{A})_{kh}$.

$$f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh} = \sum_{n=L+1}^{\infty} f_n (\Phi_n(A)_{kh} - \Phi_n(\tilde{A})_{kh})$$

Dimostrazione: Dato che $\Omega \supseteq W(A), W(\tilde{A})$, si ha

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(A) \quad \text{e} \quad f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(\tilde{A})$$
$$f(A) - f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\Phi_n(A) - \Phi_n(\tilde{A}))$$

Per il lemma, per $n \leq L$ si ha $\Phi_n(A)_{kh} = \Phi_n(\tilde{A})_{kh}$.

$$\left| f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh} \right| = \left| \sum_{n=L+1}^{\infty} f_n (\Phi_n(A)_{kh} - \Phi_n(\tilde{A})_{kh}) \right|$$

Dimostrazione: Dato che $\Omega \supseteq W(A), W(\tilde{A})$, si ha

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(A) \quad \text{e} \quad f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(\tilde{A})$$

$$f(A) - f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\Phi_n(A) - \Phi_n(\tilde{A}))$$

Per il lemma, per $n \leq L$ si ha $\Phi_n(A)_{kh} = \Phi_n(\tilde{A})_{kh}$.

$$\left| f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh} \right| = \left| \sum_{n=L+1}^{\infty} f_n (\Phi_n(A)_{kh} - \Phi_n(\tilde{A})_{kh}) \right|$$

$$\left| f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh} \right| \leq \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| (|\Phi_n(A)_{kh}| + |\Phi_n(\tilde{A})_{kh}|) \leq$$

Dimostrazione: Dato che $\Omega \supseteq W(A), W(\tilde{A})$, si ha

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(A) \quad \text{e} \quad f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n(\tilde{A})$$
$$f(A) - f(\tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\Phi_n(A) - \Phi_n(\tilde{A}))$$

Per il lemma, per $n \leq L$ si ha $\Phi_n(A)_{kh} = \Phi_n(\tilde{A})_{kh}$.

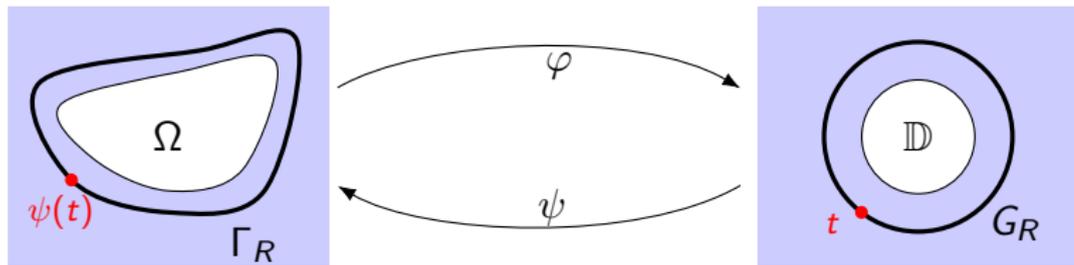
$$\left| f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh} \right| = \left| \sum_{n=L+1}^{\infty} f_n (\Phi_n(A)_{kh} - \Phi_n(\tilde{A})_{kh}) \right|$$
$$\left| f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh} \right| \leq \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| (|\Phi_n(A)_{kh}| + |\Phi_n(\tilde{A})_{kh}|) \leq$$
$$\leq \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| (\|\Phi_n(A)\|_2 + \|\Phi_n(\tilde{A})\|_2) \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n|$$

Pozza, Tudisco 2018

Con la stessa notazione di prima, siano φ, ψ i biolomorfismi tra Ω e \mathbb{D} . Sia $R > 1$ e f una funzione analitica su Ω_R .

$$|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq \sigma_R(f) \frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{R}\right)^{L+2}$$

Con $\sigma_R(f) = \frac{2}{\pi} \int_{G_R} |f(\psi(t))| |dt|$



Dimostrazione: $|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n|$

Dimostrazione: $|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n|$

$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_R} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt$ e si osservi che $t \in G_R \iff |t| = R$

Dimostrazione: $|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n|$

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_R} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt \text{ e si osservi che } t \in G_R \iff |t| = R$$

$$|f_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \frac{|f(\psi(t))|}{|t^{n+1}|} |dt| = \frac{1}{R^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t))| |dt|$$

Dimostrazione: $|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n|$

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_R} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt \text{ e si osservi che } t \in G_R \iff |t| = R$$

$$|f_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \frac{|f(\psi(t))|}{|t^{n+1}|} |dt| = \frac{1}{R^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t))| |dt|$$

$$|f_n| \leq \frac{1}{R^{n+1}} \frac{1}{4} \sigma_R(f)$$

Dimostrazione: $|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n|$

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_R} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt \text{ e si osservi che } t \in G_R \iff |t| = R$$

$$|f_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \frac{|f(\psi(t))|}{|t^{n+1}|} |dt| = \frac{1}{R^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t))| |dt|$$

$$|f_n| \leq \frac{1}{R^{n+1}} \frac{1}{4} \sigma_R(f)$$

$$4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| \leq \sigma_R(f) \sum_{n=L+1}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}}$$

Dimostrazione: $|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n|$

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_R} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt \text{ e si osservi che } t \in G_R \iff |t| = R$$

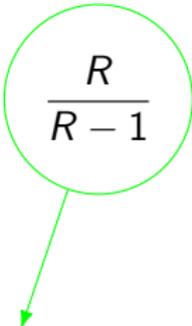
$$|f_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \frac{|f(\psi(t))|}{|t^{n+1}|} |dt| = \frac{1}{R^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t))| |dt|$$

$$|f_n| \leq \frac{1}{R^{n+1}} \frac{1}{4} \sigma_R(f)$$

$$4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| \leq \sigma_R(f) \sum_{n=L+1}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} = \sigma_R(f) \frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{R}\right)^{L+2}$$

$$|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| = \sigma_R(f) \quad \frac{R}{R-1} \quad \left(\frac{1}{R}\right)^{L+2}$$

$$|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| = \sigma_R(f) \left(\frac{R}{R-1} \right) \left(\frac{1}{R} \right)^{L+2}$$



R non troppo
vicino a 1

$$|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| = \sigma_R(f)$$

$$\frac{R}{R-1}$$

R non troppo
vicino a 1

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{L+2}$$

Tende a 0
per R grande

$$|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| = \sigma_R(f)$$

$\sigma_R(f)$ Cresce per R grande
 $\frac{R}{R-1}$ R non troppo vicino a 1
 $\left(\frac{1}{R}\right)^{L+2}$ Tende a 0 per R grande

$$\sigma_R(f) = \frac{2}{\pi} \int_{G_R} |f(\psi(t))| |dt|$$

$$|f(A)_{kh} - f(\tilde{A})_{kh}| \leq 4 \sum_{n=L+1}^{\infty} |f_n| = \sigma_R(f) \cdot \frac{R}{R-1} \cdot \left(\frac{1}{R}\right)^{L+2}$$

Cresce per R grande
 R non troppo vicino a 1
 Tende a 0 per R grande

$$\sigma_R(f) = \frac{2}{\pi} \int_{G_R} |f(\psi(t))| |dt|$$

Data f , si possono scegliere opportunamente Ω e R in modo da minimizzare la quantità a destra.

Esempio conclusivo

Possiamo applicare la stima ottenuta per $|f(A)_{kk} - f(\tilde{A})_{kk}|$ usando come funzione $f(x) = e^x$. Scegliendo come dominio Ω un cerchio centro c e raggio $a < L + 1$, scegliendo il valore ottimale del raggio R si ottiene:

$$\left| [e^A]_{kk} - [e^{\tilde{A}}]_{kk} \right| \leq 4e^{\Re(c)} \frac{L+1}{L+1-a} \left(\frac{ae}{L+1} \right)^{L+1}$$

In questo modo possiamo stimare la variazione della misura di centralità $[e^A]_{kk}$ per una modifica $A \rightarrow \tilde{A}$.

Esempio conclusivo

Possiamo applicare la stima ottenuta per $|f(A)_{kk} - f(\tilde{A})_{kk}|$ usando come funzione $f(x) = e^x$. Scegliendo come dominio Ω un cerchio centro c e raggio $a < L + 1$, scegliendo il valore ottimale del raggio R si ottiene:

$$\left| [e^A]_{kk} - [e^{\tilde{A}}]_{kk} \right| \leq 4e^{\Re(c)} \frac{L+1}{L+1-a} \left(\frac{ae}{L+1} \right)^{L+1}$$

In questo modo possiamo stimare la variazione della misura di centralità $[e^A]_{kk}$ per una modifica $A \rightarrow \tilde{A}$.

La stima dipende fortemente da L , ovvero la distanza dei nodi k, h da un arco modificato. Per nodi lontani dalla regione modificata (L grande) si ottengono buoni risultati, però diventa più difficile dare una stima per vertici vicini agli archi modificati.

Bibliografia

- 1 S. POZZA, F. TUDISCO, *On the stability of network indices defined by means of matrix functions* SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 39, No. 4 (2018), pp. 1521-1546
- 2 B. BECKERMANN, *Image numérique, GMRES et polynômes de Faber*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005), pp. 855-860.
- 3 P.K. SUETIN, *Series of Faber Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers (1998).
- 4 J.H. CURTISS, *Polynomials and the Faber Series*, The American Mathematical Monthly, Vol. 78, No. 6 (1971), pp. 577-596