Esercizi Elementi di Teoria degli insiemi

Simmaco Di Lillo

Indice

Parte I. Teoria ingenua degli insiemi

1 Lezione del 25 febbraio

1.1 Coppia di Kuratowski

Esercizio 1.1. *Data la definizione di coppia*

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

dimostrare che

1. *Se X è una coppia, esiste un unico elemento che appartiene a tutti gli elementi di X*
2. *Se $(a,b) = (a,b')$ allora $b = b'$*
3. *$(a,b) = (a',b')$ se e solo se $a = a' \wedge b = b'$*

Dimostrazione.

1. *Per definizione di coppia, a appartiene ad entrambi gli insiemi di X.*
   Supponiamo che $\exists c$, c appartiene a tutti gli elementi di X, dunque $c \in \{a\}$ da cui $c = a$
2. $(a,b) = (a,b') \rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,b'\}\}$.
   Ora per il principio di estensionalità si ha

   $$\{a,b\} \in \{\{a\},\{a,b'\}\} \rightarrow \{a,b\} = \{a\} \vee \{a,b\} = \{a,b'\}$$

   Possiamo distinguere 2 casi

   - *CASO I: $\{a,b\} = \{a\}$.*
     Per estensionalità $b \in \{a\}$ da cui $b = a$.
     Dunque dall'uguaglianza iniziale otteniamo

     $$\{\{a\}\} = \{\{a\},\{a,b'\}\}$$

     per estensionalità $\{a,b'\} \in \{\{a\}\}$ dunque $\{a,b'\} = \{a\}$ e per estensionalità $b' \in \{a\}$ da cui $b' = a$.
     Abbiamo dunque mostrato che $b' = b = a$
   - *CASO II: $\{a,b\} = \{a,b'\}$.*
     Per estensionalità abbiamo che $b \in \{a,b'\}$ da cui $b = a \vee b = b'$.
     Il caso $b = a$ è già stato trattato
3. *se $a = a' \wedge b = b'$ allora $\{\{a\},\{a,b\}\} = \left\{\{a\}',\{a',b'\}\right\}$ dunque $(a,b) = (a',b')$.*
   L'altra freccia la possiamo dimostrare in questo modo.

   $$(a,b) = (a',b') \quad \rightarrow \quad \{\{a\},\{a,b\}\} = \{a',\{a',b'\}\}$$

   Per il principio di estensionalità si ha

   $$\{a\} \in \{\{a'\},\{a',b'\}\} \quad \rightarrow \quad \{a\} = \{a'\} \vee \{a\} = \{a',b'\}$$

   Distinguiamo 2 casi

- $\{a\} = \{a'\}$ *dunque* $a = a'$ *e* $b = b'$ *per l'esercizio precedente*
- $\{a\} = \{a', b'\} \quad \to \quad \{a\} = \{a'\} \vee \{a\} = \{a', b'\}$.
  Il caso $\{a\} = \{a'\}$ *è già stato trattato.*
  Mostriamo il caso $\{a\} = \{a', b'\}$.
  Per estensionalità $a' \in \{a\}$ *da cui* $a' = a$.
  Ora poichè $a' = a$ *si ha* $b' = b$ *per il punto 2*

2 Lezione del 27 febbraio

2.1 Ordini

Esercizio 2.1 (Ordine della minima differenza)**.** *Su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiamo la seguente relazione:*
$f < g$ se $f(k) < g(k)$ con $k = \min\{n \mid f(n) \neq g(n)\}$.
Mostrare che è un ordine totale e che tale ordine non è un buon ordinamento.
Dimostrazione.
Per mostrare che è un buon ordine deve valere la propietà transitiva e la tricotomia forte.
Mostriamo che vale la propietà transitiva.
Siano $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con $f < g$ e $g < h$.
Poniamo

$$k_1 = \min\{n \,|\, f(n) \neq g(n)\}$$

$$k_2 = \min\{n \,|g(n) \neq h(n)\}$$

$$k_3 = \min\{n \,|\, f(n) \neq g(n)\}$$

Dunque $f(k_1) < g(k_1)$ e $g(k_2) < h(k_2)$ inoltre abbiamo $f(x) = g(x)$ per $x < k_1$, $g(x) = h(x)$ per $x < k_2$ e $f(x) = h(x)$ per $x < k_3$.
Distinguiamo vari casi

$k_1 < k_2$ *Mostriamo che $k_3 = k_1$.*
Se $k_3 > k_1$ allora poichè $k_1 < k_2$ si ha $g(k_1) = h(k_1)$ inoltre $f(k_1) = h(k_1)$ (per valori minori di k_3 le due funzioni coincidono) dunque $f(k_1) = g(k_1)$ il che contraddice la definizione di k_1.
Se $k_3 < k_1$ allora $f(k_3) = g(k_3)$ inoltre poichè $k_3 < k_2$ si ha $g(k_3) = h(k_3)$ dunque $f(k_3) = h(k_3)$ che contraddice la definizione di k_3.
Ora $f(k_3) = f(k_1) < g(k_1) = h(k_1) = h(k_3)$ dunque $f < h$

$k_1 > k_2$ *Mostriamo che $k_3 = k_2$.*
Se $k_3 > k_2$ allora poichè $k_2 < k_1$ si ha $g(k_1) = h(k_1)$ inoltre $f(k_1) = h(k_2)$ (per valori minori di k_3 le due funzioni coincidono) dunque $f(k_1) = g(k_1)$ che contraddice la definizione di k_1
Se $k_3 < k_2$ allora $g(k_3) = h(k_3)$ inoltre poichè $k_3 < k_1$ si ha $f(k_3) = g(k_3)$ da cui $f(k_3) = h(k_3)$ che contraddice le ipotesi di k_3.
Ora $f(k_3) = g(k_3) = g(k_2) < h(k_2) = h(k_3)$

$k_1 = k_2$ *Allora $k_3 = k_1$ in quanto $\forall x < k_1 = k_2$ si ha $f(x) = g(x) = h(x)$ dunque $k_3 \geq k_1$.*
Ora per definizione di k_1 e k_2 si ha $f(k_1) < g(k_1) = g(k_2) < h(k_2)$.
Poichè $k_3 \geq k_1$ e $f(k_1) \neq h(k_1)$ si ha $k_3 = k_1$ da cui la tesi

In entrambi i casi $f(k_3) < h(k_3)$ da cui $f < h$ dunque vale la propietà transitiva.
Mostriamo la tricotomia forte.
Supponiamo $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ allora se poniamo $k = \min\{n \in \mathbb{N}, | f(n) \neq g(n)\}$ allora poichè $(\mathbb{N}, <)$ è un ordine totale può verificarsi $f(k) < g(k)$ (dunque $f < g$) oppure $g(k) < f(k)$ (dunque $g < f$).

L'ordine non è totale in quanto consideriamo il seguente insieme $\{f_n \, n \in \mathbb{N}\}$ dove: $f_n(i) = 0 \; \forall i = 1, \ldots, n$ e $f_n(i) = 1 \, \forall i > n$ allora tale insieme non ammette minimo (in quanto per ogni funzione nell'insieme f_m si ha f_{m+1} appartiene all'insieme e $f_{m+1} < f_m$)

Esercizio 2.2. *Consideriamo l'insieme* $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f : N_0 \to N_0 \,|\, f(n) \text{ definitivamente } 0\}$ *con la seguente relazione* $f < g$ *se* $f(k) < g(k)$ *dove* $k = \max\{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) \neq g(n)\}$.
Mostrare che tale relazione è un buon ordine.
Dimostrazione.
Notiamo che la relazione è ben definita in quanto se f, g *sono nell'insieme allora sono definitivamente nulle e dunque definitivamente uguali da cui il massimo dell'insieme esiste).*
Mostriamo prima che è un buon ordine (vale la transitiva e la tricotomia forte).
Siano f, g, h *nell'insieme considerato con* $f < g$ *e* $g < h$.
Siano

$$k_1 = \max\{n \,|f(n) \neq g(n)\}$$
$$k_2 = \max\{n \,|g(n) \neq h(n)\}$$
$$k_3 = \max\{n \,|f(n) \neq g(n)\}$$

Allora $f(x) = g(x)$ *per* $x > k_1$ *con* $f(k_1) < g(k_1)$ *similmente* $g(x) = h(x)$ *per* $x > k_2$ *con* $g(k_1) < h(k_1)$ *ed inoltre* $f(x) = h(x)$ *per* $x > k_3$.
Distinguiamo vari casi

$k_1 < k_2$ *In questo caso si ha* $k_3 = k_2$ *in quanto se* $x > k_2$ *e dunque* $x > k_1$ *si ha* $f(x) = g(x) = h(x)$ *da cui per definizione di* k_3 *si ha* $k_3 \leq k_2$.
Ora $f(k_2) = g(k_2) \neq h(k_2)$ *da cui* $k_2 \in \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) \neq h(n)\}$ *ora poichè* $k_3 \leq k_2$ *e* k_2 *appartiene all'insieme di cui* k_3 *è il massimo si conclude con* $k_3 = k_2$.

$$f(k_3) = f(k_2) = g(k_2) < h(k_2) = h(k_3) \quad \to \quad f < h$$

$k_2 < k_1$ *In questo caso si ha* $k_3 = k_1$ *in quanto se* $x > k_1$ *e dunque* $x > k_2$ *si ha* $f(x) = g(x) = h(x)$ *inoltre per ragionamenti analoghi al caso precedente* $f(k_1) \neq h(k_1)$ *dunque si conclude con analoga osservazione del caso precedente.*

$$f(k_3) = g(k_2) < h(k_2) = h(k_3) \quad \to \quad f < h$$

$k_1 = k_2$ *In questo caso* $k_3 = k_1 = k_2$ *in quanto se* $x > k_1$ *e dunque* $x > k_2$ *si ha* $f(x) = g(x) = h(x)$.
Ora se $x < k_3$ *allora* $f(k_1) = h(k_1)$ *il che è assurdo in quanto per definizione di* k_1, k_2 *si ha*

$$f(k_1) < g(k_1) \wedge g(k_1) = g(k_2) < h(k_2) = h(k_1) \quad \to \quad f(k_1) < h(k_1) \quad \to \quad f(k_1) \neq h(k_1)$$

dove l'ultima implicazione deriva dal fatto che $(\mathbb{N}, <)$ *soddisfa la tricotomia forte.*
Dunque $f(k_3) = f(k_1) < g(k_1) = g(k_2) < h(k_2) = h(k_3)$.
Mostriamo la tricotomia forte.
Siano f, g *nell'insieme con* $f \neq g$.
Essendo le funzioni diverse $\exists k = \max\{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) \neq g(n)\}$.
Ora $f(k), g(k) \in \mathbb{N}$ *e poichè* $(\mathbb{N}, <)$ *è ben ordinato si ha* $f(n) < g(n)$ *(da cui* $f < g$*) oppure* $g(n) < f(n)$ *(da cui* $g < f$*).*

Mostriamo che è un ordine totale. Sia $A \subset Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ *non vuoto.*
Sia $k = \max\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists f \in A \; f(n) \neq 0\}$ *tale massimo esiste in quanto tutte le funzioni sono definitivamente uguali a* 0, *dunque* $\forall g \in A$ *si avrà* $g(h) = 0$ *se* $h > k$.
Poniamo per $A_{k+1} = A$ *Sia* $m_k = \min\{f(k)\, f \in A_{k+1}\}$ *osserviamo che tale minimo esiste in quanto stiamo trovando il minimo di un sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{N}$.
Definiamo $A_k = \{f \in A_{k+1} \,|\, f(k) = m_k\}$ *tale insieme non è vuoto per definizione di* m_k
Consideriamo ora le seguenti operazioni

- *Sia* $m_{k-1} = \min\{f(k-1) \mid f \in A_k\}$ *(esiste per motivi analoghi a sopra)*
- *Sia* $A_{k-1} = \{f \in A_k \mid f(k-1) = m_{k-1}\}$ *non è vuoto per definizione di* m_{k-1}

Iterando le 2 istruzioni precedenti costruiamo una successione $A_k, A_{k-1}, \dots A_2$ *con queste proprietà*

- $\forall i \in \{2, \dots, k\}$ *si ha* $\forall f, g \in A_i \quad f(j) = g(j)$ *se* $i > j$ *(segue dalla definizione degli* A_i*)*
- *Inoltre* $\forall i \in \{2, \dots, k\}$ $\forall f \in A_i$ $\forall g \in A \setminus A_i$ *si ha* $f < g$,
  Infatti se $g \notin A_i$ *allora esiste* $h \in \{k+1, \dots, i+1\}$ *con* $f \in A_h$ *e* $f \notin A_{h-1}$ *dunque per definizione di* A_h f *e* g *coincidono per valori minori o uguali ad* h *mentre poichè* $g \notin A_{h-1}$ *e* $f \in A_{h-1}$ *si avrà* $f(h-1) = m_{h-1} < g(h-1)$

Sia $m = \min\{f(1) \mid f \in A_2\}$, *se* k *realizza tale minimo allora* $k = \min A$ *segue direttamente dalle 2 proprietà*

2.2 Assioma di scelta

Esercizio 2.3. *I seguenti fatti sono equivalenti*

1. *A.C.*
2. *Ogni famiglia non vuota $\mathfrak{F}$ di insiemi non vuoti ha una funzione di scelta f.* $dom f = \mathfrak{F}$ *e* $f(F) \in F \, \forall F \in \mathfrak{F}$
3. *Ogni insieme non vuoto ha una funzione di scelta f*
$$f : \mathcal{P}(A) - \emptyset \to A \quad f(X) \in X \, \forall X \in \mathcal{P}(A)$$
4. *Ogni famiglia $\mathfrak{F}$ non vuota di insiemi non vuoti a 2 a 2 disgiunti ha un selettore X ciòè un insieme X con $|X \cap F| = 1 \; \forall F \in \mathfrak{F}$*
5. *Ogni funzione suriettiva ha un inversa destra*

Dimostrazione.

- $1 \to 2$
Indicizziamo la famiglia su I
$$\mathfrak{F} = \{F_i \,|\, i \in I\}$$
allora per A.C. si ha che $\exists f \in \prod_{i \in I} A_i$.
Tale f è una funzione di scelta per la famiglia
- $2 \to 3$
$\mathcal{P}(A) - \emptyset$ *è una famiglia di insiemi.*
- $3 \to 4$
Consideriamo
$$U = \bigcup \mathfrak{F}$$
per il punto precedente esiste una funzione di scelta f per l'insieme U.
Sia
$$X = \{f(F) \,|\, F \in \mathfrak{F}\}$$
X è un selettore per $\mathfrak{F}$.
- $4 \to 5$
Sia $f : A \to B$ suriettiva. Sia
$$\mathfrak{F} = \{f^{-1}(\{b\}) \,| b \in B\}$$
$\mathfrak{F}$ è una famiglia non vuota di insiemi non vuote (f suriettiva $\to$ fibre non vuote).
Sia X un selettore per $\mathfrak{F}$.
Definiamo
$$g : B \to A \quad g(b) = f^{-1}(\{b\}) \cap X$$
in modo ovvio $f \circ g$ è l'identità di B

- $5 \to 1$.
  Sia $\mathfrak{F} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ *una famiglia di insiemi non vuoti e definiamo*

$$f : \bigcup_{i \in I} (A_i \times I) \to \mathfrak{F}$$

$$f(a, i) = A_i$$

  In modo ovvio, tale funzione è suriettivo, dunque ammette un inversa g
  $\forall A_i \in \mathfrak{F}$ *si ha* $g(A_i) = (a_i, k_i)$ *ora poichè* $f \circ g(A_i) = A_i$ *deve essere* $a_i \in A_i$.
  La I*-sequenza* $\langle a_i \,|\, i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} A_i$

Esercizio 2.4. *Sia* $\langle F_{i,j} \,|\, (i,j) \in I \times J \,\rangle$ *una sequenza di insiemi non vuoti.*

1. *Dimostrare usando (A.C) che*

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} F_{i,j} = \bigcup_{f\colon I\to J}\bigcap_{i\in I} F_{i,f(i)}$$

2. *Dimostrare che l'uguaglianza di sopra è equivalente a A.C*

Dimostrazione.
Ricordiamo come sono definite l'unione e intersezione di famiglie

$$\bigcap \mathfrak{F} = \{x \in X \,|\, \forall F \in \mathfrak{F}\ x \in F\}$$

$$\bigcup \mathfrak{F} = \{x \in X \,|\, \exists F \in \mathfrak{F}\ x \in F\}$$

dunque possiamo riscrivere i 2 termini dell'uguaglianza in questo modo:

$$A = \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} F_{i,j} = \left\{ x \,\middle|\, \forall i \in I\ x \in \bigcup_{j\in J} F_{i,j} \right\} = \{x \,|\, \forall i \in I\ \exists j \in J\ x \in F_{i,j}\}$$

$$B = \bigcup_{f\colon I\to J}\bigcap_{i\in I} F_{i,f(i)} = \left\{ x \,\middle|\, \exists f : I \to J\ x \in \bigcap_{j\in J} F_{i,f(i)} \right\} = \big\{x \,|\, \exists f : I \to J \forall i \in I\ x \in F_{i,f(i)}\big\}$$

1. - *Se* $A \neq \emptyset$ *allora* $A \subseteq B$.
     Sia $x \in A$ *dunque* $\forall i \in I\ \exists j \in J$ *con* $x \in F_{i,j}$.
     $\forall i \in I$ *sia* $J_i = \{F_{i,j} \,|\, \exists j \in J\ x \in F_{i,j}\}$.
     Osserviamo che $\forall i$ *si ha* $J_i \neq \emptyset$ *(dalla definizione di* A *segue che esiste un* $j \in J$ *con* $j \in J_i$*)*
     Consideriamo la famiglia $\mathfrak{F} = \{J_i \,|\, i \in I\}$, *tale famiglia non è vuota dunque per A.C. (secondo modo equivalente) esiste* $f = \langle x_i\, i \in I\rangle$ *dove* $x_i \in J_i$.
     Dunque $\exists f : I \to J$ *tale che* $x \in F_{i,f(i)}$ $\forall i \in I$ *ovvero* $x \in B$
   - *Se* $B \neq \emptyset$ *allora* $B \subseteq A$ *Sia* $x \in B$ *allora* $\exists f : I \to J$ *tale che* $\forall i \in I\ x \in F_{i,f(i)}$ *da cui* $\forall i \in I \exists j = f(i)$ *tale che* $x \in F_{i,j}$ *ovvero* $x \in A$
   - *Le 2 implicazioni precedenti hanno anche mostrato che che l'uguaglianza vale anche nel caso che uno dei 2 sia vuoto in quanto il vuoto è contenuto in ogni insieme*

2. *Sia* $\langle A_i \,|\, i \in I\rangle$ *una famiglia di insiemi non vuoti.*
   Definiamo

$$\langle H_{i,j} \,|\, (i,j) \in I \times \bigcup_{i\in I} A_i\rangle$$

   dove

$$H_{i,j} = \begin{cases} \{\emptyset\} \text{ se } j \notin A_i \\ \{1\} \text{ se } j \in A_i \end{cases}$$

   dunque $\{1\} \subseteq A$ *dove* $J = \bigcap_{i\in I} A_i$ *infatti gli* A_i *non sono vuoti.*
   Dunque poichè $A = B$ *ne segue che* $\{1\} \in B$ *da cui*

$$\exists f : I \to J \quad \text{con } \{1\} \subseteq H_{i,f(i)}$$

   dunque per definizione di $H_{i,f(i)}$ *si ha* $f(i) \in A_i$ $\forall i$.
   Dunque f *è una funzione di scelta.*

3 Lezione del 28 Febbraio

3.1 Teoria della cardinalità

Esercizio 3.1. *Siano* $|A| = |A'|$ *e* $|B| = |B'|$ *allora*

1. $|A \cup B| = |A' \cup B'|$ *se* $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$
2. $|A \times B| = |A' \times B'|$
3. $|Fun(A, B)| = |Fun(A', B')|$
4. $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$

Dimostrazione.
Sia $f_A : A \to A'$ *la biezione e* $g_A : A' \to A$ *la sua inversa.*
Sia $f_B : B \to B'$ *la biezione e* $g_B : B' \to B$ *la sua inversa.*

1. *La funzione* $f : A \cup B \to A' \cup B'$ *definita da*

$$\forall c \in A \cup B \quad f(c) = \begin{cases} f_A(c) \text{ se } c \in A \\ f_B(c) \text{ se } c \in B \end{cases}$$

è una ben definita funzione (i 2 insiemi sono disgiunti) ed è biettiva in quanto f *ha come inversa* $g : A' \cup B' \to A \cup B$ *definita da*

$$\forall c' \in A' \cup B' \quad f(c') = \begin{cases} g_A(c') \text{ se } c' \in A' \\ g_B(c') \text{ se } c' \in B' \end{cases}$$

2. *La funzione*

$$f : A \times B \to A' \times B' \text{ definita da } \forall (a, b) \in A \times B \;\; f((a, b)) = (f_A(a), f_B(b))$$

è una biezione avendo come inversa la funzione

$$g : A' \times B' \to A \times B \text{ dove } \forall (a', b') \in A' \times B' \;\; g((a', b')) = (g_A(a'), g_B(b'))$$

3. *Sia*

$$\psi : Fun(A, B) \to Fun(A', B') \text{ dove } \forall h \in Fun(A, B) \;\; \psi(h) = f_B \circ h \circ g_A$$

tale funzione è ben definita in quanto $\psi(h) : A' \to B'$ *ed è biettiva avendo come inversa*

$$\phi : Fun(A', B') \to Fun(A, B) \text{ dove } \forall h \in Fun(A', B') \;\; \phi(h) = g_B \circ h \circ f_A$$

4. *La funzione*

$$\gamma : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A') \text{ dove } \forall X \in \mathcal{P}(A) \;\; \gamma(X) = \{f_A(x) \,|\, x \in X\}$$

è ben definita in quanto $\{f_A(x) \,|\, x \in X\} \in \mathcal{P}(A')$ *inoltre è biettiva avendo come inversa*

$$\Gamma : \mathcal{P}(A') \to \mathcal{P}(A) \text{ dove } \forall X \in \mathcal{P}(A') \;\; \Gamma(X) = \{g_A(x) \,|\, x \in X\}$$

Le due funzioni sono una l'inversa dell'altra in quanto

$$(\gamma \circ \Gamma)(x) = \gamma\left(\{g_A(x) \,| x \in X\}\right) = \{f_A(g_A(x)) \,|\, x \in X\} = \{x \,|\, x \in X\} = X$$

dove la penultima uguaglianze deriva dal fatto che f_A *e* g_A *sono l'una l'inversa dell'altra, l'ultima uguaglianza segue dal principio di estensionalità*

Esercizio 3.2.

$$|A| = \aleph_0 \text{ e } F \subset A \text{ finito} \quad \rightarrow \quad |A - F| = \aleph_0$$

Dimostrazione.
Poichè A è numerabile sia $f : \mathbb{N} \to A$ la biezione esistente (poniamo $f(i) = a_i$) a meno di comporre per una permutazione posso supporre $F = \{f(1), \ldots, f(s)\}$ da cui sia

$$g : \mathbb{N} \to A - F \quad g(i) = a_{i+s}$$

Tale funzione biettiva in quanto

$$h : A - F \to \mathbb{N} \quad h(a_i) = i - s$$

è la sua inversa (osserviamo che h è ben definita in quanto se $a_i \in A - F$ allora $i \geq s + 1$ dunque $i - s \geq 1$)

Esercizio 3.3.

$$|A| = \aleph_0 \text{ e } F \text{ finito} \quad \rightarrow \quad |A \cup F| = \aleph_0$$

Dimostrazione.

- *Dimostriamo prima il caso in cui F e A sono disgiunti ed in seguito analizziamo il caso generale.*
  Essendo F finito, possiamo supporre $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$.
  Essendo A numerabile allora se $f : \mathbb{N} \to A$ è la biezione, poniamo $f(i) = a_i$.
  Sia $g : A \cup F \to \mathbb{N}$ definita nel seguente modo $g(a_i) = i + s \ \forall i \in \mathbb{N}$ e $g(f_i) = i \ \forall i = 1, \ldots, s$.
  Tale funzione è biettiva avendo come inversa la funzione $h : \mathbb{N} \to A \cup F$ definita nel seguente modo $h(i) = f_i$ per $i = 1, \ldots, s$ altrimenti $h(i) = a_{i-s}$

- *Mostriamo che non è restrittivo l'ipotesi $A \cap F = \emptyset$.*
  Nel caso $A \cap F \neq \emptyset$ possiamo scrivere $A \cap B = (A - F) \cup F$.
  Se poniamo $A' = A - F$ allora siamo nelle ipotesi precedenti in quanto per l'esercizio precedente $|A'| = \aleph_0$ e l'unione $A' \cup F$ è disgiunta

Esercizio 3.4.

$$|A| = \aleph_0 \text{ e } B \triangle A \text{ finito} \quad \rightarrow \quad |B| = \aleph_0$$

Dimostrazione.
Ora $(A \triangle B) \cap A \subseteq A \triangle B$ da cui $|(A \triangle B) \cap A$ è finito.
Ora $A \cap B = A - (A \triangle B)$ dunque per quanto visto precedentemente si ha $|A \cap B| = \aleph_0$.
Ora essendo $A \triangle B$ finito lo è anche $(A \triangle B) \cap B$.
Ora $B = (A \cap B) \cup ((A \triangle B) \cap B)$ e per il punto precedente $|B| = \aleph_0$

Esercizio 3.5.

$$|A| = |B| = \aleph_0 \quad \rightarrow \quad |A \cup B| = \aleph_0$$

Dimostrazione.

- *Consideriamo A e B disgiunti.*
  Essendo A numerabile allora possiamo enumerare A (se $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ è la biezione poniamo $a_i = f(i)$) in modo analogo possiamo enumerare gli elementi di B.
  Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow A \cup B$ definita nel seguente modo

  $$h(i) = \begin{cases} a_{\frac{i}{2}} \ \textit{se}\ i \equiv 0 \mod 2 \\ b_{\frac{i+1}{2}} \ \textit{se}\ i \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

  Tale funzione è biettiva in quanto ha come inversa la funzione $g : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ definita nel seguente modo

  $$g(c_i) = \begin{cases} 2i \ \textit{se}\ c_i = a_i \\ 2i - 1 \ \textit{se}\ b_i = a_i \end{cases}$$

- *Supponiamo che l'unione non sia vuota allora*

  $$A \cup B = (A - (A \cap B)) \cup B$$

  Ora $A - (A \cap B) \subseteq A$ dunque o è finito o è numerabile

  - *Se è finito allora unione di un numerabile e di un finito è numerabile*
  - *Se è numerabile allora ricadiamo nel caso di unione disgiunta*

4 Lezione del 3 marzo

4.1 Ancora teoria della cardinalità

Esercizio 4.1. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito, allora A è numerabile.*
Dimostrazione.
Andiamo a definire un'enumerazione su A in maniera ricorsiva.
Essendo A infinito è non vuoto, dal buon ordine dei naturali, ammette minimo, poniamo questo minimo a_1.
Supponiamo adesso di aver definito $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ andiamo a definire a_{n+1} nel modo seguente.
Essendo A infinito, $A \backslash \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ è non vuoto dunque ammette minimo, sia a_n tale minimo.
Con questo metodo riusciamo ad enumerare A ovvero metterlo in corrispondenza biunivoca con i naturali.

Esercizio 4.2.

$$\forall i \in I \ |A_i| = |A'_i| \quad \rightarrow \quad \left|\prod_{i\in I} A_i\right| = \left|\prod_{i\in I} A'_i\right|$$

Dimostrazione.
Sia $\Lambda_i = \{\psi : \ A_i \rightarrow A_i; \,|\, \psi$ biezione$\}$ poichè $\forall i \ \ A_i$ e A'_i sono equipotenti allora $\Lambda_i \neq \emptyset$.
Per l'assioma della scelta $\exists \Psi = \langle \psi_i \,|\, i \in I \rangle \in \prod_{i\in I} \Lambda_i$
Sia

$$\phi : \prod_{i\in I} A_i \rightarrow \prod_{i\in I} A'_i$$

dove $\forall f \in \prod_{i\in I} A_i$ si ha $\phi(f)(i) = f \circ \psi_i$.
Tale funzione è biettiva avendo come inversa

$$\Phi : \prod_{i\in I} A'_i \rightarrow \prod_{i\in I} A_i$$

dove $\forall f \in \prod_{i\in I} A'_i$ si ha $\Phi(f)(i) = f \circ \psi_i^{-1}$

Esercizio 4.3.

$$\forall i \in I \ |A_i| = |A'_i| \ \text{ con } A_i \cap A_j = A'_i \cap A'_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \quad \rightarrow \quad |\cup_{i\in I} A_i| = |\cup_{i\in I} A'_i|$$

Dimostrazione.
Come nell'esercizio precedente sia $\Psi = \langle \psi_i \,|\, i \in I \rangle$ dove $\psi_i : \ A_i \rightarrow A'_i$ è una biezione.

$$\Gamma : \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrow \bigcup_{i\in I} A'_i$$

definita nel seguente modo:
Sia $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ ore dalla definizione di unioni di famiglie e pochiè gli insiemi sono a 2 a due distinti $\exists! j \in I$ tale che $x \in A_j$ da cui pongo $\Gamma(x) = \psi_j(x)$.
Tale funzione è biunivoca in quanto la funzione

$$\phi : \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrow \bigcup_{i\in I} A'_i \quad \phi(x) = \psi_j^{-1}(x) \text{ dove } j \text{ è l'unico indice per cui } x \in A'_j$$

è la sua inversa

Esercizio 4.4. *Se* $|X| = |Y|$ *allora* $|FS(X)| = |FS(Y)|$
Dimostrazione.
Sia $f : X \to Y$ *la biezione esistente.*
Definiamo $\psi : FS(X) \to FS(Y)$ *nel seguente modo se* $\Gamma = \langle x_i \,|i = 1, \ldots, n \, x_i \in X\rangle$ *è una sequenza finita di* X*, pongo* $\psi(\Gamma) = \langle f(x_i) \,|\, i = 1, \ldots, n\rangle$ *chiaramente è una sequenza finita di* Y.
ψ *è biettiva, in quanto se* g *è l'inversa di* f *allora la mappa* $\phi : FS(Y) \to FS(X)$ *definita in modo analogo a* ψ *ma usando* g *è l'inversa di* ψ

Esercizio 4.5. *Se* $|X| = |Y|$ *allora* $|Fin(X)| = |Fin(Y)|$
Dimostrazione.
Sia $f : X \to Y$ *la biezione esistente.*
Definiamo $\psi : Fin(X) \to Fin(Y)$ *nel seguente modo se* $\psi(\Gamma) = \{f(x) \,|\, x \in \Gamma\}$.
ψ *è ben definita in quanto* $f(x) \in Y$ *e* $\psi(\Gamma)$ *è un sottoinsieme finito.*
ϕ *è invertibile in quanto se* g *è l'inversa di* f *allora la funzione* $\phi : Fin(Y) \to Fin(X)$ *dove* $\phi(\Gamma) = \{g(y) \,|\, y \in \Gamma\}$ *è l'inversa di* ϕ

5 Lezione del 10 marzo

Esercizio 5.1. *Non esiste l'insieme ν di tutti gli insiemi*
Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che ν sia un insieme allora per l'assioma potenza $\mathcal{P}(\nu)$ è un insieme. Sia $x \in \nu$, dalla definizione di insieme delle parti x è un insieme, cioè $x \in \nu$ da cui $\mathcal{P}(\nu) \subseteq \nu$ dunque $|\mathcal{P}(\nu)| \leq |\nu|$.
Ora l'ultima affermazione contraddice il Teorema di Cantor.
Era assurdo aver supposto ν insieme

Esercizio 5.2. $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)| \to |A| = |B|$
Dimostrazione.
Tale enunciato è indecidibile.

Esercizio 5.3. *Se $A \cap B = \emptyset$ allora $\left|X^A \times X^B\right| = \left|X^{A \cup B}\right|$*
Dimostrazione.
Sia $\psi : X^A \times X^B \to X^{A\cup B}$ definita nel seguente modo:
se $f : A \to X$ e $g : B \to X$ allora

$$\psi((f,g))(y) = \begin{cases} f(y) & se\ y \in A \\ g(y) & se\ y \in B \end{cases}$$

tale funzione è ben definita su $A \cup B$ poichè i 2 insiemi sono disgiunti.
Banalmente è biettiva in quanto ammette inversa

$$\phi :, X^{A\cup B} \to X^A \times X^B \quad f \to (\pi_A(f), \pi_B(g))$$

dove

$$\pi_A(f)(a) = f(a)\ \forall a \in A \ e\ \pi_B(f)(b) = f(b)\ \forall b \in B$$

Esercizio 5.4. *Trovare dimostrazioni alternativa (da quella vista a lezione) del fatto che* $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$
Dimostrazione.
Andiamo a mostrare che $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è equipotente a $R^2 = \{f : \{0,1\} \to \mathbb{R}$.
La biezione è data semplicemente della funzione $\Gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
Con $\Gamma((a,b)) = f_{a,b}$ dove $f_{a,b}(0) = a$ mentre $f_{a,b}(1) = b$ chiaramente tale funzione è biettiva.
Dunque ricordando quanto dimostrato nell'esercizio 5.7 si conclude osservando

$$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \left|\mathbb{R}^2\right| = \left(2^{\aleph_0}\right)^2 = 2^{\aleph_0 \times 2} = 2^{\aleph_0} = c$$

Infatti $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ è equipotente a $\mathbb{N}$ consideriamo

$$\phi : \mathbb{N} \times \{0,1\} \to \mathbb{N} \quad (n,0) \to 2n \quad (n,1) = 2n+1$$

ha come inversa

$$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{0,1\} \quad \psi(n) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}, 0\right) & se\ n\ pari \\ \left(\frac{n-1}{2}, 1\right) & se\ n\ dispari \end{cases}$$

Esercizio 5.5. *(A.C.) Se X è infinito con $|X \times X| = |X|$ allora $|Fin(X)| = |FS(X)| = |X|$*
Dimostrazione.
Andiamo prima a dimostrare che $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right| \leq |X|$ dove $|Y_n| \leq |X|$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Poichè $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $|Y_n| \leq |X|$ esiste $\psi_n : Y_n \to X$ iniettiva.
Dall'assioma della scelta $\exists \Psi = (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Andiamo a costruire una funzione

$$\varphi : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \to \mathbb{N} \times X$$

se $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ allora poniamo $k = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, a \in Y_n\}$ (dalla definizione di unione di famiglie, l'insieme di cui cerchiamo il minimo non è vuoto).
Poniamo dunque $\varphi(a) = (k, \psi_k(a))$.
Mostriamo che tale funzione è iniettiva supponiamo $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = (a, b)$ dunque per definizione di φ abbiamo che $\psi_a(x_1) = \psi_a(x_2)$ dunque essendo ψ_a iniettiva $x_1 = x_2$
Abbiamo dunque $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right| \leq |\mathbb{N} \times X| \leq |X \times X| = |X|$

Mostriamo adesso che $|FS(X)| = |X|$.
Sia $\phi : FS(X) \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ dove $\psi(\langle x_i \,|\, i = 1, \dots s\rangle) = (x_1, \dots, x_s)$.
Tale funzione è chiaramente biettiva dunque $|FS(X)| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n\right| = |X|$ dove l'ultima uguaglianza segue da Cantor-Bernstain infatti $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n\right| \leq |X|$ ma $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$

Per quanto riguarda la cardinalità di $Fin(X)$:
Si mostra che $|Fin(X)| < |FS(X)| = |X|$ (se A è un sottoinsieme finito allora è in bigezione tramite g con $\{1, \dots s\}$ dunque posso mandare A nella successione $g(1), \dots, g(s)$ e questo viene fatto in maniera iniettiva).
L'altra disuguaglianza è data considerando la funzione che associa ad ogni $x \in X$ il singoletto $\{x\}$.
Si conclude per Cantor-Bernstain

Esercizio 5.6. $|\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$
Si procede in modo analogo alla dimostrazione dell'esercizio 5.4

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})| = \left|\mathcal{P}(\mathbb{R})^2\right| = (2^c)^2 = 2^{c\times 2} = 2^c = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$$

in quanto $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ è equipotente a $\mathbb{R}$ infatti $\mathbb{R} \times \{0,1\} \subset \ R \times \mathbb{R}$ da cui $|\mathbb{R} \times \{0,1\}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = c$.
Inoltre la funzione

$$sgn : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times \{0,1\} \quad sgn(r) = \begin{cases} (r, 0) \ se \ r > 0 \\ (r, 1) \ se \ r < 0 \end{cases}$$

è iniettiva dunque $c = |\mathbb{R} \setminus \{0\}| \leq |\mathbb{R} \times \{0,1\}|$.
Si conclude dunque con Cantor-Bernstain

Esercizio 5.7. $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = c$
Dimostrazione.
Mostriamo prima che vale questa proprietà

$$\left|\left(A^B\right)^C\right| = \left|A^{B\times C}\right|$$

Se $f \in \left(A^B\right)^C$ allora $f : C \to A^B$ ovvero $f(c) : B \to A$.
Costruiamo una funzione $\phi_f : C \times B \to A$ dove $\phi_f(c, b) = f(c)(b)$.

Abbiamo definito una mappa $\phi : \left(A^B\right)^C \to A^{B\times C}$ *dove* $\phi(f) = \phi_f$ *, tale mappa è invertibile infatti se* $g \in A^{B\times C}$ *allora* $g : C \times B \to A$ *definiamo una funzione* $\psi_g : C \to B^A$ *con* $\psi_g(c) = f$ *con* $f(b) = g(c,b)$ *tale funzione è l'inversa di quella di sopra.*

Ora sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{N}^n$ *tale che* $h(r) = c_r$ *dove* c_r *è la successione costantemente uguale ad* r*.*
h *è iniettiva dunque* $|\mathbb{R}| \le \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.
Mostriamo che vale anche l'altra disuguaglianza e concludiamo per Cantor-Bernstain

$$c = \left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right| = \left|\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right| \ge \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$$

Esercizio 5.8. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = c$
Dimostrazione.

$$\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = \left|\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = c$$

Esercizio 5.9. $\left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| = c$
Dimostrazione.

Sia

$$\psi : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\aleph_0} \qquad r \to \{r+n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Tale funzione è ben definita in quanto $\psi(r)$ *è in bigezione con* $\mathbb{N}$ *(* $r+n \to n$*) ed iniettiva in quanto notiamo che* $\psi(r)$ *è un insieme con minimo* r *da cui se* $\psi(r) = \psi(s)$ *allora i 2 insiemi avranno lo stesso minimo da cui* $r = s$*.*
Da ciò segue che $\left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| \ge c$*, mostriamo l'altra disuguaglianza e concludiamo con Cantor-Bernstain.*
Sia

$$\Gamma : [\mathbb{R}]^{\aleph_0} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

definita come segue sia A *un insieme numerabile di* $\mathbb{R}$ *dunque esiste* $g : \mathbb{N} \to A$ *bigezione, estendiamo* g *a* $\overline{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *(semplicemente aumentando il codominio). Poniamo* $\Gamma(A) = \overline{f}$*.*
Tale mappa è iniettiva in quanto notiamo che $Im(\Gamma(A)) = A$*; se* $\Gamma(A) = \Gamma(B)$ *allora le 2 funzioni avranno la stessa immagine da cui*

$$A = Im(\Gamma(A)) = Im(\Gamma(B) = B$$

dunque abbiamo $\left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| \le \left|\mathbb{R}^N\right| = c$

Esercizio 5.10. $\left|[\mathbb{R}]^{<\aleph_0}\right| = c$
Dimostrazione.
Chiaramente $[\mathbb{R}]^{\aleph_0} \subset [\mathbb{R}]^{<\aleph_0}$ *da cui*

$$c = \left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| \le \left|[\mathbb{R}]^{<\aleph_0}\right|$$

Mostriamo l'altra disuguaglianza e concludiamo per Cantor-Bernstain
Sia

$$\Gamma : [\mathbb{R}]^{<\aleph_0} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

definita come segue: sia $A \subset \mathbb{R}$

- *Se* $|A| = \aleph_0$ *allora* $\exists f : \mathbb{N} \to A$ *bigezione, estendiamo tale funzione a* $\overline{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *"aumentando" il codominio.*
  Notiamo che $Im(\overline{f}) = A$

- *Se* $|A| = s \in \mathbb{N}$ *allora* $\exists g : \{1, \dots, s\} \to A$ *bigezione.*
  Andiamo a definire $f : \mathbb{N} \to A$ *nel modo seguente*

$$f(i) = \begin{cases} g(i) \ \textit{se } i \in \{1, \dots, s\} \\ g(1) \ \textit{se } i > s \end{cases}$$

  Estendiamo f *a* $\overline{f} : \mathbb{N} \to A$ *come sopra.*
  Notiamo che anche in questo caso $Im(\overline{f}) = A$

Poniamo $\Gamma(A) = \overline{f}$.
Γ *è iniettiva in quanto se* $\Gamma(A) = \Gamma(B)$ *allora necessariamente avranno la stessa immagine da cui*

$$A = Im(\Gamma(A)) = Im(\Gamma(B)) = B$$

dunque dall'iniettività segue che

$$\left|[\mathbb{R}]^{<\aleph_0}\right| \leq \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = c$$

Esercizio 5.11. *(A.C)Se* $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ *è una* I*-sequenza di insiemi dove* $|A_i| \leq c$ *e* $|I| \leq c$ *allora*

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq c$$

Dimostrazione.
Essendo $|A_i| \leq c$ *si ha che esiste* $\psi_i : A_i \to \mathbb{R}$ *iniettiva.*
Dall'assioma della scelta si dimostra l'esistenza di $\Psi = (\psi_i)_{i \in I}$.
Poniamo $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ *allora per l'assioma della scelta si ha che la famiglia* $\mathfrak{F} = (F_a)_{a \in A}$ *dove* $F_a = \{j \in I \mid a \in A_j\}$ *ha un selettore* Z.
Poniamo i_a *l'unico elemento di* $Z \cap F_a$
Definiamo la funzione

$$\Gamma : A \to I \times \mathbb{R} \quad \Gamma(a) = (i_a, \psi_{i_a}(a))$$

Mostriamo che tale funzione è iniettiva se $\Gamma(a) = \Gamma(b) = (c, d)$ *allora per definizione di* Γ *si avrà* $\psi_c(a) = \psi_c(b)$ *dunque* $a = b$ *essendo la funzione* ψ_c *iniettiva.*
Abbiamo dunque

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq |I \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

6 Lezione del 12 marzo

Esercizio 6.1. *(A.C.) Se* $A \subseteq B$ *con* $|A| < |B|$ *allora* $|B \setminus A| = |B|$ *(B è infinito)*
Dimostrazione.
Vista ad esercitazione

Esercizio 6.2. *(A.C.) Sia* $\langle A_i \,| i \in I\rangle$ *dove* $|I|\,, |A_i| \leq c$

1. *Se* $\exists i_0 \in I$ *con* $|A_{i_0}| = c$ *allora* $\left|\bigcup_{j\in I} A_j\right| = c$

2. *Se* $A_i \neq \emptyset$, $|I| = c$ *e* $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ *se* $i \neq j$ *allora* $\left|\bigcup_{i\in i} A_i\right| = c$

Dimostrazione.
Nell'esercizio precedente abbiamo mostrato che vale $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = c$ *dunque per Cantor-Bernstain basta provare l'altra disuguaglianza*

1. *Poichè* $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$ *allora si ha*

$$c = |A_{i_0}| \leq \left|\bigcup_{j\in J} A_j\right|$$

   il che conclude la dimostrazione

2. *Dall'assioma della scelta segue che esiste un selettore* S *per la famiglia* $(A_i)_{i\in I}$ *poniamo* s_i *l'unico elemento di* $H \cap A_i$. *Essendo gli insiemi a 2 a 2 disgiunti abbiamo* $s_i \neq s_j$ *se* $i \neq j$ *da cui è ben definita la funzione* $\theta : I \to \bigcup_{i\in I} s_i$ *tale che* $\theta(j) = s_j$ *è una bigezione dunque* $\bigcup_{i\in I} s_i$ *ha cardinalità del continuo.*
   Osserviamo che $\bigcup_{i\in I} s_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ *e dunque con osservazioni analoghe al punto precedente si prova l'altra inclusione*

7 Lezione del 13 marzo

Esercizio 7.1. *Sia* $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, f(n) \neq n\}$*, dimostrare che* $|A| = c$
Dimostrazione.
Chiaramente $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *da cui* $|A| \leq |\mathbb{N}|^{\mathbb{N}} = c$
Mostriamo l'altra disuguaglianza e poi concludiamo con Cantor-Bernstain.
Andiamo a definire una funzione $\psi : 2^{\mathbb{N}} \to A$.
Sia $\langle c_i \,|\, c_i \in \{0,1\}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ *allora definiamo* $\psi(\langle c_1\rangle) = f$ *come segue:*

$$f(n) = \begin{cases} c_1 + 2 \ se\ n = 1 \\ c_2 + 3 \ se\ n = 2 \\ c_n + 1 \ se\ n > 2 \end{cases}$$

Osserviamo che ψ *è ben definita in quanto* $f(n) > n$ *dunque* $f(n) \neq n$.
Inoltre è iniettiva, se $\langle c_i\rangle$, $\langle d_i\rangle \in 2^{\mathbb{N}}$ *sono distinte allora esiste* n_0 *tale che* $d_{n_0} \neq c_{n_0}$.
Supponiamo, senza perdere di generalità, che $d_{n_0} = 1$ *e* $c_{n_0} = 0$ *dunque*

$$\psi(\langle d_i\rangle)(n_0) = \begin{cases} 3 \ se\ n_0 = 1 \\ 4 \ se\ n_0 = 2 \\ 2 \ se\ n_0 > 2 \end{cases} \qquad \psi(\langle c_i\rangle)(n_0) = \begin{cases} 2 \ se\ n_0 = 1 \\ 3 \ se\ n_0 = 2 \\ 1 \ se\ n_0 > 2 \end{cases}$$

Osserviamo che in tutti i 3 *casi le 2 funzioni assumono valori diversi in* n_0.
Dall'iniettività segue $|A| \geq \left|2^{\mathbb{N}}\right| = c$.

Esercizio 7.2. *Sia* $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, f \text{ illimitata}\}$*, dimostrare che* $|A| = c$
Dimostrazione.
Chiaramente $A \subseteq \mathbb{N}^N$ *da cui* $|A| \leq |N^n| = c$.
Mostriamo che $(0,1)$ *è equipotente a* $\mathbb{R}$*, ovviamente* $|(0,1)| \leq c$.
Consideriamo $\mathbb{R} \to (0,1)$ *con* $r \to \frac{2}{\pi}\tan r + 1$ *tale funzione è iniettiva essendo iniettiva la tangente, da cui* $c \leq |(0,1)|$*. L'equipotenza segue da Cantor-Bernstain.*

Consideriamo la funzione $\psi : (0,1) \to A$ *definita nel seguente modo.*
Sia $r \in (0,1)$ *allora* r *si scrive in modo unico come* $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^{-i}$*, dove* $0 \leq b_i \leq 9$.
Definiamo $\psi(r) = \langle a_i 10^i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$.
Tale funzione è ben definita in quanto la successione $\psi(r)$ *è illimitata superiormente (fissato* $M \in \mathbb{R}$ *allora* $a_n \geq M$ *per* $n \geq \lfloor \log_{10} M \rfloor$*).*
ψ *è iniettiva, se* 2 *numeri reali hanno come immagine la stessa successione, hanno la stessa scrittura in base* 10*, dunque sono uguali*

Esercizio 7.3. *Sia* $B = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, f \text{ limitata}\}$*. Calcolare* $|B|$
Chiaramente $B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *da cui* $|B| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = c$.
Sia $\psi : (0,1) \to \mathbb{R}$ *definita nel seguente modo:*
sia $r \in \mathbb{R}$ *dunque* r *si scrive in modo unico come* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} b_i 10^{-1}$ *con* $0 \leq b_i \leq 9$.
Definiamo $\psi(r) = \langle b_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$
Tale funzione è ben definita essendo la successione limitata inferiormente da 0 *e superiormente da* 9.
ψ *è iniettiva in quanto se 2 numeri hanno la stessa immagine, hanno la stessa scrittura in base* 10 *dunque sono uguali*

8 Lezione del 17 marzo

Esercizio 8.1. *Gli aperti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità del continuo.*
Dimostrazione.
Sia A l'insieme degli aperti di $\mathbb{R}^n$.
La funzione $\mathbb{R} \to A$ che associa a r l'insieme $(r-1, r+1)^n$ è una funzione iniettiva, da cui $|A| \geq c$
Da fatti topologici sappiamo che $\mathbb{R}^n$ è a base numerabile, dunque gli aperti devono appartenere alle parti di un insieme numerabile, poichè $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$ si conclude con Cantor-Bernstain

Parte II.

9 Lezione del 12 marzo

9.1 Teoria Assiomatica degli insiemi

Esercizio 9.1. *A partire dagli assiomi dati (1-6) dimostrare che*

1. *Se R è una relazione binaria, allora esistono $dom(R)$ e $Imm(R)$*
2. *Se $\equiv$ è una relazione di equivalenza su A, allora esiste l'insieme quoziente*
3. *$\forall A\ \forall B$ esiste $Fun(A, B)$*
4. *Data la sequenza $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ esiste $\prod_{i\in I} A_i$*

Dimostrazione.

1. $$domR = \{x \in \cup \cup R \mid \exists C \in R\ \forall y \in C\ x \in y\}$$

   che è un insieme per separazione: $\cup \cup R$ è un insieme per l'assiome dell'unione.
   Mostriamo che è una buona definizione
   R è un insieme di coppie ordinate, il dominio di R è formato da tutte le prime componenti delle coppie che appartengono ad R.
   Dalla definizione di coppia di Kuratowski, data una coppia C, la prima componente di C è l'unico elemento che appartiene a tutti gli elementi di C.
   Basta dunque provare che $\bigcup\bigcup R$ contiene tutti e soli gli elementi che sono prima o seconda componente di una coppia di R
   Per ogni coppia $(x, y) \in R$ allora $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in R$ dunque $\{x\}, \{x, y\} \in \cup R$ e di conseguenza $x, y \in \cup \cup R$.
   Similmente possiamo definire l'immagine di R, essendo l'insieme delle seconde componenti abbiamo

   $$Imm(R) = \{y \in \cup \cup R \mid\ \exists x \in dom(R)\ \{x, y\} \in \cup R\}$$

   che è un insieme per separazione, $dom(R)$ abbiamo dimostrato essere un insieme e $\{x, y\}$ è un insieme per l'assioma della coppia

2. *L'insieme quoziente è l'insieme delle classi di equivalenza.*
   x è una classe di equivalenza se $\exists a \in A$ con $\forall t\,(t \in X \longleftrightarrow (a, t) \in\equiv)$ ovvero abbiamo detto che $x = [a]$ dunque

   $$\frac{A}{\equiv} = \{x \in A \mid \exists a \in A \,|\forall t\ (t \in X \longleftrightarrow (a, t) \in\equiv)\}$$

   Tale insieme esiste per estensionalità

3. *D'ora in poi consideriamo questo simbolo $\exists!$ (esiste unico) così definito:*
   se $P(n)$ è un predicato, scriviamo $\exists! n\, P(n)$ al posto di

   $$\exists n\, P(n)\ \wedge \forall m\, (m \neq n \longleftrightarrow \neg P(m))$$

Una funzione $f : A \to B$ è una relazione con dominio A e che sia biunivoca ovvero

$$\forall a \in A \; \exists! b \in B \;\; (a, b) \in f$$

Dopo queste osservazioni, possiamo definire

$$\forall A \; \forall B \; Fun(A, B) = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \,|\, dom(f) = A \;\wedge\; \forall a \in A \; \exists! b \in B \; (a, b) \in f\}$$

che è un insieme per separazione, notiamo che è ben definito (il prodotto cartesiano è un insieme dunque per l'assioma delle parti $\mathcal{P}(A \times B)$ è un insieme, inoltre esiste la coppia ordinata, nel primo punto dell'esercizio abbiamo dimostrato che il dominio di una relazione è un insieme)

4. *Per definizione di I sequenza si ha che la I sequenza è una funzione g con dominio I, per il primo punto $\exists I$ che è un insieme, inoltre per il punto 1 anche $\{A_i\}_{i \in I} = Imm(g)$ è un insieme.*
   Per l'assioma dell'unione $\exists A = \bigcup_{i \in I} A_i$ dunque

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in Fun(I, A) \,|\, \forall i \in I \; f(i) \in g(i)\}$$

che è un insieme per separazione

10 Lezione del 17 marzo

10.1 Numeri naturali

Esercizio 10.1. $0, 1, 2, 3$ *sono a 2 a 2 diversi.*
Se $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ *si ha* $i < j$ *(nel senso informale)* $\Leftrightarrow i \in j$
Dimostrazione.
Ricordiamo come sono stati definiti questi numeri

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{\emptyset\} = \{0\}$$
$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$
$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

0 *è diverso dagli altri numeri, in quanto* 0 *è l'insieme vuoto, mentre* $1, 2, 3$ *contengono l'insieme vuoto, dunque non sono l'insieme vuoto.*
1 *è diverso da* $2, 3$ *in quanto* $1 \notin 1$ *ma* $1 \in 2$ *e* $1 \in 3$.
2 *è diverso da* 3 *in quanto* $2 \notin 2$ *ma* $2 \in 3$.
L'altra parte dell'esercizioe è una semplice verifica

Esercizio 10.2. $\{\{\emptyset\}\}$ *non è un numero naturale*
Dimostrazione.
Per mostrare che non è un numero naturale, osserviamo che $0 = \emptyset$ *è contenuto in ogni numero naturale diverso da* 0.
Dimostriamo quanto abbiamo appena enunciato, ovvero

$$P(n) = \text{“}(n \in \omega \wedge n \neq \emptyset) \to \emptyset \in n''$$

vale per ogni $n \in \omega$ *per induzione.*
Se $n = 0$ *allora* $n \neq \emptyset$ *è falsa dunque* $P(0)$ *vera a vuoto.*
Mostriamo che $P(n) \to P(\hat{n})$.
Se $\hat{n} = n \cup \{n\} \neq \emptyset$ *allora si possono verificare 2 ipotesi*

- $n \neq \emptyset$, *dunque per ipotesi induttiva si ha* $\emptyset \in n$.
  Ora $n \subset \hat{n}$ *dunque* $\emptyset \in \hat{n}$
- *Se* $n = \emptyset$ *allora* $\hat{n} = \{\emptyset\}$ *dunque* $\emptyset \in \hat{n}$

Esercizio 10.3. $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ *non è un numero naturale.*
Dimostrazione.
Se x, y sono naturali allora $x \in y$ implica $\hat{x} \in \hat{y}$.
Supponiamo per assurdo che y sia naturale, ora $x = 0 = \emptyset \in y$ dunque dalla proprietà sopra richiamata si ha

$$\hat{x} = \{\emptyset\} \in \hat{y} = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}$$

il che è assurdo.
Resta da verificare la proprietà sopra enunciata. Sia

$$Q(y) = \text{“}\forall x \in \omega \ (x \in y \to \hat{x} \in \hat{y})''$$

verifichiamo che vale $\forall y \in \omega$ per induzione su y

- *$y = 0$ è vera a vuoto in quanto $x \in \emptyset$ non si verifica mai*
- *Se $\hat{x} \in \hat{y}$ allora ci sono 2 possibilità*
  - *$x \in y$ dunque per ipotesi induttiva $\hat{x} \in \hat{y} \subset \hat{\hat{y}}$*
  - *$x \in \hat{y}$ ovvero $x = y$ dunque $\hat{x} = \hat{y} \subset \hat{\hat{y}}$*

Esercizio 10.4. *Dimostrare le seguenti proprietà per* $n, m \in \omega$

1. $n \in m \Leftrightarrow n \subsetneq m$
2. $\hat{n} \in \hat{m} \to n \in m$
3. $\forall x \; x \in n \to x \in \omega$
4. $n \cap m$ *è un numero naturale e* $n \cap m = \min\{n, m\}$
5. $n \cup m$ *è un numero naturale e* $n \cup m = \max\{n, m\}$
6. $\hat{n}$ *è il successore di* n*, cioè non accade per nessun* m *che* $n < m < \hat{n}$

Dimostrazione.

1. $\to$ *Sia*
$$P(m) = \text{“}\forall n\,(n \in m \;\to\; n \subsetneq m)\text{”}$$
mostriamo che $P(m)$ *vale per ogni* $m \in \omega$.
Passo base: vero a vuoto $n \in \emptyset$ *è falso*
Passo induttivo: supponiamo che $P(m)$ *sia vero.*
Se $n \in \hat{m} = m \cup \{m\}$ *allora si possono verificare 2 casi*
   (a) *Se* $n \in m$ *allora per ipotesi induttiva* $n \subsetneq m \subset \hat{m}$
   (b) *Se* $n \in \{m\}$ *allora* $n = m$ *da cui* $n = m \subsetneq \hat{m}$

   $\leftarrow$ *Sia*
$$Q(m) = \text{“}\forall n\,(n \subsetneq m \;\to\; n \in m)\text{”}$$
mostriamo che $Q(m)$ *è vera per* $m \in \omega$ *mediante l'induzione.*
Passo base: vero a vuoto.
Passo induttivo: supponiamo $Q(m)$ *sia vero.*
Se $n \subsetneq \hat{m} = m \cup \{m\}$ *allora si possono verificare 2 casi*
   (a) $\{m\} \notin n$ *allora* $n \subsetneq m$ *da cui per ipotesi induttiva* $n \in m \subset \hat{m}$
   (b) $\{m\} \in n$ *allora* $(n \setminus \{m\}) \subsetneq m$ *da cui per ipotesi induttiva* $(n \setminus \{m\}) \in m$ *dunque*
$$n = (n \setminus \{m\}) \cup \{m\} \in m \cup \{m\} = \hat{m}$$

2. *Sia*
$$P(m) = \text{“}\forall n\,(\hat{n} \in \hat{m} \;\to\; n \in m)\text{”}$$
mostriamo che $P(m)$ *è vera per* $m \in \omega$ *mediante l'induzione.*
Passo base: se $\hat{n} \in \hat{0}$ *allora* $\hat{n} \in 1$ *dunque* $\hat{n} = 0$ *il che è falso (0 non è successore di nessun numero), dunque il passo base è vero d'ufficio.*
Passo induttiva: supponiamo $P(m)$ *vero.*
Se $\hat{n} \in \hat{\hat{m}} = \hat{m} \cup \{\hat{m}\}$ *allora si possono verificare 2 casi*
   (a) *Se* $\hat{n} \in \hat{m}$ *allora per ipotesi induttiva* $n \in m \subset \hat{m}$
   (b) *Se* $\hat{n} \in \{\hat{m}\}$ *allora* $\hat{n} = \hat{m}$*, ora* $n \in \hat{n}$ *dunque, per estensionalità* $n \in m$

3. *Sia*

$$P(n) = \text{“}\forall x\,(x \in n \;\to\; x \in \omega)\text{''}$$

mostriamo che $P(n)$ *è vera per qualsiasi* $n \in \omega$ *per induzione su* n
Passo base: vero a vuoto
Passo induttivo: supponiamo $P(n)$ *mostriamo* $P(\hat{n})$
Se $x \in \hat{n}$ *allora si possono verificare 2 casi*

   (a) *Se* $x \in n$ *allora per ipotesi induttiva* $x \in \omega$
   (b) *Se* $x \in \{n\}$ *allora* $x = n$*, ma* $n \in \omega$ *per ipotesi*

4. *Senza perdere di generalità sia* $n < m$ *dunque per come abbiamo definito la relazione di minore su* ω *si ha* $n \in m$ *da cui* $n \cap m = n$ *che è un numero naturale*

5. *Senza perdere di generalità sia* $n < m$ *dunque per come abbiamo definito la relazione di minore su* ω *si ha* $n \in m$ *da cui* $n \cup m = m$ *che è un numero naturale*

6. *Supponiamo per assurdo che* $\exists m \in \omega\,, n \in m \in \hat{n}$*.*
Dal punto 1 di questo esercizio segue che $n \subsetneqq m$ *dunque esiste* $A \neq \emptyset$ *con*

$$m = n \cup A$$

tale che $A \cap n \neq \emptyset$ *(se* $n \subseteq m$ *allora* $\forall s \in n\; s \in m$ *ma* $n \neq m$ *dunque esiste* $k \in m$ *con* $k \notin n$*).*
Poichè $m \in \hat{n} = n \cup \{n\}$ *allora* $m \cup A \subsetneqq n \cup \{n\}$ *da cui*

$$A = m \setminus n \subsetneqq \hat{n} \setminus A = \{n\}$$

, dunque $A \subsetneqq \{n\}$ *ovvero* $A = \emptyset$*, il che è assurdo in quanto avevamo supposto* $A \neq \emptyset$

11 Lezione del 19 marzo

11.1 Numeri naturali

Esercizio 11.1. *Mostrare che l'induzione usuale e l'induzione "forte" sono equivalenti.*
Dimostrazione.
Chiaramente le ipotesi dell'induzione "forte" soddisfano le ipotesi dell'induzione usuale.

Mostriamo che vale anche l'altra implicazione.
A lezione abbiamo visto che l'induzione "forte" implica il principio del minimo, dunque, se mostriamo che il principio del minimo implica l'induzione usuale abbiamo concluso.
Sia $P(x)$ una proprietà, supponiamo che $P(x)$ soddisfi le ipotesi dell'induzione:

$$P(0) \text{ e se } x \neq 0 \quad P(x) \to P(x+1)$$

e mostriamo che la propietà vale $\forall x \in \omega$.
Sia $\Gamma = \{x \in \omega \mid \neq P(x)\}$ e supponiamo per assurdo che tale insieme non sia vuoto, dunque per il principio del minimo $\exists \gamma = \min \Gamma$.
Poichè $P(0)$ si ha $\gamma \neq 0$, dunque γ è successore di un numero $\alpha \in \omega$.
Ora poichè $\gamma = \hat{\alpha}$ si ha $\alpha < \gamma$ dunque per definizione di γ si ha $P(\alpha)$ e dunque per l'ipotesi induttiva $P(\alpha + 1)$ ovvero $P(\gamma)$ il che è assurdo, in quanto $\gamma \in \Gamma$

Esercizio 11.2. *Se $\mathfrak{F}$ è una famiglia di funzioni a 2 a 2 compatibili allora $F = \bigcup \mathfrak{F}$ è una funzione e $dom(F) = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} dom(f)$*
Dimostrazione.
Per l'assioma dell'unione F è un insieme. Tale insieme è formato da coppie ordinate (infatti dalla definizione di unione di famiglie: se $t \in F$ allora $\exists f \in \mathfrak{F}$ con $t \in f$ e poichè f è una funzione t è una coppia ordinata).
Quanto abbiamo osservato sopra, ci porta adire che F è una relazione binaria, resta da provare che è biunivoca, cioè

$$(a, b), (a, b') \in F \quad \to \quad b = b'$$

Supponiamo per assurdo $b \neq b'$.
Dalla definizione di unione di famiglia

$$(a, b) \in F \quad \to \quad \exists f_1 \in \mathfrak{F} \quad (a, b) \in f_1 \quad \to \quad a \in dom(f_1)$$

$$(a, b') \in F \quad \to \quad \exists f_2 \in \mathfrak{F} \quad (a, b') \in f_2 \quad \to \quad a \in dom(f_2)$$

Poichè f_1, f_2 sono relazioni binarie biunivoche deve accadere che $f_1 \neq f_2$.
Ora $a \in dom(f_1) \cap dom(f_2)$ da cui essendo le due funzioni componibili $b = f_1(a) = f_2(a) = b'$ il che è assurdo.

Mostriamo ora chi è il dominio di F (che esiste in quanto abbiamo provato che F è una funzione e che il dominio di una relazione è un insieme).
Se $a \in dom(F)$ allora per definizione di dominio $\exists b$ con $(a, b) \in F$.
Ora per definizione di F $\exists f \in F$ con $(a, b) \in f$, da cui $a \in dom(f)$.
Abbiamo mostrato che

$$dom(F) \subseteq \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} dom(f)$$

Andiamo a mostrare l'altro contenimento.
Sia $a \in \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} dom(f)$ *allora per definizione di unione* $\exists f \in \mathfrak{F}$ *con* $a \in dom(f)$ *e per definizione di dominio* $\exists b$ *con* $(a, b) \in f$.
Ora $(a, b) \in F$ *da cui* $a \in domF$

Esercizio 11.3. *Sia* A *un insieme,* $a \in A$ *e* $g : \omega \times A \to A$ *una funzione.*
ψ *è un'approssimazione finita se*

$$\psi : k + 1 \to A$$

dove k *numero naturale e*

$$\begin{cases} \psi(0) = a \\ \psi(n+1) = g(n, \psi(n)) \end{cases}$$

Mostrare che

$$\mathfrak{F} = \{\varphi \,|\, \varphi \text{ è } A.F\}$$

è un insieme
Dimostrazione.

$$\mathfrak{F} = \left\{ \psi \in \mathcal{P}(\omega \times A) \;\middle|\; \begin{cases} \exists k \in \omega \quad dom(\psi) = k + 1 \\ \psi(0) = a \\ \forall n \in k \quad \psi(n+1) = g(n, \psi(n)) \end{cases} \right\}$$

tale insieme esiste per separazione.

12 Lezione del 22 marzo

Esercizio 12.1. *Trovare* ***esplicitamente*** *una bigezione* $\psi : [0,1] \to (0,1)$
Dimostrazione.
Ripercorriamo la dimostrazione del teorema di Cantor-Bernstein.
$|[0,1]| = \left|\left[0, \frac{1}{2}\right]\right|$ *dove la biezione è data da*

$$\psi : [0,1] \to \left[0, \frac{1}{2}\right] \qquad a \to \frac{a}{2}$$

Per il teorema di ricorsione numerabile, esiste la successione $\langle E_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ *dove*

$$E_0 = \psi[0,1]$$

$$E_{n+1} = \psi[E_n]$$

dunque

$$E_n = \left\{0, \frac{1}{2^{n+1}}\right\}$$

sia

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{1\} \cup \left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

Sia

$$\phi : [0,1] \to (0,1) \quad \phi(a) = \begin{cases} \psi(a) \ se \ a \in \{1\} \cup E \\ a \ se \ a \notin \{1\} \cup E = (0,1) \setminus E \end{cases}$$

Tale funzione è iniettiva in quanto

$$\phi = \psi_{|\{1\} \cup E} \sqcup id_{|(0,1) \setminus E}$$

ovvero è unione disgiunta di funzioni iniettiva.
Mostriamo che ϕ *è suriettiva in quanto*

$$Imm(\psi_{|\{1\} \cup E}) \cup Imm(id_{|(0,1) \setminus E}) = (0,1)$$

Possiamo esplicitare ancora di più ϕ *come segue*

$$\phi : [0,1] \to (0,1) \quad \phi(a) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} \ se \ a = \frac{1}{2^n} \ dove \ n \in \mathbb{N}_0 \\ a \ se \ a \neq \frac{1}{2^n} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

13 Lezione del 24 marzo

Esercizio 13.1. .

1. $X = \bigcup \mathcal{P}(X)$
2. $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$
3. $\bigcup\bigcup \mathcal{P}(X) \in \mathcal{P}\left(\bigcup X\right)$
4. *A partire dagli assiomi dimostrare che esiste X allora esiste $\{\mathcal{P}(x)\,|x \in X\}$*
5. *Per quali $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$*

Dimostrazione.
È utile ricordare queste definizioni:

$$B = \mathcal{P}(A) \qquad \forall t\,(t \in B \quad \Leftrightarrow \quad t \subseteq A)$$

$$B = \bigcup \mathfrak{F} \qquad \forall t\,(t \in B \quad \Leftrightarrow \quad \exists F \in \mathfrak{F} \quad t \in F)$$

1. *Mostriamo che valgono entrambe i contenimenti.*
   Sia $x \in X$ allora poichè $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ e $x \in \{x\}$ allora $x \in \bigcup \mathcal{P}(X)$.
   Abbiamo provato, dunque, $X \subseteq \bigcup \mathcal{P}(X)$, andiamo a mostrare l'altro contenimento.
   Sia $x \in \bigcup \mathcal{P}(X)$ allora $\exists Y \in \mathcal{P}(X)$ (cioè $Y \subseteq X$) con $x \in Y$.
   Ora poichè $x \in Y \subseteq X$ si ha $x \in X$ ($A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall t\,(t \in A \quad \rightarrow \quad t \in B)$)

2. $$X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X)) \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}(\bigcup X) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t\,(t \in X \quad \rightarrow \quad t \subseteq \bigcup X) \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad \forall t\,(t \in X \quad \rightarrow \quad (\forall\,\alpha\,(\alpha \in t \quad \rightarrow \quad \alpha \in \bigcup X))$$

   Ora $\alpha \in \bigcup X$ se $\exists Y \in X$ con $\alpha \in Y$, quest'ultima condizione è verificata per $Y = t$ dunque sono vere tutte le forme equivalenti ed in particolare la tesi.

3. $$\bigcup\bigcup \mathcal{P}(X) \in \mathcal{P}(\bigcup X) \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup\bigcup \mathcal{P}(X) \subseteq \bigcup X \quad \Leftrightarrow \quad \forall y\,\left(y \in \bigcup\bigcup \mathcal{P}(X) \quad \rightarrow \quad y \in \bigcup X\right)$$

   Ora $y \in \bigcup\bigcup \mathcal{P}(X)$ se $\exists H \in \bigcup \mathcal{P}(X)$ con $y \in H$ ovvero se $\exists K \in \mathcal{P}(X)$ (cioè $K \subseteq X$) con $y \in H \in K$.
   Ora poichè $K \subseteq X$ allora si ha $H \in X$ ($\forall t \in K\ t \in X$) dunque $y \in \bigcup X$ (in quanto $\exists H \in X$ con $y \in H$)

4. *Mostriamo che fissato $x \in X$ si ha*

   $$\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\bigcup X\right)\right)$$

   tale appartenenza è vera se e solo se

   $$\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup X\right) \quad \Leftrightarrow \quad \forall y\,\left(y \in \mathcal{P}(x) \rightarrow y \in \mathcal{P}\left(\bigcup X\right)\right)$$

   Ora

   $$y \in \mathcal{P}(x) \quad \Leftrightarrow \quad y \subseteq x \quad \Leftrightarrow \quad \forall z\,(z \in y \rightarrow z \in x)$$

Ora

$$y \in \mathcal{P}\left(\bigcup X\right) \quad \Leftrightarrow \quad y \subseteq \bigcup X \quad \Leftrightarrow \quad \forall z\,(z \in y \to z \in \bigcup X)$$

Concludiamo osservando che $z \in x \quad \to z \in \bigcup X$.
Dunque l'insieme

$$\{\mathcal{P}(x) \,|\, x \in X\} = \left\{y \in \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\bigcup X\right)\right) \,\middle|\, \exists x \in X \; y = \mathcal{P}(x)\right\}$$

che è un insieme per separazione.

5. *Supponiamo che l'uguaglianza valga per un insieme* Y *allora la mappa*

$$id : Y \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \quad y \to y$$

sarebbe una biezione dunque

$$|Y| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))|$$

Ciè è assurdo infatti dal teorema di Cantor si ha

$$|Y| < |\mathcal{P}(X)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))|$$

Esercizio 13.2. *Usando (A.C.) e la ricorsione dimostrare che se A è infinito, allora esiste $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva*

Dimostrazione.

Essendo A infinito, $A \neq \emptyset$ dunque per (A.C.) esiste $F : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ funzione di scelta per l'insieme A (ovvero $F(X) \in X$ per ogni $X \subseteq A$ non vuoto).
Sia $g : \omega \times Seq(A) \to A$ dove $g((n, \{b_m\})) \to F(A \setminus \{b_m\}_{m=0,\dots,n})$.
Osserviamo che g è ben definita in quanto l'insieme $A \setminus \{b_m\}_{m=0,\dots,n}$ è non vuoto (un insieme infinito privato di finiti elementi è infinito dunque non vuoto).
Definiamo per ricorsione numerabile (II forma) una funzione $f : \omega \to A$ che soddisfa $f(0) = F(A)$ e $f(n+1) = g(n, \langle f(i) \rangle_{i=1,\dots,n})$.
Mostriamo che tale funzione è iniettiva.
Siano $n, m \in \omega$ mostriamo che $n \neq m$ allora $f(n) \neq f(m)$, possiamo supporre $n = \max\{n, m\}$ con $n \neq 0$ (se $n = 0$ allora anche $m = 0$ ma avevamo supposto $n \neq m$).
Poichè $n \neq 0$, n è successore di s cioè $n = s + 1$ dunque

$$f(n) = f(s+1) = g(s, \langle f(i) \rangle_{i=0,\dots,s}) = F(A \setminus \{f(0), \dots, f(m), \dots, f(s)\})$$

Essendo F una funzione di scelta si ha

$$F(A \setminus \{f(0), \dots, f(m), \dots, f(s)\}) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(m), \dots, f(s)\} \subseteq A \setminus \{f(m)\}$$

dunque $f(n) \in A \setminus \{f(m)\}$ da cui in particolare $f(n) \neq f(m)$

13.1 Insiemi finiti

Esercizio 13.3. *Se A e B sono finiti, allora anche $A \cup B$ è finito .*
Dimostrazione.
Non è restrittivo supporre i due insieme disgiunti in quando $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ tale unione è disgiunta e i due insiemi che stiamo unendo sono finiti (a lezione abbiamo provato che sottoinsiemi di insiemi finiti sono finiti)

$$P(n) = \text{“}\forall A \ \ |A| = n \ \forall B \text{ finito } A \cup B \text{ è finito}\text{''}$$

Mostriamo che $P(n)$ è vera per ogni numero naturale, usando l'induzione su n.
Se $n = 0$ allora $A = \emptyset$ da cui $A \cup B = B$ dunque è finito.
Supponiamo che $A \cup B$ è finito per ogni A con $|A| = n$ e per ogni B finito.
Sia $\hat{A}$ con $\left|\hat{A}\right| = \hat{n}$ dunque esiste $\phi : \hat{n} \to \hat{A}$ biezione, da cui $\phi_{|n} : n \to \hat{A} \setminus \{\phi(n)\}$ è una bigezione dunque per ipotesi induttiva per ogni B finito, $\hat{A} \setminus \{f(n)\} \cup B$ è finito da cui esiste $p_B \in w$ e $\psi : p_B \to (\hat{A} \setminus \{f(n)\}) \cup B$ bigezione.
Estendiamo tale funzione a $\tilde{\psi} : \hat{p}_B \to \hat{A} \cup B$ dove $\tilde{\psi}_{|p_B} = \psi$ mentre $\psi(p_b) = f(n)$.
(possiamo assumere che $f(n) \notin B$ in quanto per l'osservazione iniziale non è restrittivo assumere che gli insiemi siano disgiunti) Chiaramente tale funzione è una bigezione dunque $\hat{A} \cup B$ finito.

Esercizio 13.4. *Se A e B sono finiti, allora anche $A \times B$ è finito.*
Dimostrazione.

$$P(n) = \text{“}\forall A \ \ |A| = n \ \forall B \text{ finito} \quad A \times B \text{ è finito}\text{''}$$

Mostriamo che $P(n)$ è vera per ogni numero naturale, usando l'induzione su n.
Se $n = 0$ allora $A = \emptyset$ da cui $A \times B = \emptyset$ dunque è finito.
Supponiamo che $A \times B$ sia finito per ogni A con $|A| = n$ e per ogni B finito.
Sia $\hat{A}$ con $|A| = \hat{n}$ dunque esiste $\phi : \hat{n} \to \hat{A}$ biezione, da cui $\phi_{|n} : n \to \hat{A} \setminus \{\phi(n)\}$ è una bigezione.
Ora per ipotesi induttiva per ogni B finito, $\hat{A} \setminus \{f(n)\} \times B$ è finito.
Basta osservare che $\hat{A} \times B = ((\hat{A} \setminus \{f(n)\}) \times B) \cup \{f(n)\} \times B$ ed inoltre $\{f(n)\} \times B$ è equipotente a B dunque è finito(se $b \to (f(n), b)$ è una ovvia biezione).
Concludiamo osservando che $A \times B$ è unione di 2 insiemi finiti dunque è finito.

Esercizio 13.5. *Se A e B sono finiti, allora anche $Fun(A,B)$ è finito.*
Dimostrazione.
Mostriamo prima questi 2 risultati di carattere generale sulle cardinalità.
Sia $a \in A$, poniamo $\overline{A} = A \setminus \{a\}$ allora

$$|Fun(A,B)| = \left|Fun(\overline{A},B) \times Fun(\{a\},B)\right|$$

La funzione

$$\Gamma : Fun(A,B) \to Fun(\overline{A},B) \times Fun(\{a\},B) \quad f \to \left(f_{|\overline{A}}, f_{|\{a\}}\right)$$

è una ben definita bigezione.
Mostriamo che è iniettiva, se $f,g \in Fun(A,B)$ con $f \neq g$ allora esiste $k \in A$ con $f(k) \neq g(k)$

- *se $k = a$ allora $f_{|\{a\}} \neq g_{|\{a\}}$*
- *se $k \neq a$ allora $f_{|\overline{A}} \neq g_{|\overline{A}}$*

in entrambi i casi $\Gamma(f) \neq \Gamma(g)$.
La suriettività è ovvia, se $f \in Fun(\overline{A},B)$ e $g \in Fun(\{a\},B)$ allora pongo $h = f \cup g$ e $\Gamma(h) = (f,g)$.
Mostriamo ora che $|Fun(\{a\},B)| = |B|$.
Sia

$$\vartheta : Fun(\{a\},B) \to B \qquad f \to f(a)$$

tale funzione è una bigezione:

- *se $f \neq g$ allora $f(a) \neq g(a)$ dunque ϑ è iniettiva*
- *se $b \in B$ definisco $f : \{a\} \to B$ come $f(a) = b$ allora $\vartheta(f) = b$, dunque ϑ è suriettiva.*

Mostriamo ora quanto richiesto

$$P(n) = \text{“}\forall A \ \ |A| = n \ \forall B \text{ finito} \quad Fun(A,B) \text{ è finito ''}$$

Mostriamo tale proprietà per induzione su n.
Per $n = 0$ la condizione è vera a vuoto in quanto $A = \emptyset$.
Supponiamo che $Fun(A,B)$ sia finito per ogni A con $|A| = n$ e per ogni B finito.
Sia A con $|A| = \hat{n}$ dunque esiste una biezione $\alpha : \hat{n} \to A$, sia $a = \alpha(n)$.
Ora $\overline{A} = A \setminus \{a\}$ ha cardinalità n dunque per ogni insieme finito B si ha $Fun(\overline{A},B)$ è finito.
Poichè abbiamo provato che prodotti di insiemi finiti è finito e vale

$$|Fun(A,B)| = \left|Fun(\overline{A},B) \times B\right|$$

abbiamo mostrato il passo induttivo

Esercizio 13.6. *Se A è finito, allora anche $\mathcal{P}(A)$ è finito*
Dimostrazione.
Mostriamo che $|\mathcal{P}(A)| = |Fun(A,2)|$ il che conclude, in quanto abbiamo mostrato che l'insieme delle funzioni tra insiemi finiti è finito.
Sia

$$\chi : \mathcal{P}(A) \to Fun(A,2) \qquad A \to \chi_A$$

dove

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1 \ se\ a \in A \\ 0 \ altrimenti \end{cases}$$

Mostriamo che χ è una bigezione:

- *Mostriamo che è iniettiva.*
  Siano $A, B \in \mathcal{P}(A)$ con $A \neq B$ dunque per estensionalità esiste $a \in A$ con $a \notin B$ da cui $\chi(A)(a) = 1$ mentre $\chi(B)(a) = 0$ da cui $\chi(A) \neq \chi(B)$
- *Sia $f \in Fun(A,2)$, poniamo $B = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ allora $\chi(A) = f$*

Esercizio 13.7. *Se R è una relazione finita, $dom(R)$ e $Imm(R)$ sono finiti*
Dimostrazione.
Sia

$$P(n) : \text{“}\forall R \text{ finita di cardinalità } n \text{ si ha } dom(R) \text{ finito''}$$

Mostriamo la tesi per induzione su $n \in \omega$

- *se $n = 0$ non c'è nulla da dimostrare, $R = \emptyset$ da cui $dom(R) = \emptyset$ (avevamo definito il dominio come $x \in \bigcup\bigcup R$.... ma tale insieme è vuoto)*
- *Supponiamo la proprietà valida per ogni relazione di cardinalità n.*
  Sia R una relazione con $|R| = \hat{n}$ da cui esiste una biezione

  $$\psi : \hat{n} \to R$$

  poniamo $A = \psi(n)$ e $\overline{R} = R \setminus \{A\}$.
  Poichè una relazione è un insieme di coppie ordinate si ha $A = (a,b)$ dunque

  $$dom(R) = dom(\overline{R}) \cup \{a\}$$

  ora unione di insiemi finiti è finito, da cui la tesi

Mostriamo che anche l'immagine è finita in modo del tutto analogo, sia

$$Q(n) : \text{“}\forall R \text{ finita di cardinalità } n \text{ si ha } Imm(R) \text{ finito''}$$

Mostriamo la tesi per induzione su $n \in \omega$

- *se $n = 0$ è vera a vuoto in quanto $dom(R) = \emptyset$ dunque anche $Imm(R) = \emptyset$(se, per assurdo, esiste $b \in Imm(R)$ allora deve esistere $a \in dom(R)$ il che è assurdo essendo il dominio vuoto)*
- *Siano $R, \overline{R}, A$ come sopra.*
  Allora

  $$Imm(R) = Imm(\overline{R}) \cup \{b\}$$

  se $b \in Imm(\overline{R})$ allora $Imm(R) = Imm(\overline{R})$ dunque è finita, altrimenti unione di insiemi finiti è finita.

Esercizio 13.8. *Se $\mathfrak{F}$ è una famiglia finita di insiemi finiti, $\bigcup \mathfrak{F}$ è finita*
Dimostrazione.
Sia

$$P(n) : \text{“}\forall \mathfrak{F} \text{ famiglia di insiemi finiti } \text{ con } |\mathfrak{F}| = n \quad \bigcup \mathfrak{F} \text{ è finita''}$$

Mostriamo la proprietà per induzione su $n \in \omega$

- *se $n = 0$ allora $\mathfrak{F} = \emptyset$ da cui $\bigcup \mathfrak{F} = \emptyset$ che è finito*
- *Supponiamo che per ogni $\mathfrak{F}$ finita di insiemi finiti tale che $|\mathfrak{F}| = n$ risulti $\bigcup \mathfrak{F}$ finita.*
  Sia $\overline{\mathfrak{F}}$ una famiglia di insiemi finiti tale che $\left|\overline{\mathfrak{F}}\right| = \hat{n}$ dunque $\exists \psi : \hat{n} \to \overline{\mathfrak{F}}$, poniamo $A = \psi(n)$.
  Osserviamo che $\mathfrak{F}' = \overline{\mathfrak{F}} \setminus A$ è una famiglia finita di insiemi finiti di cardinalità n da cui $\bigcup \mathfrak{F}'$ è finita.
  Concludiamo osservando che
  $$\bigcup \overline{\mathfrak{F}} = \left(\bigcup \mathfrak{F}'\right) \cup A$$
  e notando che unione di 2 insiemi finiti è finita

13.2 Assiomi di Peano

All'inizio di questa sezione, ricordiamo per chiarezza espositiva gli assiomi di Peano

$$(PA1) \quad \forall x \, \forall y \quad (x \neq y \to s(x) \neq s(y))$$

$$(PA2) \quad \forall x \, (x \neq 0 \Leftrightarrow \exists y \; x = s(y))$$

$$(PA3) \quad \forall x \quad x + 0 = x \qquad \forall x \, \forall y \quad x + s(y) = s(x + y)$$

$$(PA4) \quad \forall x \quad x \cdot 0 = 0 \qquad \forall x \, \forall y \quad x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$(PA5)_{II} \quad A \subseteq \mathbb{N} \quad (0 \in A \wedge (\forall x \; x \in A \to s(x) \in A) \to A = \mathbb{N})$$

Esercizio 13.9. *Assumendo PA_{II} dimostrare che $\forall x, y, z$*

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Dimostrazione.
Sia

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall x, y \in \mathbb{N} \quad x + (y + n) = (x + y) + n\}$$

Mostriamo che $0 \in A$

$$x + (y + 0) = x + y = (x + y) + 0$$

Supponiamo che $n \in A$ allora

$$(x + y) + s(n) = s((x + y) + n)$$

ora poichè $n \in A$ si ha $(x + y) + n = x + (y + n)$ da cui

$$(x + y) + s(n) = s(x + (y + n)) = x + s(y + n) = x + (y + s(n))$$

Abbiamo dunque provato che $x \in A$ allora $s(x) \in A$.
Per $PA5_{II}$ si ha $A = \mathbb{N}$ dunque vale la proprietà associativa per la somma

Esercizio 13.10. *Assumendo PA_{II} dimostrare che $\forall x, y$*

$$x + y = y + x$$

Dimostrazione.
Prima del seguente esercizio dimostriamo 2 proprietà che verranno usate in seguito

(i)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 + n = n$$

(da $(PA3)$ si ha solamente $n + 0 = n$).
Sia

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 + n = n\}$$

- $0 \in A$ *in quanto per $(PA3)$ si ha* $0 + 0 = 0$
- *Supponiamo $n \in A$ allora*

$$0 + s(n) = s(0 + n) = s(n + 0) = s(n) = s(n) + 0$$

dove gli uguali rossi derivano da PA3 mentre quello nero deriva dal fatto che $n \in A$.
Abbiamo provato $n \in A$ implica $s(n) \in A$, dunque la tesi

Per $PA5_{II}$ segue che $A = \mathbb{N}$

(ii)

$$\forall n, x \in \mathbb{N} \quad s(x) + n = x + s(n)$$

Sia

$$B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall x \in \mathbb{N} \;\; s(x) + n = x + s(n)\}$$

- $0 \in B$ *in quanto* $s(x) + 0 = s(x)$, *inoltre* $x + s(0) = s(x + 0) = s(x)$
- *Supponiamo $n \in B$ allora*

$$s(x) + s(n) = s(s(x) + n) = s(x + s(n)) = x + s(s(n))$$

dove gli uguali rossi derivano da PA3 mentre quello nero deriva dal fatto che $n \in B$.
Abbiamo provato che $n \in B$ implica $s(n) \in B$

Per $PA5_{II}$ segue che $B = \mathbb{N}$, dunque la tesi

Andiamo ora a dimostrare la proprietà commutativa; sia

$$C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall x \in \mathbb{N} \;\; x + n = n + x\}$$

- $0 \in C$ *in quanto per $(PA3)$ si ha $x + 0 = x$.*
  Ora dalla proprietà (i) si ha $0 + x = x$.
  Abbiamo dunque $0 + x = x + 0 = x$

- *Supponiamo $n \in C$*

$$x + s(n) = s(x + n) = s(n + x) = n + s(x) = s(n) + x$$

dove gli uguali rossi derivando da $PA3$, quello giallo è la proprietà (ii), mentre quello nero deriva dal fatto che $n \in C$.
Abbiamo provato che $n \in C$ implica $s(n) \in C$

Per $PA5_{II}$ segue che $C = \mathbb{N}$ da cui la tesi

Esercizio 13.11. *Assumendo PA_{II} dimostrare che $\forall x, y$*

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Dimostrazione.
Prima del seguente esercizio dimostriamo 2 proprietà che verranno usate in seguito

(i)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \cdot n = 0$$

(da $(PA4)$ si ha solamente $n \cdot 0 = 0$).
Sia

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 \cdot n = 0\}$$

- $0 \in A$ *in quanto per $(PA4)$ si ha* $0 \cdot 0 = 0$
- *Supponiamo $n \in A$ allora*

  $$0 \cdot s(n) = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0$$

  dove gli uguali rossi derivano da $(PA4)$ mentre quello nero deriva dal fatto che $n \in A$.
  Abbiamo provato $n \in A$ implica $s(n) \in A$

Per $PA5_{II}$ segue che $A = \mathbb{N}$

(ii)

$$\forall n, x \in \mathbb{N} \quad s(x) \cdot n = x \cdot n + n$$

Sia

$$B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall x \in \mathbb{N} \;\; s(x) \cdot n = x \cdot n + n\}$$

- $0 \in B$ *in quanto da $(PA4)$ si ha $s(x) \cdot 0 = 0$. Ora $0 = x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$*
- *Supponiamo $n \in B$ allora*

  $$s(x) \cdot s(n) = s(x) \cdot n + s(x) = xn + n + s(x) = x \cdot n + s(n) + x = x \cdot n + x + s(n) = x \cdot s(n) + s(n)$$

  dove l' uguale rosso derivano da $(PA4)$ mentre quello nero deriva dal fatto che $n \in B$, quello giallo dalla proprietà (ii) dell'esercizio precedente, quello blu è la proprietà commutativa della somma Abbiamo provato che $n \in B$ implica $s(n) \in B$

Per $PA5_{II}$ segue che $B = \mathbb{N}$, dunque la tesi

Andiamo ora a dimostrare la proprietà commutativa.
Sia

$$C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall x \in \mathbb{N} \;\; x \cdot n = n \cdot x\}$$

- $0 \in C$ *in quanto da $(PA4)$ si ha $x \cdot 0 = 0$.*
  Ora dalla proprietà (i) otteniamo $0 \cdot x = 0$.
  Abbiamo provato che $0 \cdot x = x \cdot 0$

- *Supponiamo $n \in C$*

  $$x \cdot s(n) = x \cdot n + x = n \cdot x + x = s(n) \cdot x$$

  dove gli uguali rossi derivando da $(PA4)$, quello giallo è la proprietà (ii), mentre quello nero deriva dal fatto che $n \in C$.
  Abbiamo provato che $n \in C$ implica $s(n) \in C$

Per $PA5_{II}$ segue che $C = \mathbb{N}$ da cui la tesi.

Esercizio 13.12. *Assumendo PA_{II} dimostrare che* $\forall x, y, z$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Dimostrazione.
Sia

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall x, y \in \mathbb{N} \;\; x \cdot (y + n) = x \cdot y + x \cdot n\}$$

- $0 \in A$ *in quanto da* $(PA3)$ *si ha* $x \cdot (y + 0) = x \cdot y$.
  Inoltre $x \cdot y + x \cdot 0 = x \cdot y + 0 = x \cdot y$
- *se* $n \in A$ *allora*

  $$x \cdot (y + s(n)) = x \cdot s(y + n) = x \cdot (y + n) + x = x \cdot y + x \cdot n + x = x \cdot y + x + x \cdot n = x \cdot y + x \cdot s(n)$$

  dove l'uguale blu deriva da $(PA3)$, *quelli rosso da* $(PA4)$, *quello nero da* $n \in A$ *e quello giallo deriva dalla proprietà commutativa della somma.*
  Abbiamo provato che $n \in A$ *allora* $s(n) \in A$

Per $PA5_{II}$ *segue che* $A = \mathbb{N}$ *da cui la tesi.*

Esercizio 13.13. *Assumendo PA_{II} dimostrare che* $\forall x, y, z$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Dimostrazione.
Sia

$$A = \{n \in N \,|\, \forall x, y \in \mathbb{N}, \;\; x \cdot (y \cdot n) = (x \cdot y) \cdot n\}$$

- $0 \in A$ *in quanto* $x \cdot (y \cdot 0) = x \cdot 0 = 0$.
  Inoltre da $(PA4)$ *si ha* $(x \cdot y) \cdot 0 = 0$.
  Dunque $(x \cdot y) \cdot 0 = x \cdot (y \cdot z)$
- *Se* $n \in A$ *allora*

  $$x \cdot (y \cdot s(n)) = x \cdot (y \cdot n + y) = x \cdot (y \cdot n) + x \cdot y = (x \cdot y) \cdot n + x \cdot y = (x \cdot y) \cdot s(n)$$

  dove gli uguali rossi derivano da $PA4$, *l'uguale blu è la proprietà distributiva sopra dimostrata, quello nero deriva dal fatto che* $n \in A$
  Abbiamo provato che $n \in A$ *allora* $s(n) \in A$

Per $PA5_{II}$ *segue che* $A = \mathbb{N}$ *da cui la tesi.*

13.2.1 Struttura d'ordine su $\mathbb{N}$

Esercizio 13.14. *Assumendo PA_{II} si ha $(N, <)$ è totalmente ordinato*
Dimostrazione.
Ricordiamo come abbiamo definito l'ordine su $\mathbb{N}$

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad \exists z \neq 0 \; a + z = b$$

Andiamo a mostrare che è un ordine totale, ovvero vale la proprietà transitiva e la tricotomica forte

- *Supponiamo che $a < b \wedge b < c$.*
  Dalla prima relazione si ha
  $$\exists z \neq 0 \quad a + z = b$$
  Dalla seconda relazione si ha
  $$\exists w \neq 0 \quad b + w = c$$
  dunque usando la proprietà associativa
  $$a + (z + w) = (a + z) + w = b + w = c$$
  Mostriamo che $z + w \neq 0$: essendo $w \neq 0$ esiste x con $s(x) = w$ di conseguenza $s(z+x) = z+s(x) = z+w$ dunque $z+w$ è successore di un numero naturale e per $(PA2)$ non può essero 0.
  Abbiamo provato che $\exists h = z + w \neq 0$ con $a + h = c$ dunque $a < c$

- *Mostriamo che vale la tricotomia forte.Sia*
  $$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall y \in \mathbb{N} \text{ vale uno e solo delle seguenti possibilità } y = n,\; y < n,\; n < y)\}$$

- *Mostriamo che $0 \in A$. Sia $y \in \mathbb{N}$:*
  - *se $y = 0$ allora si ha $0 = y$*
  - *se $y \neq 0$ allora può accadere solamente $0 < y$.*
    Da $(PA3)$ e dalla proprietà commutativa della somma si ha $0+y = y$ dunque essendo $y \neq 0$ segue $0 < y$.
    Mostriamo che non vale $y < 0$.
    Supponiamo per assurdo $y < 0$ dunque esiste $\alpha \neq 0$ con $y + \alpha = 0$.
    Ora essendo $\alpha \neq 0$ esiste β tale che $\alpha = s(\beta)$ dunque
    $$0 = y + \alpha = y + s(\beta) = s(y + \beta)$$
    il che è assurdo in quanto 0 non è successore di nessun numero per $(PA2)$

- *Sia $n \in A$ e $y \in \mathbb{N}$.*
  Se $y = 0$ allora dal punto precedente sappiamo che $0 < s(n)$ (per $PA2$ si ha $0 \neq s(n)$ per ogni n).
  Supponiamo $y \neq 0$ dunque esiste $x \in \mathbb{N}$ con $y = s(x)$.
  Poichè $n \in A$ può accadere una ed una sola delle seguenti possibilità
  - *$x = n$ da cui $s(x) = s(n)$ ovvero $s(n) = y$*

- $x < n$ *dunque* $\exists \alpha \neq 0$ *con* $x + \alpha = n$ *da cui per commutatività* $\alpha + x = n$. *Applicando il successore e utilizzando la proprietà commutativa si giunge a*

$$s(\alpha + x) = \alpha + s(x) = s(x) + \alpha = y + \alpha = s(n)$$

dunque abbiamo provato che $y < s(n)$

- $n < x$ *dunque* $\exists \alpha \neq 0$ *con* $n + \alpha = x$ *da cui per commutatività* $\alpha + n = x$. *Applicando il successore e utilizzando la proprietà commutativa si giunge a*

$$y = s(x) = s(\alpha + n) = \alpha + s(n) = s(n) + \alpha$$

dunque abbiamo provato che $s(n) < y$

Mostriamo che non possono verificarsi 2 *possibilità differenti*

- *Sia per assurdo* $s(n) = y$ *e* $y < s(n)$.
Ora $y \neq 0$ *altrimenti si avrebbe* $0 = s(n)$ *il che è assurdo per* $(PA2)$.
Poichè $y \neq 0$ *allora* $y = s(x)$, *ora per* $(PA1)$ *poichè* $s(n) = y = s(x)$ *si ha* $n = x$.
Da $s(x) = y < s(n)$ *si ha che* $\exists \alpha \neq 0$ *con* $s(x) + \alpha = s(n)$ *ora usando la proprietà associativa e la commutatività si giunge ad* $s(x + \alpha) = s(n)$, *per* $(PA1)$ $x + \alpha = n$ *dunque* $x < n$.
Abbiamo mostrato che $\exists x$ *tale che* $x = n$ *e* $x < n$, *il che è assurdo per definizione di* A *(*$n \in A$*)*
- *Sia per assurdo* $s(n) = y$ *e* $s(n) < y$.
Ora $y \neq 0$ *altrimenti si avrebbe* $0 = s(n)$ *il che è assurdo per* $(PA2)$.
Poichè $y \neq 0$ *allora* $y = s(x)$, *ora per* $(PA1)$ *poichè* $s(n) = y = s(x)$ *si ha* $n = x$.
Da $s(n) < s(x)$ *si ha che* $\exists \alpha \neq 0$ *con* $s(n) + \alpha = s(x)$ *ora usando la proprietà associativa e la commutatività si giunge ad* $s(n + \alpha) = s(x)$ *dunque per* $(PA1)$ *si ha* $n + \alpha = x$ *dunque* $n < x$.
Abbiamo mostrato che $\exists x$ *tale che* $x = n$ *e* $n < x$, *il che è assurdo per definizione di* A *e poichè* $n \in A$
- *Sia per assurdo* $y < s(n)$ *e* $s(n) < y$.
Se $y = 0$ *allora* $0 < s(n)$ *e* $s(n) < 0$, *ma abbiamo mostrato che* $0 \in A$ *dunque non possono verificarsi entrambe le possibilità.*
Sia, dunque $y \neq 0$ *dunque per* $(PA2)$ *esiste* x *con* $s(x) = y$.
Con analoghe osservazioni fatte nei punti precedenti si giunge a $x < n$ *e* $n < x$ *il che è assurdo per definizione di* A *e poichè* $n \in A$

Per $(PA5_{II})$ *la tricotomia forte vale per ogni* $n, y \in \mathbb{N}$

Esercizio 13.15. *Assumendo* PA_{II} *si ha* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

$$x < y \to x + z < y + z$$

Dimostrazione.
$\forall n \in \mathbb{N}$

$$n < x \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \neq 0 \; n + \alpha = x$$

dunque, facendo uso della proprietà associativa e commutativa si ha

$$x + z = (n + \alpha) + z = n + (\alpha + z) = (n + z) + \alpha$$

ovvero $(n + z) + \alpha = x + z$ *il che è la definizione di* $n + z < x + z$

Esercizio 13.16. *Assumendo* PA_{II} *si ha* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

$$z \neq 0 \quad \to \quad (x < y \to x \cdot z < y \cdot z)$$

Dimostrazione.
Sia

$$A = \{z \in \omega \,|\, \forall x, y \in \omega \; (z \neq 0 \, \wedge \, x < y \to x \cdot z < y \cdot z\}$$

- $0 \in A$ *in quanto* $0 \neq 0$ *è vera a vuoto.*
- *Sia* $z \in A$.
  Siano $x, y \in \mathbb{N}$ *con* $x < y$.
  Da $(PA4)$ *si ha*

  $$x \cdot s(z) = x \cdot z + x$$

  $$y \cdot s(z) = x \cdot y + y$$

  Ora poichè $z \in A$ *si ha* $x \cdot z < y \cdot z$
  Applicando la propietà dell'esercizio precedente si ha

  $$x \cdot z + x < y \cdot z + x$$

  ora essendo $x < y$ *esiste* $\alpha \neq 0$ *con* $x + \alpha = y$ *da cui*

  $$(y \cdot z + x) + \alpha = y \cdot z + (x + \alpha) = y \cdot z + y$$

  Abbiamo mostrato che $y \cdot z + x < y \cdot z + y$ *dunque per proprietà transitiva abbiamo*

  $$x \cdot s(z) = x \cdot z + x < y \cdot z + y = y \cdot s(z)$$

  dunque abbiamo mostrato che $z \in A$ *implica* $s(z) \in A$

Per $(PA5_{II})$ *si ha che* $A = \mathbb{N}$ *dunque la tesi*

14 Lezione del 26 marzo

Esercizio 14.1. *Definire somma e prodotto su ω (che rispetti PA_{II}) usando la ricorsione numerabile.*
Dimostrazione.
Sia $g : \omega \times \omega \to \omega$ dove $g(n,m) = s(m) = \hat{m}$.
Sia $\forall a \in \omega$

$$f_a : \omega \to \omega \ \text{dove} \begin{cases} f_a(0) = a \\ f_a(s(n)) = g(n, f_a(m)) \end{cases}$$

tali funzioni esistono uniche per il teorema di ricorsione numerabile.
Andiamo a definire la funzione somma come segue

$$+ : \omega \times \omega \to \omega \quad +(a,b) = f_a(b)$$

Mostriamo che tale definizione è coerente con gli assiomi di Peano.

- *Mostriamo $\forall a \in \omega$ si ha $a + 0 = a$.*
  Ora $+(a,0) = f_a(0) = a$ per definizione di f_a.

- *Mostriamo $\forall a, b \in \omega$ si ha $a + s(n) = s(a+n)$*

  $$+(a, s(n)) = f_a(s(n)) = g(n, f_a(n)) = s(f_a(n)) = s(+(a,n))$$

  Dove abbiamo usato solamente le definizioni di $f_a, g, +$

Andiamo ora a definire il prodotto.
Per ogni $a \in \omega$ definiamo

$$h_a : w \to w \ \text{dove} \begin{cases} h_a(0) = 0 \\ h_a(s(n)) = +(h_a(n), a) \end{cases}$$

tali funzioni esistono e sono uniche per ricorsione numerabile.
Andiamo a definire la funzione prodotto come segue

$$\cdot : \omega \times \omega \to \omega \qquad \cdot(a,b) = h_a(b)$$

Mostriamo che tale definizione è coerente con gli assiomi di Peano.

- *Mostriamo che $\forall a \in w$ si ha $a \cdot 0 = 0$.*
  Ora $\cdot(a,0) = h_a(0) = 0$ per la definizione di h_a

- *Mostriamo che $\forall a, b \in \omega$ si ha $a \cdot s(n) = a \cdot n + a$*

  $$\cdot(a, s(n)) = h_a(s(n)) = +(h_a(n), a) = +(\cdot(a,n), a)$$

  dove abbiamo usato solamente le definizioni di h_a e $\cdot$

14.1 Buoni ordini

Esercizio 14.2. *Se $(A,<)$ e $(B,<)$ sono insiemi totalmente ordinati finiti con $|A| = |B|$ allora sono isomorfi, dunque, ogni insieme totalmente ordinato finito è ben ordinato.*
Dimostrazione.
Andiamo a mostrare che $(A,<) \cong (n,\in)$ dove $n = |A|$.
Per mostrare ciò è utile dimostrare che ogni insieme finito totalmente ordinato ammette massimo, mostriamo ciò per induzione su $n = |A|$.
Sia

$$P(n) = \text{“}\forall (A,<)\ |A| = n \text{ ammette massimo''}$$

Se $n = 1$ allora $A = \{a\}$ dunque $\max(A) = a$.
Supponiamo $P(n)$ vera, sia $(\hat{A},<)$ totalmente ordinato con $\left|\hat{A}\right| = \hat{n}$ dunque esiste una biezione $\psi :\ \hat{n} \to \hat{A}$.
Sia $A = \hat{A} \setminus \{\psi(n)\}$, ora $(A,<)$ è un ordine totale con $|A| = n$ dunque per ipotesi induttiva A ammette massimo β.
Si possono verificare 2 casi

- *se $\beta < \psi(n)$ allora $\max(\hat{A}) = \psi(n)$*
- *se $\psi(n) < \beta$ allora $\max(\hat{A}) = \beta$*

Torniamo alla dimostrazione dell'esercizio.
Mostriamo la proprietà

$$Q(n) = \text{“}\forall (A,<) \text{ totalmente ordinato con } |A| = n\ (A,<) \cong (n,\in)\text{”}$$

per induzione su n

- *se $n = 0$ allora $A = \emptyset$ dunque la proprietà è vera*
- *Supponiamo $Q(n)$ vera.*
  Sia $(\hat{A},<)$ un insieme totalmente ordinato di cardinalità $\hat{n}$, e sia $M = \max(\hat{A})$, poniamo $A = \hat{A} \setminus \{M\}$. Ora per ipotesi induttiva, essendo $(A,<)$ totalmente ordinato e $|A| = n$ si ha che esiste
  $$\psi :\ A \to n$$
  isomorfismo d'ordine
  Estendiamo tale isomorfismo ad un isomorfismo d'ordine $\phi :\ \hat{A} \to \hat{n}$ ponendo $\phi_{|A} = \psi$ e $\phi(M) = n$.
  Tale funzione è davvero un isomorfismo d'ordine in quanto per definizione $M > a$ per ogni $a \in A$ e similmente $n > m$ per ogni $m \in \hat{n}$

Abbiamo dunque mostrato che $(A,<) \cong (n,\in)$ per ogni A con $|A| = n$ dunque

$$(A,<) \cong (n,\in) \cong (B,<)$$

Si conclude in quanto composizioni di isomorfismi è un isomorfismo

Esercizio 14.3. *L'insieme ordinato* $(Fun(\mathbb{N},\mathbb{Z}),<)$ *con l'ordine della minima differenza è separabile.*

Dimostrazione.

Consideriamo l'insieme

$$A = \bigcup_{S \in Seq(\mathbb{Z})} f_S \text{ dove se } S = \langle a_0,\ldots,a_m\rangle \text{ allora } f_S(i) = \begin{cases} a_i \text{ se } i = 0,\ldots,m \\ 0 \text{ se } i > m \end{cases}$$

Tale insieme esiste per separazione in quanto potrebbe essere definito come

$$A = \left\{ f \in Fun(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \;\middle|\; \exists m \in \mathbb{N}\ \exists S \in Seq(\mathbb{Z}) \text{con } S = \langle a_1,\ldots,a_m\rangle\ f(i) = \begin{cases} a_i \text{ se } i = 1,\ldots,m \\ 0 \text{ se } i > m \end{cases} \right\}$$

Ora $|A| = \aleph_0$ *in quanto* $Seq(\mathbb{Z})$ *è numerabile, mostriamo che* A *è denso in* $(Fun(\mathbb{N},Z),<)$.
Siano $f,g \in Fun(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ *con* $f < g$ *dunque esiste* $k = \min\{n \mid f(n) \neq g(n)\}$ *con* $f(k) < g(k)$.
Ora $\mathbb{Z}$ *è senza limiti, dunque esiste* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *con* $\alpha < g(k)$.
Sia $h = f_S$ *dove* $S = \langle g(1),\ldots,g(k),\alpha\rangle$.
Ora $f < h$ *in quanto* $f(i) = h(i)$ *per* $i = 1,\ldots,k-1$ *(in quanto per tali* i $f(i) = g(i) = h(i)$*) mentre* $f(k) < g(k) = h(k)$.
Inoltre $h < g$ *in quanto* $g(i) = h(i)$ *per* $i = 1,\ldots,k$ *(per definizione di* h*) mentre* $\alpha = h(k) < g(k)$.
Dunque A *è un denso numerabile in* $(Fun(\mathbb{N},\mathbb{Z}),<)$ *da cui* $Fun(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ *con l'ordine della minima differenza è separabile*

15 Lezione del 27 marzo

15.1 Tagli di Dedekind

Esercizio 15.1. *$X+Y$ è un taglio, inoltre $\mathbb{Q}_q + \mathbb{Q}_{q'} = \mathbb{Q}_{q+q'}$*
Dimostrazione.

- *$X+Y$ è non banale.*
  - *Mostriamo che $X+Y \neq \emptyset$*
    Essendo $X \neq \emptyset$ si ha $\exists x \in X$, similmente $\exists y \in Y$ dunque $x+y \in X+Y \neq \emptyset$.
  - *Mostriamo che $X+Y \neq \mathbb{Q}$*
    Essendo $X \neq \mathbb{Q}$ si ha $\exists x \in \mathbb{Q}$ con $x \notin X$, similmente $\exists y \in \mathbb{Q}$ con $y \notin Y$.
    Supponiamo, per assurdo, $X+Y=\mathbb{Q}$, in particolare, $x+y \in X+Y$ dunque $x+y = x'+y'$ con $x' \in X$ e $y' \in Y$.
    Essendo $x \notin X$ si ha $x' < x$ (infatti $x \neq x'$ poichè $x' \in X$ e $x \notin X$, inoltre se $x < x'$ per definizione di taglio $x \in X$) similmente $y' < y$ da cui
    $$x+y = x'+y' \wedge x'+y' < x+y$$
    il che è assurdo
- *Mostriamo che $X+Y$ è un segmento iniziale.*
  Supponiamo che $z \in X+Y$ dunque $z = x+y$ con $x \in X$ e $y \in Y$.
  Sia $z' < z$ (dunque $z - z' > 0$), possiamo scrivere
  $$z' = x+y-(z-z') = x-(z-z')+y$$
  ora $z-z' > 0$ dunque $x-(z-z') < x$ da cui essendo X taglio $x' = x-(z-z') \in X$ dunque $z' = x'+y \in X+Y$
- *Mostriamo che $X+Y$ non ha massimo*
  Supponiamo, per assurdo che $z \in X+Y$ sia un massimo, dunque $z = \overline{x}+\overline{y}$ con $\overline{x} \in X$ e $\overline{y} \in Y$
  Ora $\forall x \in X$ si ha $x+\overline{y} \in X+Y$ da cui $x+\overline{y} < \overline{x}+\overline{y}$ dunque $x < \overline{x}$.
  Abbiamo mostrato che $\overline{x}$ è un massimo di X il che è assurdo

Mostriamo che vale l'uguaglianza.
Sia $\alpha \in \mathbb{Q}_q$ e $\beta \in \mathbb{Q}_{q'}$ dunque $\alpha < q$ e $\beta < q'$ da cui $\alpha+\beta < q+q'$.
Abbiamo mostrato che $\mathbb{Q}_q + \mathbb{Q}_{q'} \subseteq \mathbb{Q}_{q+q'}$.
Andiamo a mostrare l'altro contenimento: sia $\delta \in \mathbb{Q}_{q+q'}$ allora $\delta < q+q'$ ovvero $q+q'-\delta > 0$, da cui $\frac{1}{2}(q+q'-\delta) > 0$.
Ora
$$\delta = q - \frac{1}{2}(q+q'-\delta) + q' - \frac{1}{2}(q+q'-\delta)$$
inoltre essendo $\frac{1}{2}(q+q'-\delta) > 0$ si ha $Q = q - \frac{1}{2}(q+q'-\delta) < q$ dunque $Q \in \mathbb{Q}_q$, similmente $Q' = q - \frac{1}{2}(q+q'-\delta) \in \mathbb{Q}_{q'}$.
Abbiamo dunque provato che $\delta = Q + Q' \in \mathbb{Q}_q + \mathbb{Q}_{q'}$

Esercizio 15.2. *$-X$ è un taglio, inoltre $X + (-X) = \mathbb{Q}_0$*
Dimostrazione.

- *Mostriamo che $-X$ non è banale.*
  - *Essendo $X \neq \mathbb{Q}$ esiste $x \in \mathbb{Q}$ con $x \notin X$ dunque $-x \in -X \neq \emptyset$*
  - *Supponiamo $-X = \mathbb{Q}$ allora , $\forall q \in \mathbb{Q}$ si avrà $-q \in -X$ (in quanto $X = \mathbb{Q}$ e $-q \in \mathbb{Q}$) da cui per definizione di $-X$ si avrà $q \notin X$, abbiamo provato che $X = \emptyset$, il che è assurdo, essendo X un taglio*
- *Mostriamo che $-X$ non ha massimo.*
  Se avesse massimo, allora X^C avrebbe minimo, ovvero $X = \mathbb{Q}_q$.
  In questo caso abbiamo definito $-\mathbb{Q}_q = Q_{-q}$ che non ha massimo, essendo un segmento iniziale.
- *Sia $x \in -X$ e $y < x$, dobbiamo provare che $y \in -X$.*
  Poichè $x \in -X$ ne consegue $-x \notin X$, da $y < x$ segue $-x < -y$ dunque $-y \notin X$ (se per assurdo $-y \in X$, essendo X un taglio si avrebbe $-x \in X$).
  Ora essendo $-y \notin X$ allora $y \in -X$

Esercizio 15.3. *Se $X, Y > 0$ allora $X \cdot Y$ è un taglio*
Dimostrazione.
Dalla definizione di $X \cdot Y$ si ha $Q_0 \subseteq X \cdot Y$ da cui $X \cdot Y$ non è vuoto.
Mostriamo che $X \cdot Y \neq \mathbb{Q}$.
Essendo $X, Y > 0$ tagli, si ha che esistono $\overline{x} \in X$ e $\overline{y} \in Y$ tali che

$$0 < x < \overline{x} \quad \forall x \in X$$

$$0 < y < \overline{y} \quad \forall y \in Y$$

in quanto richiedere ciò è equivalente a dire che $X, Y \neq \mathbb{Q}$.
Abbiamo dunque $\forall z \in X \cdot Y$ è della forma $x \cdot y$ con $x \in X$ e $y \in Y$ dunque $z < \overline{x} \cdot \overline{y}$ dunque $\overline{x} \cdot \overline{y} \notin X \cdot Y$ che è dunque diverso da $\mathbb{Q}$.
Mostriamo che $X \cdot Y$ è un segmento iniziale.
Sia $z' < z$ con $z \in X \cdot Y$, dunque $z' < x \cdot y$ con $x \in X$ e $y \in Y$.
Se $z' \leq 0$ ho concluso in quanto $z' \in \mathbb{Q}_{\leq 0} \subseteq X \cdot Y$.
Supponiamo dunque $z' > 0$ ovvero $y > 0$ dunque da $0 < z' < x \cdot y$ si ha $0 \leq z' \cdot y^{-1} < x$.
Ora essendo $x \in X$ e X segmento iniziale si ha $z' \cdot y^{-1} \in X$ da cui

$$z' = (z' \cdot y^{-1}) \cdot y \in X \cdot Y$$

in quanto $z' \cdot y^{-1} \geq 0$ e $y \geq 0$.

Esercizio 15.4. *1.* $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

2. $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$

3. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$

Dimostrazione.

$$X + (Y + Z) = \{x + A \,|\, x \in X \ A \in Y + Z\} = \{x + (y + z) \,|\, x \in X \ y \in Y \ z \in Z\} =$$
$$= \{(x + y) + z) \,|\, x \in X \ y \in Y \ z \in Z\} = \{A + z \,|\, A \in X + Y \ z \in Z\} = (X + Y) + Z$$

dove abbiamo usato che la somma su $\mathbb{Q}$ *è associativa. Per il prodotto assumiamo* X, Y, Z *positivi, il caso negativo si fa in modo analogo*

$$X \cdot (Y \cdot Z) = \{x \cdot A \,|\, (x > 0 \ \wedge \ x \in X) \ \wedge \ (A > 0 \ \wedge \ A \in Y \cdot Z\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0} =$$
$$= \{x \cdot (y \cdot z) \,|\, (x > 0 \ \wedge \ x \in X) \ \wedge \ (y > 0 \wedge, y \in Y) \ \wedge \ (z > 0 \ \wedge \ z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0} =$$
$$= \{(x \cdot y) \cdot z) \,| x > 0 \ \wedge \ x \in X) \ \wedge \ (y > 0 \wedge, y \in Y) \ \wedge \ (z > 0 \ \wedge \ z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0} = (X \cdot Y) \cdot Z$$

dove abbiamo usato che la somma su $\mathbb{Q}$ *è associativa.*

$$X \cdot (Y + Z) = \{x \cdot A \,|\, (x > 0 \ \wedge \ x \in X) \ \wedge \ (A > 0 \ \wedge \ A \in Y + Z)\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0} =$$
$$= \{x \cdot (y + z) \,|\, (x > 0 \ \wedge \ x \in X) \ \wedge \ (y + z > 0 \ \wedge \ y \in Y \ \wedge \ z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0} =$$
$$= \{x \cdot y + x \cdot z \,|\, (x > 0 \ \wedge \ x \in X) \ \wedge \ (y > 0 \ \wedge \ y \in Y) \ \wedge \ (z > 0 \ \wedge \ z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0} = XY + YZ$$

Andiamo a giustificare il passaggio rosso.
Chiaramente $y > 0 \ \wedge \ z > 0$ *implica* $y + z > 0$.
Supponiamo, senza perdere di generalità $z < 0$, *allora sia* $z_1 \in Z$ *con* $z_1 > 0 > z$.
Ora $x \cdot y + x \cdot z < x \cdot y + x \cdot z_1$ *(il primo termine appartiene sempre al taglio* $X \cdot Y + X \cdot Z$*) dunque ci possiamo restringere al caso di entrambi positivi.*

Esercizio 15.5. $X \cdot \frac{1}{X} = \mathbb{Q}_1$ *per ogni* $X \neq 0$
Dimostrazione.
Mostriamo che possiamo assumere $X > 0$.
Se fosse $X < 0$ *allora*

$$X \cdot \frac{1}{X} = (-X) \cdot \frac{1}{(-X)}$$

ora $-X > 0$ *dunque se la tesi vale per* $X > 0$ *allora vale anche per* $X < 0$.
Consideriamo dunque $X > 0$

$$X \cdot \frac{1}{X} = \left\{ x \cdot x_1 \,|\, x \in X \,\wedge\, x_1 \in \frac{1}{X} \right\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0} = \left\{ x \cdot x_1 \,|\, x \in X \,\wedge\, \left((x_1 = \frac{1}{y}\, y \notin X \right) \right\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0}$$

Dunque $\forall z \in X \cdot \frac{1}{X}$ *è della forma* $x\frac{1}{y}$ *dove* $y \notin X$ *dunque* $y > x$ *di conseguenza si ha* $z < 1$ *ovvero* $z \in \mathbb{Q}_1$.
Abbiamo mostrato che $X\frac{1}{X} \subseteq \mathbb{Q}_1$, *andiamo a mostrare l'altro contenimento.*
Sia $a \in Q_1$ *distinguiamo 2 casi*

- $a \leq 0$.
  In questo caso $\forall y \notin X$ *si ha* $a \cdot y \leq 0$ *dunque* $x = a \cdot y \in X$.
  Poichè $y \notin X$ *allora* $\frac{1}{y} \in X$ *abbiamo quindi*

  $$a = a \cdot y \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \frac{1}{y} \in X \cdot \frac{1}{X}$$

- $0 < a < 1$.
  Sia $x \in X$ *allora poichè* $\frac{x}{a^n}$ *tende all'infinito per* n *che tende all'infinito e poichè* X *non ha massimo deve accadere che per un fissato* n, $\frac{x}{a^n} \notin X$, *sia* m *il valore di* n *minimo.*
  Abbiamo dunque

  $$\frac{x}{a^{m-1}} \in X \text{ e } \frac{x}{a^m} \notin X$$

  dunque si ha $\frac{a^m}{x} \in \frac{1}{X}$, *concludiamo osservando che*

  $$a = \frac{x}{a^{m-1}} \cdot \frac{a^m}{x} \in X \times \frac{1}{X}$$

Esercizio 15.6. *Se* $A \neq \emptyset$ *allora* $\{B \mid |B| = |A|\}$ *non è un insieme.*
Dimostrazione.
Supponiamo, per assurdo, che l'insieme

$$\Gamma = \{B \mid |B| = |A|\}$$

esista, allora l'insieme di tutti gli insiemi (classe universale) esiste.
Sia Y *un insieme allora per l'assioma della coppia esiste* $\{Y\}$.
Essendo A *non vuoto,* $\exists a \in A$, *dunque esiste anche* $Y' = (A \setminus \{a\}) \cup \{Y\}$.
Chiaramente Y' *è in biezione con* A *dunque* $Y' \in \Gamma$.
Se consideriamo $\bigcup \Gamma$ *(che esiste per l'assioma dell'unione), tale insieme risulta la classe universale, ora abbiamo provato che tale insieme non può esistere (paradosso di Cantor)*

16 Lezione del 31 marzo

16.1 Ancora buoni ordini

Esercizio 16.1. *Se $(A,<)$ e $(B,<)$ sono buoni ordini, allora esiste al più un isomorfismo tra loro*
Dimostrazione.
Supponiamo esistano $\psi, \phi : A \to B$ isomorfismi d'ordine.
Ora $\psi \circ \phi^{-1} : B \to B$ è un isomorfismo di B dunque da fatti noti $\psi \circ \phi^{-1} = id_B$.
Similmente si prova che $\phi^{-1} \circ \psi = id_A$.
Ora ψ e ϕ^{-1} sono uno l'inverso dell'altro, dunque $\psi = \phi$

Esercizio 16.2. *Se $A \subset \mathbb{R}$ è ben ordinato, A è al più numerabile.*
Dimostrazione.
Sia $\alpha = \max A$, dunque $\forall a \in A$ con $a \neq \alpha$ è ben definito il successore di a (il più piccolo dei maggioranti di a in A) chiamiamo tale successore $a+1$.
Andiamo a definire una funzione

$$q : A \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{Q}$$

nel seguente modo: sia $a \in A \setminus \{\alpha\}$.
Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ esiste $q(a) \in \mathbb{Q}$ con $a < q(a) < a+1$.
Per la scelta di $q(a)$ possiamo fare nel seguente modo: fissata una enumerazione di $\mathbb{Q}$ ovvero: $\langle q_n \,|\, n \in \mathbb{N}\rangle$ di $\mathbb{Q}$, allora $q(a) = q_k$ dove $k = \min\{n \,|\, a < q_n < a+1\}$).
Mostriamo che la funzione q sopra definita è iniettiva.
Siano $a, a' \in A$ con $a \neq a'$ supponiamo $a < a'$ allora $(a, a') \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ dunque $\exists q \in \mathbb{Q}$ con $a < q < a'$ di conseguenza $q(a) < q(a')$.
Abbiamo costruito una applicazione iniettiva tra $A \setminus \{\alpha\}$ e $\mathbb{Q}$ dunque $|A| \leq |\mathbb{Q} \cup \{t\}| = \aleph_0$ dove $t \notin \mathbb{Q}$

Esercizio 16.3. *Sia $(A,<)$ un insieme ordinato*

$$(A,<) \cong (\omega,<) \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ è infinito e ogni suo segmento iniziale è finito}$$

Dimostrazione.
$\to$ Essendo A isomorfo a ω si ha $|A| = |\omega|$ dunque A è infinito.
Sia $\psi : A \to \omega$ l'isomorfismo d'ordine, e sia S un segmento iniziale di A.
Mostriamo che $\psi[S]$ è un segmento iniziale di ω: se $y < s \in \psi[S]$ essendo ψ suriettiva si avrà $\exists y' \in A$ e $s' \in S$ con $\psi(y') = y$ e $\psi(s') = s$ e poichè ψ preserva l'ordine $y' < s'$ dunque $y \in S$ da cui $\psi(y') = y \in \psi[S]$.
Ora essendo ω ben ordinato $\psi[S] = \omega_k$ con $k \in \omega$, dunque $\psi[S] = k$ da cui $|S| = |\psi[S]| = k$ dunque S finito.
$\Leftarrow$

- *A è privo di massimo.*
  Supponiamo per assurdo che A abbia massimo M, dunque $A = A_M \cup \{M\}$ ora A_M è finito, da cui anche $A_M \cup \{M\}$ è finito, ovvero A è finito, il che è assurdo
- *$P(n) =$ "$\forall n \in \omega$ esiste un segmento iniziale (anche vuoto) di A con $|S| \geq n$".*
  Mostriamo tale proprietà per induzione su n.
  Per $n = 0$ possiamo prendere $S = \emptyset$.

Supponiamo che esiste un segmento iniziale S con $|S| = n$ (se $|S| > n$ allora si avrà $|S| \geq n+1$ dunque $P(n+1)$).
L'insieme

$$C = \{x \in A \setminus S \,|\, \forall s \in S \; s < x\}$$

è non vuoto.
Supponiamo, per assurdo, $C = \emptyset$.
Ora $A \setminus S$ è non vuoto (Un insieme infinito privato di una quantità finita è infinito).
Dunque $\exists x \in A \setminus S$ e poichè $x \notin C$ allora $\exists s \in S$ con $x < s$ da cui $x \in S$ (definizione di segmento inziale) il che è assurdo.

Poichè $x \neq \emptyset$, sia $x \in C$ e $y > x$ (esiste in quanto A non ha massimo).
Dunque $S \subsetneq A_y$ in quanto $\forall s \in S$ si ha $s < x < y$ dunque $s \in A_y$ e per definizione di C, $x \in A_y$ ma $x \notin S$.
Dunque $|A_y| > |S| = n$ ovvero $|A_y| \geq n+1$

- *La funzione*

  $$g : \omega \times Seq(A) \to A \qquad g(n, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle) = \min(S \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$$

  dove S è un segmento iniziale di A con $|S| > n$ e $a_1, \ldots, a_n \in S$
  Osserviamo che l'insieme $S \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ è finito e non vuoto, dunque ammette minimo (S finito), resta da mostrare che un tale segmento iniziale esista e che la funzione non dipende dalla sua scelta.
  Sia $M = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$ (esiste in quanto l'insieme è finito), essendo A privo di massimo si ha $\exists x, y \in A$ con $y > x > M$, se consideriamo A_y è un segmento iniziale che soddisfa le ipotesi (in quanto $a_1, \ldots, a_n, x \in A_y$ dunque $|A_y| \geq n+1$).

  Mostriamo che non dipende dalla scelta di S.
  Sia $S \neq S'$ due segmenti iniziali che soddisfano le richieste volute.
  Essendo $S \neq S'$ possiamo supporre $\exists x \in S \setminus S'$ (l'altro caso è analogo) dunque $\forall y \in S'$ si avrà $y < x$ (se per un certo y si avrebbe $x < y$ allora essendo S' segmento iniziale si avrebbe $x \in S'$) da cui $y \in S$ (S è un segmento iniziale e $y < x \in S$). Da cui $S' \subset S$
  Sia $T = S \setminus \{a_1, \ldots a_n\}$ e $T' = S' \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ si ha dunque $T' \subset T$.
  Sia $\alpha = \min T$ e $\alpha' = \min T'$.
  Poichè $T' \subseteq T$ si ha $\alpha' \in T$ dunque $\alpha' \geq \alpha$.
  Supponiamo, per assurdo, $\alpha < \alpha'$ allora poichè $\alpha' \in S'$ che è un segmento iniziale si ha $\alpha \in S'$ dunque $\alpha \in T'$ da cui $\alpha \geq \alpha'$, il che è assurdo.
  Abbiamo mostrato che g non dipende dalla scelta del segmento iniziale.

Definiamo per ricorsione numerabile una funzione $f : \omega \to A$ tale che $f(0) = \min S$ dove S è un segmento iniziale non vuoto e $f(n+1) = g(n, \langle f(0), \ldots, f(n) \rangle)$.
Tale funzione è iniettiva (se $n > m$ allora $f(m)$ è il minimo di un insieme che non contiene $f(n)$) e preserva l'ordine (se $n < m$ allora posso prendere per la determinazione di $f(n)$ il segmento iniziale in modo che contenga anche $f(m)$ dunque poichè $f(n)$ è il minimo di un insieme che contiene $f(m)$ si avrà $f(n) < f(m)$).

Mostriamo che tale funzione è suriettiva.
Sia $a \in A$ essendo A privo di massimo esistono $x, y \in A$ con $y > x > a$ e sia $|A_y| = m$ dunque per calcolare $f(0), \ldots, f(m-1)$ posso usare il segmento iniziale A_y e so che uno tra $f(1), \ldots, f(m-1)$ è a.
Abbiamo costruito un isomorfismo tra $(A, <)$ e $(\omega, <)$

16.2 Tipi d'ordine

Esercizio 16.4. *Assumendo la tricotomia dei buoni ordini, mostrare che se $\mathfrak{F}$ è un insieme non vuoto di buoni ordini, allora esiste $(A,<) \in \mathfrak{F}$ tale che $\forall (B,<) \in \mathfrak{F}$ si ha $ot(A) \leq ot(B)$.*
Dimostrazione.
Essendo $\mathfrak{F}$ non vuoto, esiste $A \in \mathfrak{F}$.
Consideriamo l'insieme

$$A' = \{a \in A \,|\, \exists B \in \mathfrak{F} \; A_a \cong B\}$$

andiamo a distinguere 2 casi:

- *Se $A' = \emptyset$ allora dalla tricotomia dei buoni ordini si ha che $\forall B \in \mathfrak{F}$ vale una ed una sola tra*

$$A \cong B$$

$$A \cong B_b \text{ per } b \in B$$

  dunque in entrambi i casi $ot(A) \leq ot(B)$, dunque A è l'elemento "minimo" cercato

- *Supponiamo, dunque, $A' \neq \emptyset$ allora poichè $A' \subseteq A$ e $A \in \mathfrak{F}$ (dunque è un buon ordine), si ha che A' ammette minimo a.*
  Mostriamo che $ot(A_a) \leq ot(B)$ per ogni $B \in \mathfrak{F}$.
  Se per assurdo esistesse $B \in \mathfrak{F}$ con $ot(B) < ot(A_a)$ allora esisterebbe $a' \in A_a$ con

$$B \cong (A_a)_{a'} = A_{a'}$$

  dunque $a' \in A'$, il che va contro la minimalità di a (se $a' \in A_a$ allora si ha $a' < a$).
  Abbiamo mostrato che A_a ha tipo d'ordine minore, ora ricordando la definizione di A' si ha che esiste $B \in \mathfrak{F}$ con $B \cong A_a$ da cui $ot(B) = ot(A_a)$ dunque B è l'elemento di $\mathfrak{F}$ cercato

17 Lezione del 2 aprile

Esercizio 17.1. *$ot(\omega)$ è il più piccolo tra i tipi d'ordine di insiemi infiniti.*
Dimostrazione.
Sia A un insieme infinito e

$$g : \omega \times Seq(A) \to A$$

una funzione tale che $g(n, \langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \min(A \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$.
g è ben definita in quanto poichè $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ è finito $A \setminus a$ è non vuoto.
Definiamo per ricorsione numerabile una funzione

$$f : \omega \to A \quad \begin{cases} f(0) = \min A \\ f(n+1) = g(n, \langle f(i) \,|i = 1, \dots, n \rangle) \end{cases}$$

tale funzione è iniettiva: se $n \neq m$ supponiamo $n < m$ allora

$$f(m) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n), \dots f(m-1)\}$$

dunque $f(m) \neq f(n)$.
f sopra definita preserva l'ordine se $n < m$ allora $f(n) = \min(A \setminus \{f(0), \dots, f(n-1)\} \ni f(m)$ dunque necessariamente $f(n) \leq f(m)$ ma essendo f iniettiva $f(n) < f(m)$.
Resta da dimostrare che $f[\omega]$ è un segmento iniziale di A, ed essendo A ben ordinato $f[w] = A_a$.
Sia $\alpha \in f[\omega]$ dunque $\exists n \in \omega$ con $f(n) = \alpha$, sia $\beta < \alpha$.
Essendo $\alpha = f(n) = \min(A \setminus \{f(0), \dots, f(n-1)\})$ poichè $\beta < \alpha$ si ha

$$\beta \notin A \setminus \{f(0), \dots, f(n-1)\} \quad \to \quad \beta \in \{f(0), \dots, f(n-1)\}$$

dunque esiste $k < n$ con $\beta = f(k)$ dunque $\beta \in f[\omega]$.
Abbiamo mostrato che $f[\omega] = A_a$ essendo $f[\omega]$ un segmento iniziale e A un buon ordine, dunque f è un isomorfismo tra $(\omega, <)$ e $(A_a, <)$ da cui $ot(A) > ot(\omega)$

17.1 Operazioni sui buoni ordini

Esercizio 17.2. *$(A, <)$ e $(B, <)$ sono buoni ordini se e solo se $(A \oplus B, <)$ è un buon totale.*
Dimostrazione.
Supponiamo $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ buoni ordini.
Mostriamo prima che l'ordine su $A \oplus B$ è un ordine totale

- *Vale la proprietà transitiva, sia $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$.*
  - *Se $\alpha \in B \times \{1\}$ allora anche $\beta \in B \times \{1\}$ (se $\beta \in A \times \{0\}$ allora $\beta < \alpha$) similmente $\gamma \in B \times \{1\}$*
    dunque $\alpha = (b_1, 1)$, $\beta = (b_2, 1)$ e $\gamma = (b_3, 1)$
    $$\alpha < \beta \quad \rightarrow \quad b_1 <_B b_2$$
    $$\beta < \gamma \quad \rightarrow \quad b_2 <_B b_3$$
    essendo $<_B$ un ordine allora soddisfa la proprietà transitiva ($b_1 <_B b_3$) dunque $\alpha < \gamma$
  - *Supponiamo $\alpha \in A \times \{0\}$ andiamo a distinguere i seguenti casi*
    * *Se $\gamma \in B \times \{1\}$ allora $\alpha < \gamma$ (gli elementi di $A \times \{0\}$ sono minori di tutti gli elementi di $B \times \{1\}$*
    * *Se $\gamma \in A \times \{0\}$ allora anche $\beta \in A \times \{0\}$ (se fosse $\beta \in B \times \{1\}$ allora si avrebbe $\beta > \gamma$).*
      Dunque abbiamo $\alpha, \beta, \gamma \in A \times \{0\}$ da cui $\alpha = (a_1, 0)$, $\beta = (a_2, 0)$ e $\gamma = (a_3, 0)$
      $$\alpha < \beta \quad \rightarrow \quad a_1 <_A a_2$$
      $$\beta < \gamma \quad \rightarrow \quad a_2 <_A a_3$$
      essendo $<_B$ un ordine allora soddisfa la proprietà transitiva ($a_1 <_A a_3$) dunque $\alpha < \gamma$

- *Vale la proprietà tricotomica forte.*
  Siano $\alpha, \beta \in A \oplus B$ allora si possono verificare i seguenti casi
  - *$\alpha, \beta \in A \times \{0\}$ dunque $\alpha = (a_1, 0)$ e $\beta = (a_2, 0)$ con $a_1, a_2 \in A$*
    Essendo $(A, <_A)$ un ordine totale, $<_A$ soddisfa la tricotomia forte dunque si verifica uno ed uno solo dei seguenti casi
    $$a_1 = a_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta$$
    $$a_1 <_A a_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta$$
    $$a_2 <_A a_1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \alpha$$
  - *$\alpha, \beta \in B \times \{1\}$ dunque $\alpha = (b_1, 0)$ e $\beta = (b_2, 0)$ con $b_1, b_2 \in B$.*
    Essendo $(B, <_B)$ un ordine totale, $<_B$ soddisfa la tricotomia forte dunque si verifica uno ed uno solo dei seguenti casi
    $$b_1 = b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta$$
    $$b_1 <_B b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta$$
    $$b_2 <_B b_1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \alpha$$
  - *Se $\alpha \in A \times \{0\}$ e $\beta \in B \times \{1\}$ allora si ha $\alpha < \beta$*

Abbiamo mostrato che si verifica una ed una sola delle possibilità $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$.

Andiamo a mostrare che $(A \oplus B, <)$ è un buon ordine.
Sia $S \subseteq A \oplus B$ un insieme non vuoto allora si possono verificare 2 casi

- *$S \subseteq B \times \{1\}$ dunque S è un sottoinsieme non vuoto di $(B \times \{1\}, <_{B'}) \cong (B, <_B)$ da cui essendo B un buon ordine S ammette minimo*
- *$S \not\subseteq B \times \{1\}$ da cui $\exists (a, 0) \in (A \times \{0\}) \cap S$ dunque $S \cap (A \times \{0\})$ è non vuoto, dunque tale insieme ammette un minimo $M_A = (m_A, 0)$ $(A \times \{0\}, <_{A'}) \cong (A, <_A))$*
  Mostriamo che M_A è un minimo per S, infatti se $x \in S$ allora
  - *se $x \in S \cap (A \times \{0\})$ allora per definizione di M_A si ha $M_A < x$*
  - *se $(x, 1) \in S \cap (B \times \{1\})$ allora poichè $x \in B$ e $m_A \in A$ si ha $M_A < x$ (tutti gli elementi di A sono minori di quelli di tutti quelli di B)*

Supponiamo che $(A \oplus B, <)$ è un buon ordine, dimostriamo $(A, <_A)$ è un buon ordine (similmente si ha con B).
Mostriamo che $<_A$ è un ordine totale

- *Vale la proprietà transitiva, siano $a_1, a_2, a_3 \in A$ con $a_1 <_A a_2$ e $a_2 <_A a_3$ allora si ha $(a_1, 0) < (a_2, 0)$ e $(a_2, 0) < (a_3, 0)$.*
  Ora $<$ soddisfa la proprietà transitiva dunque $(a_1, 0) < (a_3, 0)$ ovvero $a_1 < a_3$
- *Vale la tricotomia forte, siano $a_1, a_2 \in A$.*
  Allora $(a_1, 0), (a_2, 0) \in A \oplus B$ e poichè $<$ è un ordine totale si verifica una ed una delle seguenti possibilità
  $$(a_1, 0) = (a_2, 0) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2$$
  $$(a_1, 0) < (a_2, 0) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 <_A a_2$$
  $$(a_2, 0) < (a_1, 0) \quad \Leftrightarrow \quad a_2 <_A a_1$$

Mostriamo che $(A, <_A)$ è un ordine totale.
Sia $S \subseteq A$ non vuoto, allora $S \times \{0\} \subseteq A \oplus B$ è non vuoto, dunque ammette minimo $(m, 0)$ da cui m è il minimo di S

Esercizio 17.3. $(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$.
Dimostrazione.
$(A \oplus B) \oplus C$ *è l'insieme*

$$(A \oplus B) \times \{0\} \cup C \times \{1\} = (A \times \{0\} \cup B \times \{1\}) \times \{0\} \cup C \times \{1\} =$$

$$= (A \times \{0\}) \times \{0\} \cup (B \times \{1\}) \times \{0\} \cup C \times \{1\}$$

tale insieme ha una struttura d'ordine data da $<_1$ *dove*

$$((a,0),0) <_1 ((a',0),0) \quad \Leftrightarrow \quad a <_A a'$$

$$((b,1),0) <_1 ((b',1),0) \quad \Leftrightarrow \quad b <_B b'$$

$$(c,1) < (c',1) \quad \Leftrightarrow \quad c <_C c'$$

$$((a,0),0) <_1 ((b,1),0) \quad \forall a \in A \; \forall b \in B$$

$$((a,0),0) <_1 (c,1) \quad \forall a \in A \; \forall c \in C$$

$$((b,1),0) <_1 (c,1) \quad \forall b \in B \; \forall c \in C$$

le relazioni sopra definite sono ben definite essendo gli insiemi che consideriamo disgiunti.
$A \oplus (B \oplus C)$ *è l'insieme*

$$A \times \{0\} \cup (B \oplus C) \times \{1\} = A \times \{0\} \cup (B \times \{0\} \cup C \times \{1\}) \times `\{1\} =$$

$$= A \times \{0\} \cup (B \times \{0\}) \times \{1\} \cup (C \times \{1\}) \times \{1\}$$

tale insieme ha una struttura d'ordine data da $<_2$ *dove*

$$(a,0) <_2 (a',0) \quad \Leftrightarrow \quad a <_A a'$$

$$((b,0),1) <_2 ((b',0),1) \quad \Leftrightarrow \quad b <_B b'$$

$$((c,1),1) <_2 ((c',1),1) \quad \Leftrightarrow \quad c <_C c'$$

$$(a,0) <_2 ((b,0),1) \quad \forall a \in A \; \forall b \in B$$

$$(a,0) <_2 ((c,1),1) \quad \forall a \in A \; \forall c \in C$$

$$((b,0),1) <_1 ((c,1),1) \quad \forall b \in B \; \forall c \in C$$

le relazioni sopra definite sono ben definite essendo gli insiemi che consideriamo disgiunti.
Andiamo a definire una mappa

$$\psi : (A \oplus B) \oplus C \to A \oplus (B \oplus C) \text{ dove } \psi(\alpha) = \begin{cases} (a,0) \text{ se } \exists a \in A \; \alpha = ((a,0),0) \\ ((b,0),1) \text{ se } \exists b \in B \; \alpha = ((b,1),0) \\ ((c,1),1) \text{ se } \exists c \in C \; \alpha = (c,1) \end{cases}$$

La funzione è ben definita in quanto manda insiemi disgiunti in insiemi disgiunti.
Mostriamo che è iniettiva : se $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ *allora poichè* ψ *manda insiemi disgiunti in insiemi disgiunti si possono verificare* 3 *casi*

- $\psi(\alpha), \psi(\beta) \in A \times \{0\}$.
  Da cui $\exists a \in A$ *con* $\psi(\alpha) = \psi(\beta) = (a,0)$ *dunque* $\beta = \alpha = ((a,0),0)$

- $\psi(\alpha), \psi(\beta) \in (B \times \{0\}) \times \{1\}$.
  Da cui $\exists b \in A$ *con* $\psi(\alpha) = \psi(\beta) = ((b,0),1)$ *dunque* $\beta = \alpha = ((b,1),0)$

- $\psi(\alpha), \psi(\beta) \in (C \times \{1\}) \times \{1\}$
  Da cui $\exists c \in A$ *con* $\psi(\alpha) = \psi(\beta) = ((c,1),1)$ *dunque* $\beta = \alpha = (c,1)$

in tutti i casi abbiamo dimostrato $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ *implica* $\alpha = \beta$.
La funzione è suriettiva, sia $\Gamma \in A \oplus (B \oplus C)$ *allora si possono verificare* 3 *casi disgiunti*

1. $\Gamma \in A \times \{0\}$ *allora* $\Gamma = (a,0)$ *per un certo* $a \in A$, *da cui* $\Gamma = \psi((a,0),0)$
2. $\Gamma \in (B \times \{0\}) \times \{1\}$ *allora* $\Gamma = ((b,0),1)$ *per un certo* $b \in B$, *da cui* $\Gamma = \psi((b,1),0)$
3. $\Gamma \in (C \times \{1\}) \times \{1\}$ *allora* $\Gamma = ((c,1),1)$ *per un certo* $c \in C$, *da cui* $\Gamma = \psi(c,1)$

Per mostrare che ψ *è un isomorfismo, resta da mostrare che preserva l'ordine.*
Siano $\alpha, \beta \in (A \oplus B) \oplus C$ *distinti allora*

- $\alpha, \beta \in (A \times \{0\}) \{0\}$ *allora* $\alpha = ((a,0),0)$ *e* $\beta = ((a',0),0)$
  Ora se
  $$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad a <_A a' \quad \Leftrightarrow \quad (a,0) < (a',0) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\alpha) < \psi(\beta)$$
  Similmente $\alpha > \beta$
- $\alpha, \beta \in (B \times \{1\}) \{0\}$ *allora* $\alpha = ((b,1),0)$ *e* $\beta = ((b',1),0)$
  Ora se
  $$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad b <_B b' \quad \Leftrightarrow \quad ((b,0),1) < ((b',0),1) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\alpha) < \psi(\beta)$$
  Similmente $\alpha > \beta$
- $\alpha, \beta \in C \times \{1\}$ *allora* $\alpha = (c,1)$ *e* $\beta = (c',1)$
  Ora se
  $$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad c <_C c' \quad \Leftrightarrow \quad ((c,1),1) < ((c',1),1) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\alpha) < \psi(\beta)$$
  Similmente $\alpha > \beta$
- *Se* $\alpha \in (A \times \{0\}) \times \{0\}$ $(\alpha = ((a,0),0))$ *e* $\beta \in (B \times \{1\}) \times \{0\}$ $(\beta = ((b,1),0))$ *allora* $\alpha < \beta$ *dunque anche* $\psi(\alpha) = (a,0) < ((b,0),1) = \psi(\beta)$ *e viceversa*
  Similmente nel caso si "scambino" α *e* β
- *Se* $\alpha \in (A \times \{0\}) \times \{0\}$ $(\alpha = ((a,0),0))$ *e* $\beta \in C \times \{1\}$ $(\beta = (c,1))$ *allora* $\alpha < \beta$ *dunque anche* $\psi(\alpha) = (a,0) < ((c,1),1) = \psi(\beta)$ *e viceversa*
  Similmente nel caso si "scambino" α *e* β
- *Se* $\alpha \in (B \times \{1\}) \times \{0\}$ $(\alpha = ((b,1),0)$ *e* $\beta \in C \times \{1\}$ $(\beta = (c,1))$ *allora* $\alpha < \beta$ *dunque anche* $\psi(\alpha) = ((b,0),1) < ((c,1),1) = \psi(\beta)$ *e viceversa.*
  Similmente nel caso si "scambino" α *e* β

Abbiamo provato che ψ *è una bigezione che preserva l'ordine, dunque è un isomorfismo, da cui la tesi*

Esercizio 17.4. $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$
Dimostrazione.
Sia
$$\psi : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C) \quad ((a,b),c) \to (a,(b,c))$$
Chiaramente ϕ è iniettiva e ϕ suriettiva.
Siano $\Gamma, \Gamma' \in (A \otimes B) \otimes C$ dunque $\Gamma = ((a,b),c)$ e $\Gamma' = ((a',b'),c')$ dove $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $c, c' \in C$

$$\Gamma < \Gamma' \quad \Leftrightarrow \quad ((a,b),c) < ((a',b'),c') \quad \Leftrightarrow \quad c < c \vee (c = c' \wedge (a,b) < (a',b')) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad c < c' \vee (c = c' \wedge (b < b' \vee (b = b' \wedge a < a')) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c < c' \vee (c = c' \wedge b < b') \vee (c = c' \wedge b = b' \wedge a < a')$$

Mostriamo che l'ultima condizione se e sole se $\psi(\Gamma) < \psi(\Gamma')$ il che mostra che ψ preserva l'ordine, dunque è un isomorfismo d'ordine

$$\psi(\Gamma) < \psi(\Gamma') \quad \Leftrightarrow \quad (a,(b,c)) < (a',(b',c')) \quad \Leftrightarrow \quad (b,c) < (b',c') \vee ((b,c) = (b',c') \wedge a < a') \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad c < c' \vee (c = c' \wedge b < b') \vee (b = b' \wedge c = c' \wedge a < a')$$

Abbiamo mostrato $\Gamma < \Gamma' \Leftrightarrow \psi(\Gamma) < \psi(\Gamma')$

Esercizio 17.5. $\{0,1\} \otimes \omega \cong \omega$
Dimostrazione.
Sia

$$\psi : \{0,1\} \otimes \omega \to \omega \qquad \psi((a,n)) = 2n + a$$

Tale funzione è iniettiva in quanto se $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ *allora*

$$\alpha = \beta = \left(\psi(\alpha)\%2, \left\lfloor \frac{\psi(\alpha)}{2} \right\rfloor\right)$$

(con il simbolo $a\%b$ *intendiamo il resto della divisione tra* a *e* b *e.g* $3\%2 = 1$*).*
Mostriamo che tale funzione è suriettiva, sia $n \in \omega$ *allora*

- *se* $n = 2m$ *allora* $\psi(0,m) = 2m = n$
- *se* $n = 2m+1$ *allora* $\psi(1,m) = 2m+1 = n$

Resta da provare che ψ *preserva l'ordine*

$$(a,n) < (b,m) \quad \Leftrightarrow n < m \vee (m = n \wedge a < b)$$

Mostriamo che

$$\psi(a,n) = 2n + a < 2m + b = \psi(b,m) \quad \Leftrightarrow \quad n < m \vee (m = n \wedge a < b)$$

- *se* $n < m$ *allora si ha* $n + 1 \leq m$ *da cui*

  $$2m + b \geq 2m \geq 2(n+1) = 2n + 2 > 2n + a$$

  dove abbiamo usato $b \geq 0$ *e* $2 > a$ *in quanto* $a, b \in \{0,1\}$
- *se* $n > m$ *si mostra,con conti analoghi al caso precedente, che*

  $$2m + b < 2n + a$$

- *se* $n = m \wedge a < b$ *allora*

  $$2n = 2m \quad \to \quad 2n + a = 2m + a \quad \to \quad 2n + a < 2m + b$$

- *se* $n = m \wedge a > b$ *allora si mostra, con conti analoghi al caso precedente, che*

  $$2m + b < 2n + a$$

Dunque abbiamo provato

$$\psi(a,n) < \psi(a,m) \quad \Leftrightarrow \quad n < m \vee (m = n \wedge a < b) \quad \Leftrightarrow \quad (a,n) < (b,m)$$

Esercizio 17.6. $\omega \otimes \{0,1\} \cong \omega \oplus \omega$
Dimostrazione.
Sia

$$\psi : \omega \times \{0,1\} \to \omega \oplus \omega \qquad \psi((n,a)) = (n,a)$$

Chiaramente ψ *è una bigezione, in quanto* $\omega \otimes \omega = \omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\}$, *resta da mostrare che preserva l'ordine.*
Sia

- $<_1$ *l'ordine su* $\omega \otimes \{0,1\}$
- $<_2$ *l'ordine su* $\omega \oplus \omega$
- $<$ *l'ordine su* $\{0,1\}$
- $<_\omega$ *l'ordine su* ω

Siano $\Gamma, \Gamma' \in \omega \times \{0,1\}$ *con* $\Gamma = (n,a)$ *e* $\Gamma' = (m,b)$

$$\Gamma <_1 \Gamma' \quad \Leftrightarrow \quad a < b \vee (a = b \wedge n <_\omega m)$$

Mostriamo che l'ultima condizione è equivalente a $\psi(\Gamma) <_2 \psi(\Gamma')$.
Ora $\psi(\Gamma), \psi(\Gamma') \in \omega \oplus \omega$ *dunque*

- *Se* $a = b = 0$ *allora* $(n,0) <_2 (m,0) \Leftrightarrow n <_\omega m$
- *Se* $a = b = 1$ *allora* $(n,1) <_2 (m,1) \Leftrightarrow n <_\omega m$
- *Se* $a = 0$ *e* $b = 0$ *(equivalentemente* $a < b$*) allora* $(n,0) < (m,1)$ *per ogni* $n, m \in \omega$
- *Se* $a = 1$ *e* $b = 1$ *(equivalentemente* $b < 1$*) allora* $(m,0) < (n,1)$ *per ogni* $n, m \in \omega$

Dunque abbiamo mostrato che $\psi(\Gamma) <_2 \psi(\Gamma') \Leftrightarrow \Gamma <_1 \Gamma'$ *ovvero che* ψ *preserva l'ordine.*

Esercizio 17.7. *Siano $(A,<)$ e $(B,<)$ ordini totali.*

$$A \otimes B \text{ buon ordine} \quad \Leftrightarrow \quad A, B \text{ buon ordini}$$

Dimostrazione.
Andiamo a mostrare che $A \otimes B$ con il suo ordine è effettivamente un buon ordine

- *Mostriamo che vale la proprietà transitiva.*
  Siano $\alpha, \beta, \gamma \in A \otimes B$ con $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma$.
  Allora se $\alpha = (a_1, b_1)$, $\beta = (a_2, b_2)$ e $\gamma = (a_3, b_3)$ si ha

  $$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad b_1 < b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2)$$

  $$\beta < \gamma \quad \Leftrightarrow \quad b_2 < b_3 \vee (b_2 = b_3 \wedge a_3 < a_3)$$

  dunque

  $$\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \quad \Leftrightarrow \quad (b_1 < b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2)) \wedge (b_2 < b_3 \vee (b_2 = b_3 \wedge a_3 < a_3))$$

  Ora ciò è equivalente a

  $$(b_1 < b_2 \wedge b_2 < b_3) \vee (b_1 < b_2 \wedge (b_1 = b_3 \wedge a_1 < a_3)) \vee$$

  $$\vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2 \wedge b_2 < b_3) \vee (b_1 = b_2 \wedge b_2 = b_3 \wedge a_1 < a_2 \wedge a_1 < a_3)$$

  Poichè $(A,<)$ e $(B,<)$ sono ordini totali, soddisfano la proprietà transitiva, da cui la condizione di sopra implica

  $$b_1 < b_3 \vee (b_3 < b_2 \wedge a_1 < a_3) \vee (b_1 < b_3 \wedge a_1 < a_2) \vee (b_1 = b_3 \wedge a_1 < a_3)$$

  Tale condizione implica

  $$b_1 < b_3 \vee (b_1 = b_3 \wedge a_1 < a_3) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, b_1) < (a_3, b_3) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \gamma$$

- *Mostriamo che vale la tricotomia forte.*
  Siano $\alpha, \beta \in A \otimes B$ allora $\alpha = (a_1, b_1)$ e $\beta = (a_2, b_2)$.
  Essendo $(B,<)$ e $(A,<)$ ordini totali, vale una ed una sola delle seguenti possibilità

  - *Se $b_1 = b_2$ da cui usando l'ordine totale di $(A,<)$ abbiamo*
    - *se $a_1 = a_2$ allora $\alpha = \beta$*
    - *se $a_1 < a_2$ allora $\alpha < \beta$*
    - *se $a_2 < a_1$ allora $\beta < \alpha$*
  - *Se $b_1 < b_2$ allora $\alpha < \beta$*
  - *Se $b_2 < b_1$ allora $\beta < \alpha$*

  Abbiamo dunque mostrato che vale una ed una sola tra $\alpha = \beta, \alpha < \beta$ e $\beta < \alpha$

- *Mostriamo che $A \otimes B$ ha la proprietà del buon ordine.*
  Sia $S \subseteq A \times B$ un insieme non vuoto.
  Sia
  $$S_B = \{b \in B \mid \exists a \in A \, (a, b) \in S\} \subseteq B$$
  ora essendo $S \neq \emptyset$ anche $S_B \neq \emptyset$ dunque per il buon ordine di B si ha $\exists m_B = \min S_B$.
  Sia
  $$S_A = \{a \in A \mid (a, m_B) \in S\} \subseteq A$$

Ora poichè $m_B = \min S_B$ *in particolare* $m_B \in S_B$ *dunque si ha* $\exists a \in A$ *con* $(a, m_B) \in S$, *da cui* $a \in S_A \neq \emptyset$.
Per il buon ordine di A *si ha* $\exists m_A = \min S_A$.
Mostriamo che $m = (m_A, m_B)$ *è il minimo di* S *(chiaramente* $m \in S$*).*
Sia $x \in S$ *con* $x \neq m$ *da cui* $x = (a, b)$ *allora si ha* $b \in S_B$ *dunque* $m_B \leq b$, *si verificano 2 possibilità*

- *Se* $m_B = b$ *allora* $a \in S_A$ *dunque, per definizione di* m_A, *si ha* $m_A < a$ *da cui* $m < x$
- *Se* $m_B < b$ *allora si ha* $m = (m_A, m_B) < x = (a, b)$

Supponiamo $(A \otimes B, <)$ *buon ordine, mostriamo che* B *è un buon ordine.*
Sia $S \subseteq B$ *non vuoto, ora preso* $\alpha \in A$ *si ha* $S' = \{\alpha\} \times S \subseteq A \otimes B$.
Dal buon ordine di $A \otimes B$ *si ha* $\exists m = (\alpha, m_B) = \min S'$.
Mostriamo che $m_B = \min S$ *(chiaramente* $m_B \in S$*).*
Sia $x \in S$ *con* $x \neq m_B$, *allora* $(\alpha, x) \in S'$ *dunque* $(\alpha, m_B) < (\alpha, x)$.
Ora $(\alpha, m_B) < (\alpha, x)$ *se e solo se* $m_B < x \vee (x = m_B \wedge \alpha < \alpha)$ *la seconda condizione non si può verificare (*$\alpha \not< \alpha$*) dunque* $(\alpha, m_B) < (\alpha, x)$ *se e solo se* $m_B < x$

Supponiamo $(A \otimes B, <)$ *buon ordine, mostriamo che* A *è un buon ordine.*
Sia $S \subseteq A$ *non vuoto, ora preso* $\beta \in B$ *si ha* $S' = S \times \{\beta\} \subseteq A \otimes B$.
Dal buon ordine di $A \otimes B$ *si ha* $\exists m = (m_A, \beta) = \min S'$.
Mostriamo che $m_A = \min S$ *(chiaramente* $m_A \in S$*).*
Sia $x \in S$ *con* $x \neq m_A$, *allora* $(x, \beta) \in S'$ *dunque* $(x, \beta) > (m_A, \beta)$.
Ora $(m_A, \beta) < (x, \beta)$ *se e solo se* $m_A < x$ *(infatti* $\beta = \beta$*)*

Esercizio 17.8.
$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

Dimostrazione.
Andiamo a studiare chi sono i 2 insiemi

$$A \otimes (B \oplus C) = A \times (B \times \{0\} \cup C \times \{1\}) = A \times (B \times \{0\}) \cup A \times (C \times \{1\})$$

$$(A \otimes B) \oplus (A \otimes C) = (A \times B) \times \{0\} \cup (A \times C) \times \{1\}$$

Sia
$$\psi : A \otimes (B \oplus C) \to (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$
definita come segue, sia $\Gamma \in A \otimes (B \oplus C)$ *allora si possono verificare 2 casi mutuamente esclusivi*

- $\Gamma \in A \times (B \times \{0\})$ *ovvero* $\Gamma = (a, (b, 0))$ *con* $a \in A$ *e* $b \in B$*,in questo caso poniamo*
$$\psi(\Gamma) = ((a, b), 0)$$

- $\Gamma \in A \times (C \times \{1\})$ *ovvero* $\Gamma = (a, (c, 1))$ *con* $a \in A$ *e* $c \in C$*,in questo caso poniamo*
$$\psi(\Gamma) = ((a, c), 1)$$

Tale funzione è ben definita, essendo gli insiemi su cui è stata definita disgiunti.
La funzione risulta, chiaramente, iniettiva e suriettiva,resta da provare che preserva l'ordine.
Siano $\alpha, \beta \in A \times (B \oplus C)$ *con* $\alpha \neq \beta$*.*
Si possono verificare solamente i seguenti casi

- $\alpha, \beta \in A \times (B \times \{0\})$ *dunque* $\alpha = (a_1, (b_1, 0))$ *e* $\beta = (a_2, (b_2, 0))$*.*
$$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad (b_1, 0) < (b_2, 0) \vee ((b_1, 0) = (b_2, 0) \wedge a_1 < a_2) \quad \Leftrightarrow \quad b_1 < b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2)$$
infatti per come è definita la relazione d'ordine su $\otimes$ *si ha che se*
$$\Gamma = (a, d), \Gamma_1 = (a_1, d_1) \in A \otimes D$$
allora
$$\Gamma < \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad d < d_1 \ \vee \ (d = d_1 \ \wedge \ a < a_1)$$
Ora
$$\psi(\alpha) < \psi(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad ((a_1, b_1), 0) < ((a_2, b_2), 0) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, b_1) < (a_2, b_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad b_1 < b_2 \ \vee \ (b_1 = b_2 \ \wedge \ a_1 < a_2)$$

- $\alpha, \beta \in A \times (C \times \{1\})$ *dunque* $\alpha = (a_1, (c_1, 1))$ *e* $\beta = (a_2, (c_2, 1))$*.*
Ora, per osservazioni analoghe al punto precedente, abbiamo
$$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad (c_1, 1) < (c_2, 1) \vee ((c_1, 1) = (c_2, 1) \wedge a_1 < a_2) \quad \Leftrightarrow \quad c_1 < c_2 \vee (c_1 = c_2 \wedge a_1 < a_2)$$
Inoltre
$$\psi(\alpha) < \psi(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad ((a_1, c_1), 1) < ((a_2, c_2), 1) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, c_1) < (a_2, c_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad c_1 < c_2 \ \vee \ (c_1 = c_2 \ \wedge \ a_1 < a_2)$$

- $\alpha \in A \times (C \times \{1\})$ *ovvero* $\alpha = (a_1, (c, 1))$ *e* $\beta \in A \times (B \times \{0\})$ *ovvero* $\beta = (a_2, (b, 0))$.
  Ora $\beta < \alpha$ *in quanto*
  $$\beta < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad (b, 0) < (c, 1) \vee ((c, 1) = (b, 0) \wedge a_2 < a_1)$$
  ora la prima condizione $(c, 1) < (b, 0)$ *vale sempre in quanto* $0 < 1$.
  Ora $\psi(\beta) < \psi(\alpha)$ *in quanto*
  $$\psi(\beta) < \psi(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad ((a_2, b), 0) < (a_1, c), 1)$$
  ora la seconda condizione vale sempre in quanto $0 < 1$
- *Il caso inverso* $\alpha \in A \times (B \times \{0\})$ *e* $\beta \in A \times (C \times \{1\})$ *si fa in modo analogo*

In tutti i casi abbiamo provato che $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\alpha) < \psi(\beta)$ *dunque* ψ *preserva l'ordine.*
Dove non altro specificato $a, a_i \in A$, $b, b_i \in B$ *e* $c, c_i \in C$ *dove* $i \in \omega$

Esercizio 17.9. $|Fun_0(\omega, w)| = \aleph_0$
Dimostrazione.
Andiamo a mostrare alcuni fatti generali.

1. *Sia* $A \subset \omega$ *finito allora l'insieme*
   $$F_A = \{f : \omega \to \omega \,|supp(f) = A\}$$
   è numerabile.
   Essendo A *finito (supponiamo di cardinalità* n*) possiamo enumerare i suoi elementi dunque* $A = \langle a_i \,|\, i = 0, \ldots, n-1 \rangle$.
   Sia
   $$\psi : F_A \to \mathbb{N}^n$$
   definita come segue:
   se $f \in F_A$ *allora* $\psi(f) : n \to \omega$ *dove* $\psi(f)(i) = f(a_i)$.
   Tale funzione è una biezione.
   È iniettiva: se $f, g \in F_A$ *sono diverse allora esiste almeno un indice* k *con* $f(a_k) \neq g(a_k)$ *da cui* $\psi(f)(k) \neq \psi(g)(k)$ *ovvero* $\psi(f) \neq \psi(g)$.
   È suriettiva: sia $g : n \to \mathbb{N}$ *una funzione, allora consideriamo la funzione*
   $$f : \omega \to \omega \quad f(s) = \begin{cases} g(t) \text{ se } s \in A \wedge \exists t \in n \text{ con } s = a_t \\ 0 \text{ se } s \notin A \end{cases}$$
   dunque $f \in F_A$ *e* $\psi(f) = g$
2. *Sia* $n \in \omega$ *allora l'insieme*
   $$\mathfrak{F}_n = \{A \subseteq \omega \,|\; |A| = n\}$$
   è al più numerabile.
   Consideriamo la mappa
   $$\phi : \mathfrak{F}_n \to \omega^n$$
   definita come segue:
   se $A \in \mathfrak{F}_n$ *allora* $A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$*:*
   L'enumerazione è ottenuta ponendo
   $$a_1 = \min A$$

e

$$a_k = \min A \setminus \{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \qquad per\ k = 2, \ldots, n)$$

allora

$$\phi(A) : n \to \omega \quad \phi(A)(i) = a_i \ per\ i = 1, \ldots, n$$

Mostriamo che tale funzione è iniettiva.
Siano $A \neq B \in \mathfrak{F}_n$ *allora* $\exists a \in A$ *con* $a \notin B$ *dunque* $a \in Imm(\phi(A))$ *ma* $a \notin Imm(\phi(B))$ *da cui* $\phi(A) \neq \phi(B)$

3. *L'insieme*

$$X = \bigcup_{n\in\omega} \left(\bigcup_{A\in\mathfrak{F}_n} F_A \right)$$

è numerabile.
Fissato $n \in \omega$ *si ha*

$$\left| \bigcup_{A\in\mathfrak{F}_n} F_A \right| = \aleph_0$$

in quanto è unione al più numerabile di insiemi numerabili.
Ora X *è unione numerabile di insiemi numerabili, dunque è numerabile.*

Siamo pronti a dimostrare quanto richiesto dall'esercizio.

$$Fun_0(\omega, \omega) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \left(\bigcup_{A\in\mathfrak{F}_n} F_A \right)$$

in quanto se $f \in Fun_0(\omega, \omega)$ *allora il suo supporto è finito, in particolare* $supp(f) = B$ *con* $|B| = n$ *dunque* $f \in F_B$.
Dunque si ha $|Fun_0(\omega, \omega)| \leq \aleph_0$.
Mostriamo l'altra disuguaglianza.
Sia

$$\theta : \omega \to Fun_0(\omega, \omega) \quad n \to g_n \ dove\ g_n : \omega \to \omega \ e\ g_n(m) = \begin{cases} n \ se\ m = n \\ 0 \ se\ m \neq n \end{cases}$$

Tale funzione è ben definita, $\forall n \in \omega$ *si ha* $supp(g_n) = \{n\}$.
Mostriamo che è iniettiva, siano $n \neq m$ *dunque uno tra* n *e* m *è diverso da* 0, *supponiamo, senza perdere di generalità,* $n \neq 0$.
Ora $\theta(n)(n) = n \neq 0$ *mentre* $\theta(m)(n) = 0$ *da cui* $\theta(n) \neq \theta(m)$.
Abbiamo dunque $|w| = \aleph_0 \leq |Fun_0(\omega, \omega)|$.
Per il teorema di Cantor-Bernstein si conclude che $|Fun_0(\omega, \omega)| = \aleph_0$

18 Lezione del 3 aprile

18.1 Ancora operazioni sui buoni ordini

Esercizio 18.1. *Se $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ con $b_i < b_j$ se $i < j$ è finito con k elementi. Allora*

$$exp(A, B) = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{k \text{ volte}}$$

Dimostrazione.
$exp(A, B)$ come insieme è $Fun(B, A)$ dunque cerco una mappa

$$\psi : Fun(B, A) \to \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ volte}}$$

definisco tale mappa come segue: se $f \in Fun(B, A)$ allora

$$\psi(f) = (f(b_1), \dots, f(b_k))$$

Chiaramente tale funzione è una bigezione (funzioni diverse, differiscono su almeno un punto.) Resta da verificare che preserva l'ordine: siano $f, g \in Fun(B, A)$ allora per come abbiamo definito l'ordine su $exp(A, B)$ si ha

$$f < g \quad \Leftrightarrow \quad f(b_s) < g(b_s) \text{ dove } b_s = \max\{b \in B \mid f(b) \neq g(b)\}$$

Per definizione

$$\psi(f) = (a_1, \dots, a_k) \text{ dove } a_i = f(b_i)$$
$$\psi(g) = (A_1, \dots, A_k) \text{ dove } A_i = g(b_i)$$

Poichè per $i > s$ si ha $f(b_i) = g(b_i)$ allora per $i > s$ si ha $a_i = A_i$.
Abbiamo mostrato in un esercizio precedente che $\otimes$ possiede la proprietà associativa, dunque

$$\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{k \text{ volte}} \cong \left(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{s \text{ volte}}\right) \otimes \left(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{k-s \text{ volte}}\right)$$

dunque

$$\psi(f) < \psi(g) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, \dots, a_k) < (A_1, \dots, A_k) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad ((a_1, \dots, a_s), (a_{s+1}, \dots, a_k)) < ((A_1, \dots, A_s), (A_{s+1}, \dots, A_k))$$

dove l'implicazione rossa deriva dalla proprietàssociativa.
Ora l'ultima disuguaglianza è vera in quanto

$$(a_{s+1}, \dots, a_k) = (A_{s+1}, \dots, A_k))\text{per } i > s \text{ si ha } a_i = A_i$$

$$a_s < A_k \text{ in quanto } a_s = f(b_s) < g(b_s) = A_s$$

Esercizio 18.2. *Se $A \cong A'$ e $B \cong B'$ allora $A \oplus B \cong A' \oplus B'$*
Dimostrazione.
Siano $\psi_A : A \to A'$ e $\psi_B : B \to B'$ isomorfismi d'ordine.
La mappa

$$\psi : A \oplus B \to A' \oplus B' \quad \psi(\Gamma) = \begin{cases} (\psi_A(a), 0) \text{ se } \exists a \in A \text{ con } \Gamma = (a, 0) \\ (\psi_B(b), 1) \text{ se } \exists b \in B \text{ con } \Gamma = (b, 1) \end{cases}$$

Tale funzione è ben definita in quanto ψ è definita su insiemi disgiunti a valori in insiemi disgiunti.
Mostriamo che ψ è iniettiva, siano $\psi(\alpha) = \psi(\beta) \in A' \oplus B'$ allora si possono verificare 2 casi

- *se $\psi(\alpha) \in A' \times \{0\}$ allora $\psi(\alpha) = (a', 0)$ dunque $\alpha = (\psi_A^{-1}(a'), 0) = \beta$*
- *se $\psi(\alpha) \in B' \times \{1\}$ allora $\psi(\alpha) = (b', 0)$ dunque $\alpha = (\psi_B^{-1}(b'), 0) = \beta$*

Mostriamo che è suriettiva, sia $\alpha \in A' \oplus B'$ allora

- *Se $\alpha \in A' \times \{0\}$ allora $\alpha = (a', 0)$, ora essendo ψ_A suriettiva, esiste $a \in A$ con $a' = \psi_A(a)$ dunque per definizione di ψ si ha $\alpha = \psi((a, 0))$*
- *Se $\alpha \in B' \times \{1\}$ allora $\alpha = (b', 1)$, ora essendo ψ_B suriettiva, esiste $b \in A$ con $b' = \psi_B(b)$ dunque per definizione di ψ si ha $\alpha = \psi((b, 1))$*

Resta da mostrare che ψ preserva l'ordine.
Siano $\alpha, \beta \in A \oplus B$ allora

- *Se $\alpha, \beta \in A \times \{0\}$ allora si ha $\alpha = (a_1, 0)$ e $\beta = (a_2, 0)$ con $a_1, a_2 \in A$.*

  $$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad a_1 < a_2 \quad \Leftrightarrow \quad \psi_A(a_1) < \psi_A(a_2) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\alpha) = (\psi_A(a_1), 0) < (\psi_A(a_2), 0) = \psi(\beta)$$

  Abbiamo usato che ψ_A è un isomorfismo d'ordine.
  Similmente nel caso in cui $\beta < \alpha$

- *Se $\alpha, \beta \in B \times \{1\}$ allora si ha $\alpha = (b_1, 1)$ e $\beta = (b_2, 1)$ con $b_1, b_2 \in B$.*

  $$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad b_1 < b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \psi_B(b_1) < \psi_B(b_2) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\alpha) = (\psi_B(b_1), 1) < (\psi_B(b_2), 1) = \psi(\beta)$$

  Abbiamo usato che ψ_B è un isomorfismo d'ordine.
  Similmente con $\beta < \alpha$

- *Se $\alpha \in A \times \{0\}$ ($\alpha = (a, 0)$) e $\beta \in B \times \{1\}$ ($\beta = (b, 1)$) allora $\alpha < \beta$ per definizione di ordine su $A \oplus B$. Ora $\psi(\alpha) \in A' \oplus \{0\}$ e $\psi(\beta) \in B' \oplus \{1\}$ dunque $\psi(\alpha) < \psi(\beta)$ per definizione di ordine su $A' \oplus B'$.*
  Similmente nel caso in cui $\alpha \in B \times \{1\}$ e $\beta \in A \times \{0\}$

ψ è una biezione che preserva l'ordine, dunque è un isomorfismo

Esercizio 18.3. *Se $A \cong A'$ e $B \cong B'$ allora $A \otimes B \cong A' \otimes B'$*
Dimostrazione.
Siano $\psi_A : A \to A'$ e $\psi : B \to B'$ isomorfismi d'ordine.
Andiamo a definire

$$\psi : A \times B \to A' \times B' \quad \psi(a,b) = (\psi_A(a), \psi_B(b))$$

chiaramente ψ è iniettiva e bigettiva, lo sono ψ_A e ψ_b.
Mostriamo che ψ preserva l'ordine
Siano $\Gamma = (a,b)$, $\Gamma_1 = (a_1, b_1) \in A \otimes B$

$$\Gamma < \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad b < b_1 \vee (b = b_1 \wedge a < a_1) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_B(b) < \psi_B(b_1) \vee (\psi_B(b) = \psi_B(b_1) \wedge \psi_A(a) < \psi_A(a_1)) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\psi_A(a), \psi_B(b)) < (\psi_A(a_1), \psi_B(b_1)) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\Gamma) < \psi(\Gamma')$$

dove l'implicazione rossa deriva dal fatto che ψ_A e ψ_B sono isomorfismi d'ordine.

Esercizio 18.4. *Se $A \cong A'$ e $B \cong B'$ allora $exp(A,B) \cong exp(A', B')$*
Dimostrazione.
Siano $\psi_A : A \to A'$ e $\psi_B : B \to B'$ isomorfismi d'ordine.
Andiamo a definire

$$\psi : Fun_0(B, A) \to Fun_0(B', A') \qquad \psi(f) = \psi_A \circ f \circ \psi_B^{-1}$$

Mostriamo che ψ è ben definita, ovvero $\forall f \in Fun_0(B, A)$ si ha $\psi(f) \in Fun_0(B', A')$.
Chiaramente $g = \psi(f) \in Fun(B', A')$ dunque rimane da provare che il suo supporto è finito.
Sia $A = supp(f)$ dunque A è finito da cui $\psi_B^{-1}[A]$ è finito.
Sia $\beta \notin \psi_B^{-1}[A]$ allora

$$g(\beta) = \psi_A \circ f \circ \psi_B^{-1}(\beta) = 0$$

in quanto se $\beta \notin \psi_B^{-1}[A]$ allora $\psi_B^{-1}(\beta) \notin A = Supp(f)$ da cui $f \circ \psi_B^{-1}(\beta) = 0_A$ si conclude osservando che ψ_A è isomorfismo d'ordine dunque $\psi(0_A) = 0_{A'}$.
Abbiamo mostrato che $supp(g) \subseteq \psi_B^{-1}[A]$ dunque è finito

Mostriamo che ψ è iniettiva.
Siano $f \neq g$ allora esiste $a \in A$ con $f(a) \neq g(a)$.

$$\psi(f)(\psi_B(a)) = \psi_A(f(a)) \neq \psi_A(g(b)) = \psi(g)(\psi_B(b))$$

dove l'uguaglianza rossa deriva dal fatto che ψ_A è iniettiva.
Abbiamo provato che $f \neq g \to \psi(f) \neq \psi(g)$.

Mostriamo che ψ è suriettiva.
Sia $f \in Fun_0(B', A')$ allora $g = \psi_A^{-1} \circ f \circ \psi_B \in Fun_0(B, A)$ (per mostrare che ha supporto finito, usiamo quello che abbiamo osservato nella buona definizione di ψ).
Concludiamo osservando che $\psi(g) = f$.

Andiamo a dimostrare che ψ preserva l'ordine.
Siano $f, g \in Fun_0(B, A)$ con $f \neq g$, sia

$$b_0 = \max\{b \in B \,|\, f(b) \neq g(b)\}$$

Siano $F = \psi(f)$ e $G = \psi(g)$.
Mostriamo che

$$b_0' = \psi_B(b_0) = \max\{b \in B' \,|\, F(b) \neq G(b)\}$$

infatti sia $b' \in B$ *con* $b' > \psi(b_0)$ *allora (data la suriettività di* ψ_B*) esiste* $b \in B$ *con* $b' = \psi_B(b)$*.*
Ora, essendo ψ_B *un isomorfismo d'ordine, si ha* $b > b_0$ *dunque* $f(b) = g(b)$

$$F(b') = \psi_A \circ f \circ \psi_B^{-1}(\psi_B(b')) = \psi_A \circ f(b) = \psi_A \circ g(b) = G(b')$$

Se proviamo $F(b_0') \neq G(b_0')$ *allora abbiamo dimostrato che* b_0' *è il massimo cercato.*
Supponiamo per assurdo $F(b_0') = G(b_0')$*.*
Ora, per definizione di ψ *otteniamo*

$$F(b_0') = \psi_A \circ f \circ \psi_B^{-1}(\psi_B(b_0)) = \psi_A \circ f(b_0)$$

$$G(b_0') = \psi_A \circ g \circ \psi_B^{-1}(\psi_B(b_0)) = \psi_A \circ g(b_0)$$

Essendo $\psi_A(g(b_0)) = \psi_A(f(b_0))$ *e* ψ_A *biettiva si ha* $g(b_0) = f(b_0)$ *il che è assurdo.*

Poichè abbiamo trovato il massimo valore, in cui le funzioni differiscono, per definizione di ordine della massima differenza si ha

$$F < G \quad \Leftrightarrow \quad F(b_0') < G(b_0')$$

Ora

$$f(b_0) < g(b_0) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_A(f(b_0)) < \phi_A(g(b_0)) \quad \Leftrightarrow \quad F(b_0') < g(b_0')$$

in quanto ψ_A *è isomorfismo d'ordine.*
Abbiamo dimostrato

$$f < g \quad \Leftrightarrow \quad \psi(f) < \psi(g)$$

il che mostra che ψ *è isomorfismo d'ordine*

Esercizio 18.5. *Se exp(A, B) è ben ordinato, allora A e B sono bene ordinati.*
Dimostrazione.
Supponiamo $A, B \neq \emptyset$.

Mostriamo innanzitutto che A è ben ordinato.
Indichiamo con $<$ l'ordine su A e con $\prec$ quello su exp(A, B).

Sia $\beta \in B$, allora se $a \in A$ allora denotiamo con

$$f_a : B \to A \quad f_a(b) = \begin{cases} a \ se \ b = \beta \\ 0_A \ se \ b \neq \beta \end{cases}$$

chiaramente tali funzione appartengono a $Fun_0(B, A)$ per ogni scelta di a poichè il loro supporto è $\{\beta\}$ che è finito
Inoltre

$$f_{a_1} \prec f_{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 < a_2 \tag{1}$$

in quanto

$$\max\{b \in B \,|\, f_{a_1}(b) \neq f_{a_2}(b)\} = \max\{\beta\} = \beta$$

dunque per definizione di ordine della massima differenza si ha

$$f_{a_1} \prec f_{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = f_{a_1}(\beta) < f_{a_2}(\beta) = a_2$$

- *$<$ soddisfa la proprietà transitiva.*
  Siano α, β, γ in A con $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$.
  Allora da 1 otteniamo
  $$f_\alpha \prec f_\beta \wedge f_\beta \prec f_\gamma$$
  dunque poichè $\prec$ soddisfa la proprietà transitiva si ha $f_\alpha \prec f_\gamma$ dunque per 1 $\alpha < \gamma$

- *$<$ soddisfa la tricotomia forte.*
  Siano $\alpha, \beta \in A$ allora poichè $\prec$ soddisfa la tricotomia, si ha che può accadere una delle seguenti possibilità

  - $f_\alpha = f_\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$
  - $f_\alpha \prec f_\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
  - $f_\beta \prec f_\alpha \Leftrightarrow \beta < \alpha$

  Le implicazioni seguono da 1.

- *$<$ ha la proprietà del buon ordine.*
  Sia $S \subseteq A$ non vuoto, consideriamo $X = \{f_a \,|\, a \in S\}$, tale insieme è un insieme non vuoto di $Fun_0(B, A)$ (ha la stessa cardinalità di S) dunque ammette minimo g.
  Poichè $g \in X$ allora $\exists m \in S$ con $g = f_m$.
  Mostriamo che $m = \min S$.
  Sia $a \in S$ allora $f_a \in X$ dunque $f_m < f_a$ dunque $m < a$.

Andiamo a mostrare che B è ben ordinato.
Indichiamo con $<$ l'ordine su B e $\prec$ quello su $Fun_0(B, A)$.
Indichiamo inoltre con 1_A il successore di 0_A ovvero il minimo dei maggioranti di 0_A (esiste in quanto A è ben ordinato).

Sia $\beta \in B$ *allora denotiamo*

$$g_\beta : B \to A \quad g_\beta(b) = \begin{cases} 1_A \text{ se } b = \beta \\ 0_A \text{ se } b \neq \beta \end{cases}$$

Vale le seguenti implicazioni

$$g_\alpha \prec g_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta \tag{2}$$

infatti $\{b \in B \,|g_\alpha \neq g_\beta\} = \{\alpha, \beta\}$.
Supponiamo, per assurdo che $\beta < \alpha$ *dunque*

$$\max \{b \in B \,|g_\alpha(b) \neq g_\beta(b)\} = \alpha$$

dunque per definizione di $\prec$ *si avrebbe*

$$g_\alpha \prec g_\beta \quad \Leftrightarrow \quad g_\alpha(\alpha) < g_\beta(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad 1_A < 0_A$$

dunque abbiamo un assurdo, era assurdo aver supposto $\beta < \alpha$.
Viceversa, se $g_\alpha \prec g_\beta$ *allora si ha*

$$g_\alpha(k) < g_\beta(k)$$

dove

$$k = \max\{b \in B \, g_\alpha(b) \neq g_\beta(b)\} = \max \{\alpha, \beta\}$$

ora poichè $1_A = g_\alpha(\alpha) > g_\beta(\alpha) = 0_A$ *deve accadere che* $k = \beta$ *dunque* $\alpha < \beta$

- $<$ *soddisfa la proprietà transitiva.*
  Siano $\alpha, \beta, \gamma \in B$ *con* $\alpha < \beta$ *e* $\beta < \gamma$.
  Per 2 *otteniamo*

  $$g_\alpha \prec g_\beta \,\wedge\, g_\beta \prec g_\gamma$$

  Ora $\prec$ *soddisfa la proprietà transitiva dunque* $g_\alpha \prec g_\gamma$ *da cui* $\alpha < \gamma$

- $<$ *soddisfa la tricotomia forte.*
  Siano $\alpha, \beta \in B$ *allora vale la tricotomia forte per* g_α, g_β *dunque può accadere una ed una sola delle seguenti possibilità*

  - $g_\alpha = g_\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$
  - $g_\alpha < g_\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
  - $g_\beta = g_\alpha \Leftrightarrow \beta < \alpha$

  dove le implicazioni seguono da 2

- $<$ *ha la proprietà del buon ordine.*
  Sia $S \subseteq B$ *non vuoto.*
  Consideriamo l'insieme $X = \{g_b \,|\, b \in S\}$ *tale insieme è un non vuoto sottoinsieme di* $Fun_0(B, A)$ *dunque ammette minimo* g.
  Ora poichè $g \in X$ *allora* $\exists m \in B$ *con* $g = g_m$, *mostriamo che* $m = \min S$.
  Sia $b \in S$ *allora* $g_b \in X$ *da cui* $g < g_b$ *dunque* $m < b$, *segue da* 2

Esercizio 18.6. *(senza (A.C.)).*
Supponiamo X infinito con $|X \times X| = |X|$.
Se $|A_i| = |X|$ per $i = 1, \dots, k$ allora $|A_1 \cup \dots \cup A_k| = |X|$
Dimostrazione.
Si ha $A_1 \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_k$ dunque

$$|A_1 \cup \dots \cup A_k| \geq |A_1| = |X|$$

Andiamo a mostrare l'altra disuguaglianza e concludiamo con Cantor-Bernstein.
Sia

$$\Psi = \langle \psi_i \,|\, i = 1, \dots, k \rangle \text{ dove } \psi_i : \, A_i \to X \text{ biezione}$$

Tale successione esiste in quanto $|A_i| = |X|$, notiamo che non occorre l'uso della scelta essendo gli A_i in numero finito
Sia

$$\phi : \, A_1 \cup \dots \cup A_k \to \underbrace{X \times \dots \times X}_{k \text{ volte}}$$

definita in questo modo $\phi(a)$ è l'elemento con tutte le componenti nulle tranne la i-esima che è $\phi_i(a)$.
Definiamo

$$i = \min \{s \in \{1, \dots, k\} \,|a \in A_s\}$$

tale minimo esiste in quanto è il minimo di un sottoinsieme finito di ω,

Mostriamo che tale funzione è iniettiva.
Se α, β sono tali che $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ allora se l'unica componente nulla è la i-esima si ha $\phi_i(\alpha) = \phi_i(\beta)$ dunque $\alpha = \beta$ essendo ϕ_i biezione.
Abbiamo dunque

$$|A_1 \cup \dots \cup A_k| \leq \left| \underbrace{X \times \dots \times X}_{k \text{ volte}} \right|$$

Ora per induzione si prova che

$$\left| \underbrace{X \times \dots \times X}_{k \text{ volte}} \right| = |X|$$

19 Lezione del 7 aprile

19.1 Ordinali

Esercizio 19.1. *Se $\alpha \neq \emptyset$ è un ordinale, $\emptyset \in \alpha$*
Dimostrazione.
Supponiamo, per assurdo, $\emptyset \notin \alpha$.
Definiamo $g : \omega \to \alpha \to \alpha$ dove $g((n, \beta)) = min(\alpha_\beta)$.
Tale funzione è ben definita: supponiamo per assurdo $\exists \beta \in \alpha$ con $\alpha_\beta = \emptyset$, allora $\beta = \emptyset$, dove abbiamo usato α ordinale, $\alpha_\beta = \beta$.
Abbiamo dunque che $\emptyset \in \alpha$ il che è assurdo.

Ora $\alpha \neq \emptyset$ dunque $\exists \beta \in \alpha$.
Definiamo per ricorsione numerabile

$$f : \omega \times \alpha \to \alpha \text{ tale che } \begin{cases} f(0) = \beta \\ f(n+1) = g(n, f(n)) \end{cases}$$

Dalla definizione di f otteniamo

$$f(n+1) = \min(\alpha_{f(n)}) \quad \to \quad f(n+1) \in \alpha_{f(n)} = f(n)$$

Dunque abbiamo una catena infinita

$$f(0) \in f(1) \in \cdots \in \ldots$$

e questo mostra che $(\alpha, \in)$ non è un buon ordine (abbiamo caratterizzato i buoni ordini con la non esistenza di catene infinite) contro la definizione di ordinale.
Abbiamo mostrato che supporre $\emptyset \notin \alpha$ genera un assurdo

Esercizio 19.2. *Se α è un ordinale infinito, $\omega \subseteq \alpha$.*
Dimostrazione.
Sia $n \in \omega$ allora dal teorema di tricotomia sui tipi d'ordine si può verificare una ed una sola delle seguenti possibilità

1. $ot(n) = ot(\alpha) \quad (n, \in) \cong (\alpha, \in)$
2. $ot(n) < ot(\alpha) \quad (n, \in) \cong (\alpha_\beta, \in)$ *con* $\beta \in \alpha$
3. $ot(n) > ot(\alpha) \quad (n_m, \in) \cong (\alpha, \in)$ *con* $m \in n$

La terza possibilità è da escludere in quanto implica che esiste una biezione tra α e un numero naturale, dunque α è finito.
La prima possibilità giunge a $\omega = \alpha$ (ordinali isomorfi sono uguali).
La seconda possibilità giunge a $n \cong \alpha_\beta = \beta$ dunque $n = \beta \subseteq \alpha$, dove abbiamo utilizzato il fatto che ordinali isomorfi sono uguali e $\alpha_\beta = \beta$ per α ordinale

Esercizio 19.3. *Sia X un insieme di ordinali non vuoto , allora $\bigcup X$ è un ordinale. In particolare $\bigcup X = SupX$.*

Dimostrazione.

Sia $\alpha = \bigcup X$.

Mostriamo che α è transitivo. Siano $x \in y \in \alpha$.

Per definizione di α esiste $\beta \in X$ ordinale con $y \in \beta$.

Ora da $x \in y \in \beta$, per transitività di β si ha $x \in \beta$ dunque $x \in \alpha$ in quanto $\exists \gamma \in X$ con $x \in \gamma$.

Mostriamo che $(\alpha, \in)$ è un buon ordine.

- *Vale la proprietà transitiva, siano $x_1, x_2, x_3 \in \alpha$ con $x_1 \in x_2$ e $x_2 \in x_3$.*
  Per definizione di α esistono $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in X$ con $x_i \in \beta_i$.
  Mostriamo che esiste $j \in \{1, 2, 3\}$ tale che $x_1, x_2, x_3 \in \beta_i$.
  Dalla tricotomia degli ordinali accade una ed una sola delle seguenti possibilità

  - *Se $\beta_1 \in \beta_2$ allora $x_1 \in \beta_1 \in \beta_2$ dunque essendo β_2 ordinale si ha $x_1 \in \beta_2$.*
  - *Se $\beta_2 \in \beta_1$ allora $x_2 \in \beta_2 \in \beta_1$ dunque essendo β_1 ordinale si ha $x_2 \in \beta_1$.*
  - *Se $\beta_1 = \beta_2$ allora chiaramente $x_1 \in \beta_1$.*

  Abbiamo dunque provato che esiste $k \in \{1, 2\}$ tale che $x_1, x_2 \in \beta_k$.
  Dalla tricotomia degli ordinali accade una ed una sola delle seguenti possibilità

  - *Se $\beta_k \in \beta_3$ allora $x_1, x_2 \in \beta_k \in \beta_3$ ed essendo β_3 ordinale si ha $x_1, x_2 \in \beta_3$*
  - *Se $\beta_3 \in \beta_k$ allora $x_3 \in \beta_3 \in \beta_k$ ed essendo β_k ordinale $x_3 \in \beta_k$*
  - *Se $\beta_3 = \beta_k$ allora chiaramente $x_3 \in \beta_k$*

  Abbiamo dunque mostrato che esiste j con la proprietà voluta.
  Supponiamo, senza perdere di generalità $j = 1$ dunque $x_1, x_2, x_3 \in \beta_1$.
  Ora essendo β_1 ordinale si ha $(\beta_1, \in)$ soddisfa la proprietà transitiva dunque

  $$x_1 \in x_2 \wedge x_2 \in x_3 \quad \rightarrow \quad x_1 \in x_3$$

- *Mostriamo che vale la proprietà tricotomica forte. Siano $x, y \in \alpha$.*
  Per osservazioni analoghe a quelle fatte sopra, posso supporre che $x, y \in \beta \in X$.
  Ora essendo $(\beta, \in)$ un ordine totale, vale una ed una sola delle seguenti proprietà

  $$x = y \quad x \in y \quad y < x$$

  dunque abbiamo mostrato che vale la proprietà tricotomica.

- *Mostriamo che $(\alpha, \in)$ ha la proprietà del buon ordine.*
  Sia $S \subseteq \alpha$ non vuoto, consideriamo l'insieme

  $$Y = \{\beta \in X \,|\, \beta \cap S \neq \emptyset\}$$

  tale insieme è un insieme di ordinali non vuoti, in particolare è un insieme non vuoto di buoni ordini, dunque per un esercizio sappiamo che $\exists \gamma \in Y$ con $ot(\gamma) < ot(\beta)$ per ogni $\beta \in Y$.
  La proprietà di minimalità del tipo d'ordine, implica che γ appartiene a tutti i β in quanto

  $$ot(\gamma) < ot(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cong \beta_b = b \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = b \in \beta$$

  Sia $m = \min(S \cap \gamma)$ tale minimo esiste essendo l'insieme non vuoto e γ un buon ordine. Mostriamo che m è il minimo di tutto l'insieme S, sia $s \in S$, allora per definizione di α

esiste $\beta \in X$ con $s \in \beta$ (in particolare $\beta \in Y$).
Ora per quanto osservato sopra si ha $m \in \gamma \in \beta$ ed essendo β un ordinale, $m \in \beta$.
Abbiamo dunque $m, s \in \beta$, per la proprietà di tricotomia di $(\beta, \in)$ si ha che può accadere una ed una sola delle seguenti possibilità

1. $m = s$
2. $m \in s$
3. $s \in m$
   Tale possibilità è assurda, in quanto $s \in m$ implica $s \in \gamma$ ($s \in m \in gamma$) dunque si avrebbe $s \in S \cap \gamma$ minore del minimo di $S \cap \gamma$

Le altre 2 possibilità garantiscono che m è il minimo cercato

Andiamo ora a mostrare che $\alpha = \sup X$.

- *Mostriamo che α è un maggiorante di X.*
  Per farlo dimostriamo la seguente propriéà :

  $$\alpha, \beta \text{ ordinali diversi } \alpha \subset \beta \quad \rightarrow \quad \alpha \in \beta$$

  Supponiamo che valga $\alpha \subset \beta$ ma non valga $\alpha \in \beta$, allora dalla tricotomia degli ordinali si ha $\beta \in \alpha$.
  Ora essendo α transitiva, $\forall x \in \beta$ si ha $x \in \alpha$ dunque $\beta \subseteq \alpha$ il che è assurdo.

  Dalla proprietà sopra dimostrata si ha $\forall x \in X$ (x ordinale) accade $x \subset \alpha = \bigcup X$, essendo α ordinale, $x \in \alpha$

- *Mostriamo che è il più piccolo dei maggioranti.*
  Sia $\beta \neq \alpha$ un maggiorante di X dunque $\forall x \in X$ vale $x \in \beta$ da cui $\beta \in \bigcup X = \alpha$.
  Abbiamo mostrato che β maggiorante implica $\beta \in \alpha$ (ricordiamo che l'appartenenza è la relazione d'ordine)

Esercizio 19.4. *Sia X un insieme di ordinali non vuoto, allora $\bigcap X$ è n ordinale. In particolare* $\min X = \bigcap X$

Dimostrazione.

Mostriamo prima che $\alpha = \bigcap X$ è un ordinale

- *α è transitivo. Siano $x \in y \in \alpha$.*
  Allora poichè $y \in \alpha$, $\forall \beta \in X$ vale $x \in y \in \beta$, essendo β un ordinale vale $x \in \beta$.
  Abbiamo mostrato che $x \in \beta$ per ogni $\beta \in X$ dunque, $x \in \alpha$

- *$(\alpha, \in)$ soddisfa la proprietà transitiva. Siano $x, y, z \in \alpha$.*
  Allora in particolare $x, y, z \in \beta$ dove β è un ordinale di X.
  Ora essendo β un ordinale, in β vale la proprietà transitiva dunque $x < y$ e $y < z$ implica $x < z$.

- *$(\alpha, \in)$ soddisfa la tricotomia forte. Siano $x, y \in \alpha$.*
  Allora si ha $x, y \in \beta$ dove β è un ordinale di X.
  Dunque dalla proprietà tricotomica di $(\beta, \in)$ segue che vale una ed una sola delle seguenti proprietà
  $$x = y \quad x \in y \quad x \in z$$

- *$(\alpha, \in)$ ha la proprietà del buon ordine.*
  Sia $S \subseteq \alpha$ non vuoto.
  Sia $\gamma \in X$ è tale che $ot(\gamma) \leq ot(\beta)$ per ogni $\beta \in X$ (esiste per un esercizio svolto in precedenza).
  Allora $S \subseteq \gamma$ ammette minimo m essendo γ un buon ordine con tipo d'ordine minore (γ è segmento iniziale degli altri ordinali in X

Mostriamo adesso che $\alpha = \min X$.
Essendo X insieme di ordinali, il suo minimo è l'ordinale che ha tipo d'ordine minore.
Ora α è un ordinale e $ot(\alpha) \leq ot(\beta)$ per ogni $\beta \in X$ in quanto $\alpha \in \beta$ dunque $\alpha = \beta_\alpha$ ovvero è segmento iniziale di β

Parte III.

20 Lezione del 21 aprile

20.1 Classi in ZFC

Esercizio 20.1. *La classe in ZFC (estensione di una formula)*

$$Sing = \{x \mid \exists y \; x = y\}$$

non è un insieme
Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo Sing insieme allora per l'assioma dell'unione $\bigcup Sing$ *è un insieme.*
Sia x *insieme allora anche* $\{x\}$ *è un insieme per l'assioma della coppia. Per definizione di* $Sing$ *si ha* $\{x\} \in Sing$ *da cui* $x \in \bigcup Sing$.
Ora per separazione

$$\nu = \{x \mid x = x\} = \left\{x \in \bigcup Sing \mid x = x\right\}$$

è un insieme, il che è assurdo (paradosso di Cantor)

Esercizio 20.2. *La classe in ZFC (estensione di una formula)*

$$Pair = \{x \mid \exists y, z \text{ ``} x = (y, z)\text{''}\}$$

non è un insieme .
Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo Pair insieme.
Sia x *un insieme. Ricordando come è stata definita la coppia di Kuratowski si ha* $(x, x) = \{\{x\}\} \in Pair$ *da cui* $\{x\} \in \bigcup Pair$ *ovvero* $x \in \bigcup \bigcup Pair$ *da cui*

$$\nu = \{x \mid x = x\} = \left\{x \in \bigcup \bigcup Pair \mid x = x\right\}$$

è un insieme, il che è assurdo per il paradosso di Cantor

Esercizio 20.3. *Per ogni* a*, la classe in ZFC (estensione di una formula)*

$$C_a = \{x \mid a \in x\}$$

non è un insieme.
Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che $\exists a$ *per cui* C_a *è un insieme.*
Sia x *un insieme, allora* $x \in \bigcup C_a$ *in quanto*

$$x \in \bigcup C_a \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in C_a \text{ con } x \in y$$

Ora $\{x, a\}$ *è un insieme per l'assioma della coppia, dunque ponendo* $y = \{x, a\}$ *si ha* $y \in C_a$ *e* $x \in y$.
Dunque otteniamo

$$\nu = \{x \mid x = x\} = \{x \in \bigcup C_a \mid x = x\}$$

abbiamo dunque che la classe universale è un insieme per separazione, il che è assurdo per il paradosso di Cantor

20.2 Teoria NGB

Esercizio 20.4. *In NGB, $\forall A, B$ esistono $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$*
Dimostrazione.

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$$

poichè per definizione x insieme se e solo se $\exists A$ con $x \in A$ si ha che non è restrittivo dare la seguente definizione

$$A \cup B = \{x \text{ insieme} \,|\, x \in A \vee x \in B\}$$

che è una classe per comprensione.

Similmente si mostra che

$$A \cap B = \{x \text{ insieme} \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$$

che è una classe per comprensione.

$$A \times B = \{x \,|\, x = (a, b)\}$$

dove con $x = (a, b)$ intendiamo la coppia definita come coppia di Kuratowski (che è un insieme $x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ in seguito mostreremo che $\mathcal{P}(A)$ è una classe) dunque se consideriamo la seguente formula

$$\varphi(x, A, B) = \text{“}\exists a \in A \; \exists b \in B \; x = \{\{a\}, \{a, b\}\} \text{“}$$

risulta predicativa (a, b sono insiemi poichè appartengono a delle classi, da cui)

$$A \times B = \{x insieme \,|\, \varphi(x, A, B)\}$$

Esercizio 20.5. *In NGB vale l'assioma del sottoinsieme*

$$\forall C \; \forall b \text{ insieme} \quad C \cap b \text{ è un insieme}$$

Dimostrazione.
Non è restrittivo supporre che esista $x \in C \cap b$ infatti se così non fosse si avrebbe $C \cap b = \emptyset$ che è un insieme.
Per l'osservazione di sopra, sia $b_0 \in C \cap b$

$$F : \nu \to \nu \quad F(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \in C \cap b \\ b_0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Essendo b un insieme $F[b] = \{f(a) \,|\, a \in b\}$ è un insieme per rimpiazzamento.
Osserviamo che se $x \in F[b]$ allora $x = F(c)$ dunque per definizione di F si possono verificare 2 situazioni

- $c \in b \cap C$ *dunque* $F(c) = c$ *ovvero* $x = c \in b \cap C$
- $c \notin b \cap C$ *dunque* $F(c) = b_0$ *ovvero* $x = b_0 \in b \cap C$

dunque abbiamo mostrato che $F[b] \subseteq b \cap C$.
L'altro contenimento si ottiene in modo banale, se $x \in b \cap C$ allora si ha $x = f(x)$ e poichè $x \in b$ otteniamo $x \in F[b]$

Esercizio 20.6. *NGB "ingloba" l'assioma di separazione, cioè dimostra la separazione ristretta ad insiemi.*
Devo mostrare che per ogni formula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ dove $x, x_1, \ldots, x_n$ sono tutte e sole le variabili libere si ha

$$\forall a_1, \ldots a_n \, \forall b \quad c = \{x \in b \,|\, \varphi(x, a_1, \ldots, a_n\} \text{ è un insieme}$$

Osserviamo che essendo φ una formula espressa in ZFC, è una formula predicativa (in ZFC esistono solo insiemi) dunque per astrazione esiste la classe

$$D = \{x \text{ insieme } | \, \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$$

ora per l'assioma del sottoinsieme (abbiamo mostrato che viene dimostrato da NGB) si ha che $D \cap a$ è un insieme.
Chiaramente abbiamo $c = D \cap a$ dunque c è un insieme

Esercizio 20.7. *Dimostrare in ZF (non usando la scelta) che il lemma di Zorn implica che per ogni insieme infinito A, esiste $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.*
Dimostrazione.
Dal teorema di Zermelo, sappiamo che A è ben ordinabile.
Definiamo per induzione numerabile una funzione

$$g : \mathbb{N} \to A$$

tale che

$$g(0) = \min A$$

$$g(n+1) = \min A \setminus \{g(0), \dots, g(n)\}$$

tale funzione è ben definita in quanto essendo A infinito, A meno un numero finito di elementi è non vuoto.
Chiaramente tale funzione è iniettiva, se $n \neq m$ sono numeri naturali allora possiamo supporre $n < m$ dunque $m \neq 0$ ovvero $m = s + 1$ da cui

$$g(m) = g(s+1) = \min A \setminus \{g(0), \dots, g(n), \dots, g(s)\}$$

ovvero $g(n)$ non appartiene all'insieme di cui $g(m)$ è minimo da cui deve essere $g(n) \neq g(m)$

21 Lezione del 23 aprile

Esercizio 21.1. *In NGB dimostrare l'esistenza di*

$$R = \{x \ insieme \ | x \notin x\}$$

$$\nu = \{x \ insieme \ \}$$

$$ORD = \{ordinali\}$$

$$SING = \{ \ singoletti\}$$

$$PAIR = \{(x, y) \,|\, x, y \ insiemi\}$$

$$APPARTENENZA = \{(x, y) \,|\, x, y \ insiemi \ \ x \in y\}$$

Dimostrare, inoltre, che le classi sopra definite non sono insiemi (classi proprie)
Dimostrazione.

- *Per astrazione R è una classe , per il paradosso di Russel, tale classe non può essere un insieme*
- *Per estrazione ν è una classe (si usa la formula predicativa $\varphi(x) =$ "$x = x$". Per il paradosso di Cantor, tale classe non è un insieme*
- *Per estrazione*

  $$ORD = \{x \ insieme | \, x \ transitivo \ e \ (x, \in) \ ben \ ordine\}$$

  osserviamo che la formula x transitivo e $(x, \in)$ ben ordinato può essere formalizzato nella teoria NGB mediante una formula predicativa.
  Per il paradosso di Butali-Fori, ORD non può essere un insieme
- *Possiamo definire $SING$ mediante la formula predicativa*

  $$\varphi(x) = \text{“}\exists y \ insieme \ \ x = \{y\}\text{”}$$

  dunque per astrazione è una classe propria (abbiamo già dimostrato che non può essere un insieme)
- *Possiamo definire $PAIR$ mediante la seguente formula predicativa*

  $$\varphi(x) = \text{“}\exists y, z \ insiemi \ \ x = \{\{y\}, \{y, z\}\}\text{”}$$

  dunque per astrazione

  $$PAIR = \{x \ insieme \ | \, \varphi(x)\}$$

  è una classe propria (abbiamo già dimostrato che non è un insieme)
- *Possiamo definire la seguente formula predicativa*

  $$\varphi(x) = \text{“}\exists y, z \ insiemi \ \ x = \{\{y\}, \{y, z\}\} \wedge y \in z''$$

  dunque per astrazione

  $$APPARTENENZA = \{x \ insieme \ | \, \varphi(x)\}$$

è una classe.
Supponiamo che tale classe sia un insieme dunque $\forall x$ *si ha*

$$(x, \{x\}) \in APPARTENENZA$$

ora $(x, \{x\}) = \{\{x\}, \{\{x\}\}\}$ *da cui* $x \in \bigcup\bigcup APPARTENENZA$.
Dunque per comprensione

$$\nu = \left\{x \in \bigcup\bigcup APPARTENENZA \,|\, x = x\right\}$$

è un insieme il che è assurdo per il paradosso di Cantor

Esercizio 21.2. *Sia* A *una classe, definiamo*

$$\mathcal{P}(A) = \{x \text{ insieme } | x \subseteq A\}$$

mostrare che $\mathcal{P}(A)$ *è una classe.*
Inoltre vale la seguente implicazione

$$A \text{ classe propria} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(A) \text{ classe propria}$$

Dimostrazione.
$x \subseteq A$ *è equivalente alla seguente formula predicativa*

$$\varphi(x) = \text{“}\forall y \quad (y \in x \quad \rightarrow y \in A)$$

è predicativa in quanto $y \in x$ *implica che* y *è un insieme.*
Per astrazione possiamo definire la seguente classe

$$\mathcal{P}(A) = \{x \text{ insieme } | \varphi(x)\}$$

Andiamo ora a mostrare l'equivalenza.
$\Leftarrow$ *deriva dal fatto che NGB ingloba l'assioma della potenza ristretto ad insiemi.*
$\rightarrow$ *Supponiamo* $\mathcal{P}(A)$ *insieme.*
Sia

$$F : \nu \rightarrow \nu \quad F(b) = \bigcup b$$

tale funzione è ben definita in quanto se b *è un insieme per l'assioma dell'unione (ristretto ad insiemi)* $\bigcup b$ *è un insieme.*
Per un esercizio svolto in precedenza sappiamo

$$F(\mathcal{P}(A)) = \bigcup \mathcal{P}(A) = A$$

Per l'assioma della coppia $\{\mathcal{P}(A)\}$ *è un insieme ed inoltre abbiamo*

$$A = F[\{\mathcal{P}(A)\}] = \{F(x) \,|\, x \in \{\mathcal{P}(A)\}\} = F(\mathcal{P}(A)) = \bigcup \mathcal{P}(A) = A$$

dunque per l'assioma di rimpiazzamento A *è un insieme.*

Esercizio 21.3. *Sia F una funzione iniettiva definita su una classe propria A. Allora*

$$F[A] = \{F(a) \mid a \in A\}$$

è una classe propria.
Dimostrazione.
Considerano la seguente formula predicativa

$$\varphi(x, A, F) = \text{“}\exists y \in A \quad \{\{y\}, \{y, x\}\} \in F\text{ ”}$$

Notiamo che $F(a)$ è un insieme ($F(a) \in ImmF$) dunque per ogni $a \in A$ possiamo definire

$$F[A] = \{x \text{ insieme } \mid \varphi(x, A, F)\}$$

che è una classe per astrazione.

Mostriamo che $F[A]$ classe propria.
Essendo A una classe propria $A \neq \emptyset$ (il vuoto un insieme) dunque esista $a_0 \in A$.
Essendo la funzione iniettiva

$$\exists a \in A \quad y = F(a) \quad \to \quad (\forall a' \quad (a' \neq a \to F(a') \neq y))\, i$$

dunque risulta ben definita la funzione

$$G : \nu \to \nu \quad G(x) = \begin{cases} y \text{ se } \exists y \in A \quad x = F(y) \\ a_0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

ora per rimpiazzamento si ha che $G[F[A]]$ è un insieme, ora

$$G[F[A]] = \{G(x) \mid x \in F[a]\}$$

Resta da mostrare che $G[F[A]] = A$.
Sia $a \in A$ dunque $F(a) \in F[A]$. Per definizione di G otteniamo $G(F(a)) = a$ da cui $a \in G[F[A]]$. Abbiamo appena mostrato che $A \subseteq G[F[A]]$.
Andiamo a mostrare l'altro contenimento.
Sia $a \in G[F[A]]$ dunque esiste $x \in F[A]$ con $G(x) = a$.

Esercizio 21.4. *Per ogni insieme A l'insieme $A \times \{0\}$ non contiene nessun ordinale.*
Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che $(\alpha, 0) \in A$ ordinale, ora

$$\alpha \in \{\alpha\} \in (\alpha, 0) = \{\{\alpha\}, \{\alpha, 0\}\}$$

dunque poichè $(\alpha, 0)$ è un ordinale è transitivo da cui $\alpha \in (\alpha, 0)$ ovvero

$$\alpha = \{\alpha\} \lor \alpha = \{\alpha, 0\}$$

per estensionalità si conclude mostrando che $\alpha \in \alpha$ il che è assurdo essendo α ordinale (elementi di ordinali sono ordinali)

22 Lezione del 24 aprile

Esercizio 22.1. *Se α, β sono ordinale allora*

$$\alpha + \beta \cong \alpha \oplus \beta$$

Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita che

$$P(\beta) = \text{“}\forall \alpha \text{ ordinale} \quad \alpha + \beta \cong \alpha \oplus \beta\text{”}$$

vale per ogni β ordinale.

- $\beta = 0$ $\alpha + 0 = \alpha$ *ed inoltre* $\alpha \oplus 0$ *come insieme è* $\alpha \times \{1\}$ *dunque è isomorfo ad* α
- $\beta = 1$ *allora per definizione* $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, *inoltre* $\alpha \oplus 1 = \alpha \times \{0\} \cup 1 \times \{1\}$.
  Sia
  $$\psi : \alpha \cup \{\alpha\} \to \alpha \times \{0\} \cup 1 \times \{1\} \quad \psi(\beta) = \begin{cases} (\beta, 0) \text{ se } \beta \in \alpha \\ (0, 1) \text{ se } \beta = \alpha \end{cases}$$
  chiaramente è una bigezione. Proviamo che è un isomorfismo d'ordine.
  - *Se* $\gamma_1, \gamma_2 \in \alpha$ *allora* $\psi(\gamma_i) = (\gamma_i, 0)$ *per* $i = 1, 2$.
    Dunque $\psi(\gamma_1) < \psi(\gamma_2)$ *se e solo se* $\gamma_1 < \gamma_2$
  - *Se* $\gamma_1 \in \alpha$ *e* $\gamma_2 = \alpha$ *allora* $\gamma_1 < \gamma_2$ *e anche* $\psi(\gamma_1) < \psi(\gamma_2)$

  Abbiamo dunque mostrato che per $\beta = 1$ *la tesi è valida*
- $\beta = \delta + 1$.
  $$\alpha + (\delta + 1) = (\alpha + \delta) + 1 \cong (\alpha \oplus \delta) + 1 \cong (\alpha \oplus \delta) \oplus 1 = \alpha \cong (\delta \cong 1)$$
- $\beta = \lambda$ *limite e* $P(\xi)$ *vero per ogni* $\xi < \lambda$
  Per ogni $\gamma < \lambda$ *si ha* $P(\gamma)$ *dunque esiste un isomorfismo*
  $$\psi_\gamma : \alpha + \gamma \to \alpha \oplus \gamma$$
  Mostriamo che $\gamma_1, \gamma_2 < \lambda$ *con* $\gamma_1 < \gamma_2$ *allora*
  $$\psi_{\gamma_2|\alpha+\gamma_1} = \psi_{\gamma_1}$$
  in quanto tra 2 insiemi ben ordinati esiste al più un isomorfismo.
  Poniamo
  $$\Psi = \bigcup_{\gamma < \lambda} \psi_\gamma$$
  Ψ *è ben definito in quanto le funzione sono a 2 a due compatibili (vedi esercizio 11.2) ed inoltre abbiamo dimostrato che*
  $$dom\Psi = \bigcup_{\gamma<\lambda} dom\psi_\gamma = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha + \gamma = \alpha + \lambda$$
  e per motivi analoghi $Im\Psi = \alpha \oplus \lambda$ *dunque abbiamo costruito una funzione biunivoca (le funzioni che uniamo sono iniettive)*
  $$\Psi : \alpha + \lambda \to \alpha \oplus \lambda$$

resta da provare che tale funzione preserva l'ordine.
Siano

$$\xi_1, \xi_2 \in \alpha + \lambda \quad \rightarrow \quad \exists \gamma_1, \gamma_2 < \lambda \quad \xi_i \in \alpha + \gamma_i \ per\ i = 1, 2$$

Posto $\gamma = \max \gamma_1, \gamma_2$ *si ottiene* $\gamma_1, \gamma_2 \in \gamma$ *ovvero* $\xi_1, \xi_2 \in dom\psi_\gamma$ *da cui*

$$\Psi(\xi_1) = \psi_\gamma(\xi_1) \quad \Psi(\xi_2) = \psi_\gamma(\xi_2)$$

e si conclude ricordando che ψ_γ *è un isomorfismo d'ordine*

Esercizio 22.2. *L'insieme dei Lesbegue-misurabile è equipotente all'insieme delle parti di* $\mathbb{R}$.
Dimostrazione.
Sia C *l'insieme di Cantor e* L *quello dei Lesbegue misurabili.*
Basta mostrare che $|C| = c$ *il che conclude la dimostrazione infatti abbiamo quanto segue.*
Dall'analisi sappiamo che C *è Lesbegue misurabile ed in particolare ogni suo sottoinsieme lo è. Dunque posso costruire un'applicazione iniettiva dalle parti di* C *nell'insieme dei lesbegue misurabili, da cui* $|L| \geq |\mathcal{P}(C)| = 2^c$*, l'altra inclusione è banale*
Mostriamo ora che l'insieme di Cantor ha cardinalità numerabile. Consideriamo i numeri dell'intervallo $[0,1]$ *e consideriamo la loro rappresentazione ternarie.*
Attenzione, tale rappresentazione non è unica, il numero $0,0\overline{2} = 0,1$ *lo stesso problema si ha con tutti quei numeri che hanno cifra decimale definitivamente* 2 *(mostreremo che tale fatto non porterà a nessuna ambiguità).*
Nel primo passo della costruzione dell'insieme di Cantor viene eliminato l'intervallo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *i ovvero eliminiamo tutti quei numeri che ammettono solo rappresentazioni della forma* $0,1.....$ *(eliminiamo la terza parte dell'intervallo* $[0,1]$*) (in questo modo non eliminiamo* $\frac{1}{3}$ *che ha* 2 *rappresentazioni* $0,1$ *e* $0,0\overline{2}$ *così come non eliminiamo* $\frac{2}{3}$ *che ha rappresentazione* $0,1\overline{2}$ *ma anche* $0,2$*). Dunque rimangono i numeri della forma* $0,0...$ *e* $0,2.....$
In modo analogo mostriamo che al passo successivo eliminiamo i numeri che hanno solo rappresentazioni ternarie della forma $0,01\cdot$ *oppure* $0,21\cdot$.
Continuando con queste osservazioni, otteniamo che i numeri che appartengono all'insieme di Cantor sono tutti e soli quei numeri che nella loro rappresentazione ternaria si scrivono usando solo le cifre 0 *e* 2.
Andiamo a definire una funzione tra l'insieme di Cantor e i numeri nell'intervallo $[0,1]$ *suriettiva.*
Sia $x \in C$ *allora* x *ammette una rappresentazione ternaria ovvero*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$$

dove $a_i \neq 1$. *Definiamo* $f(x)$ *come quel numero che ha scrittura binaria ottenuta dalla scrittura ternaria di* x *sostituendo tutte le occorrenze di* 2 *con* 1 *ovvero*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} \quad b_i = \begin{cases} a_i \ se \ a_i = 0 \\ 1 \ se \ a_i = 2 \end{cases}$$

Osserviamo che tale funzione è ben definita in quanto se $x \in C$ *allora* x *ha un'unica rappresentazione ternaria (abbiamo rimosso le ambiguità).*
Mostriamo che è suriettiva e dunque che esiste una funzione $g : [0,1] \to C$ *iniettiva (A.C.)*
Sia $y \in [0,1]$ *allora* y *ha una rappresentazione binaria*

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-1} \ con \ a_i \in \{0,1\}$$

poniamo

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-1} \ con \ b_i = \begin{cases} a_i \ se \ a_i = 0 \\ 2 \ se \ a_i = 1 \end{cases}$$

chiaramente otteniamo che $f(x) = y$.
Osserviamo che la funzione f *non è iniettiva infatti* $f\left(\frac{1}{3}\right) i = f\left(\frac{2}{3}\right) i$ *in quanto* $\frac{1}{3}$ *ha rappresentazione ternaria* $0,0\overline{2}$ *dunque ha come immagine il numero* $0,0\overline{1} = 0,1$ *in rappresentazione binaria.*

Ora $\frac{2}{3}$ *ha rappresentazione ternaria* $0,2$ *dunque ha come immagine il numero* $0,1$ *in rappresentazione binaria.*

Abbiamo dunque mostrato che $c = |[0,1]| \leq |C|$*, l'altra inclusione è ovvia in quanto* $C \subseteq \mathbb{R}$ *da cui* $|C| \leq |\mathbb{R}| = c$

23 Lezione del 28 aprile

Esercizio 23.1. *Le due formulazioni delle ricorsioni transfinite sono tra loro equivalenti. Mostriamo che la seconda formulazione implica la prima (quella per casi).*
Dati a_0 *insiemi e* G_1, G_2 $\nu \to \nu$ *allora definisco*

$$G(X) : \nu \to \nu \quad G(x) = \begin{cases} a_0 \text{ se } x = \emptyset \\ G_1(x(\alpha)) \text{ se } x \text{ funzione con } dom x = \alpha + 1 \\ G_2(x) \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Per ricorsione transfinita (II forma) esiste unica funzione

$$F : ORD \to \nu \text{ tale che } G(F_|\alpha))$$

ora $F(0) = G(\emptyset) = a_0$.
$F(\beta + 1) = G(F_{|\beta+1})$.
ora $F_{|\beta+1}$ *è una funzione con dominio* $\beta + 1$ *dunque dalla definizione di* G *otteniamo*

$$F(\beta + 1) = G_1\left(F_{|\beta+}(\beta)\right) = G_1(F(\beta)$$

Inoltre se λ *è limite* $F(\lambda) = G_2(F_{|\lambda})$

Esercizio 23.2. *Se* $n, m < \omega$ *allora la somma ordinale* $n + m$ *coincide con la somma* $n + m$ *come numeri naturali.*
Dimostrazione.
Se restringiamo la definizione di somma ordinale a ω *otteniamo l'esistenza di una funzione somma su* ω *che soddisfa* PA_{II} *dunque per unicità del sistema dei numeri naturali otteniamo che le 2 somme devono coincidere.*

Esercizio 23.3. $\alpha \cdot \beta \cong \alpha \otimes \beta$
Dimostrazione.
Mostriamolo che la proprietà

$$P(\alpha) = \text{“}\forall \beta \text{ ordinale } \ \alpha \cdot \beta \cong \alpha \otimes \beta$$

vale per induzione transfinita per ogni α *ordinale.*

- $P(0)$ *allora si ha* $\alpha \cdot 0 = 0 = \emptyset$*ed inoltre* $\alpha \otimes 0$ *è come insieme* $A \times 0 = \emptyset$.
  Abbiamo mostrato che $P(0)$ *è vero*
- *Supponiamo* $P(\beta)$ *allora*

  $$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cong \alpha \cdot \beta \oplus \alpha \cong \alpha \otimes \beta \oplus \alpha = \alpha \star (\beta + 1)$$

  dove

  - *nero deriva dalla definizione di prodotto sugli ordinali*
  - *rosso deriva dalla proprietà* $\alpha + \beta \cong \alpha \oplus \beta$ *provata in un esercizio precedente*
  - *blu deriva dal fatto che* $P(\beta)$ *è vera*
  - *verde deriva dalla distributiva dell'operazione* $\oplus$

- *Supponiamo $\beta = \lambda$ limite e che $\forall \gamma < \lambda$ si ha $P(\gamma)$.*
  dunque esiste
  $$\psi_\gamma : \alpha \cdot \gamma \to \alpha \otimes \gamma$$
  isomorfismo d'ordine.
  Osserviamo che $\gamma_1 < \gamma_2 < \lambda$ allora si ha
  $$\psi_{\gamma_{2|\alpha\cdot\gamma_1}} = \psi_{\gamma_1}$$
  in quanto tra 2 insiemi ben ordinati esiste al più un isomorfismo.
  Poniamo
  $$\Psi = \bigcup_{\gamma<\lambda} \psi_\gamma$$
  Ψ è ben definito in quanto le funzione sono a 2 a due compatibili (vedi esercizio 11.2) ed inoltre abbiamo dimostrato che
  $$dom\Psi = \bigcup_{\gamma<\lambda} dom\psi_\gamma = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \lambda$$
  e per motivi analoghi $Im\Psi = \alpha \otimes \lambda$ dunque abbiamo costruito una funzione biunivoca (le funzioni che uniamo sono iniettive)
  $$\Psi : \alpha \cdot \lambda \to \alpha \otimes \lambda$$
  resta da provare che tale funzione preserva l'ordine.
  Siano
  $$\xi_1, \xi_2 \in \alpha \cdot \lambda \quad \to \quad \exists \gamma_1, \gamma_2 < \lambda \quad \xi_i \in \alpha \cdot \gamma_i \text{ per } i = 1, 2$$
  Posto $\gamma = \max \gamma_1, \gamma_2$ si ottiene $\gamma_1, \gamma_2 \in \gamma$ ovvero $\xi_1, \xi_2 \in dom\psi_\gamma$ da cui
  $$\Psi(\xi_1) = \psi_\gamma(\xi_1) \quad \Psi(\xi_2) = \psi_\gamma(\xi_2)$$
  e si conclude ricordando che ψ_γ è un isomorfismo d'ordine

Esercizio 23.4. *Se $n, m < \omega$ allora il prodotto ordinale $n \cdot m$ coincide con il prodotto $n \cdot m$ come numeri naturali.*
Dimostrazione.
Restringendo la definizione di prodotto ordinale a ω si ottiene una funzione prodotto su ω che soddisfa PA_{II} per unicità del sistema dei numeri naturali, si conclude che il prodotto ordinale ristretto a ω coincide con il prodotto tra numeri naturali.

Esercizio 23.5 (Somma a sinistra). $\alpha < \beta \to \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
Mostrare se vale il viceversa.
Dimostrazione.
Mostriamo la proprietà

$$P(\beta) = \text{“}\forall\alpha, \forall\gamma \textit{ ordinali} \quad \alpha < \beta \quad \to \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$$

per induzione transfinita su β ordinale

- $\beta = 0$ *allora è vera a vuoto in quanto $\alpha < 0$ è sempre false*
- *Supponiamo $\beta = \delta + 1$ e $P(\delta)$ vera .*
  Se $\alpha < \delta + 1$ allora si possono verificare 2 casi
  - $\alpha = \delta$ *dunque*

    $$\gamma + \alpha = \gamma + \delta < (\gamma + \delta) + 1 = \gamma + (\delta + 1) = \gamma + \beta$$

    dove abbiamo usato il fatto che $\xi \in \xi + 1 = \xi \cup \{\xi\}$ per ogni ξ ordinale
  - $\alpha < \delta$ *allora per ipotesi induttiva*

    $$\gamma + \alpha < \gamma + \delta$$

    si conclude osservando, come nel caso precedente,

    $$\gamma + \delta < (\gamma + \delta) + 1 = \gamma + (\delta + 1) = \gamma + \beta$$

- *Supponiamo $\beta = \lambda$ limite si ha per definizione di somma*

  $$\gamma + \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \gamma + \delta$$

  ora poichè $\alpha < \lambda$ si ha

  $$\gamma + \alpha < \bigcup_{\delta\in\lambda} \gamma + \delta = \gamma + \lambda$$

Il viceversa non vale in quanto ad esempio $0 < 1$ ma $\omega = 1 + \omega$ infatti

$$1 + \omega = \bigcup_{n<\omega} 1 + n = \bigcup_{n<\omega} n = \omega$$

dove l'uguaglianza rossa viene dimostrata come segue:
Sia $x \in \bigcup_{n<\omega} 1 + n$ allora esiste $\overline{n} < \omega$ con $x \in 1 + \overline{n} = \overline{n} + 1$ (in quanto la somma tra naturali è commutativa) ora $\overline{n} + 1 \in \omega$ da cui $x \in \bigcup_{n<\omega} n$.
Viceversa se $x \in \bigcup_{n<\omega} n$ allora $\exists\overline{n} \in \omega$ con $x \in \overline{n}$ dunque a maggior ragione $x \in \overline{n} + 1 = 1 + \overline{n}$ ovvero $x \in \bigcup_{n<\omega} 1 + n$.
Abbiamo mostrato che valgono entrambi i contenimenti dunque vale l'uguaglianza

Esercizio 23.6 (Moltiplicazione a sinistra). *$\alpha < \beta \to \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$ per $\gamma \neq 0$. Mostrare se vale il viceversa.*

Dimostrazione.
Mostriamo la proprietà

$$P(\beta) = \text{“}\forall\alpha, \forall\gamma \neq 0 \text{ ordinali} \quad \alpha < \beta \quad \to \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$$

per induzione transfinita su β ordinale

- *$\beta = 0$ allora è vera a vuoto in quanto $\alpha < 0$ è sempre false*
- *Supponiamo $\beta = \delta + 1$ $P(\delta)$ vera .*
  Se $\alpha < \delta + 1$ allora si possono verificare 2 casi
  - *$\alpha < \delta$.*
    Essendo $\gamma \neq 0$ si ha $\gamma > 0$ dunque per l'esercizio precedente se $\xi < \zeta$ allora
    $$\xi = \xi + 0 < \zeta + \gamma$$
    dunque se $\xi = \gamma \cdot \alpha$ e $\zeta = \gamma \cdot \delta$ si ha $\xi < \zeta$ per ipotesi induttiva dunque
    $$\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \delta + \gamma = \gamma \cdot (\delta + 1) = \gamma \cdot \beta$$
  - *$\alpha = \delta$*
    $$\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \delta < \gamma \cdot \delta + 1 \leq \gamma \cdot \delta + \gamma = \gamma(\delta + 1) = \gamma + \beta$$
    dove abbiamo usato $\gamma > 0$
- *Supponiamo $\beta = \lambda$ limite si ha per definizione di prodotto*
  $$\gamma \cdot \lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \gamma \cdot \delta$$
  ora poichè $\alpha < \lambda$ si ha
  $$\gamma \cdot \alpha < \bigcup_{\delta \in \lambda} \gamma \cdot \delta = \gamma \cdot \lambda$$

Il viceversa non vale in quanto ad esempio $1 < 2$ ma $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$ infatti

$$1 \cdot \omega = \bigcup_{n<\omega} 1 \cdot n = \bigcup_{n<\omega} n = \omega$$

$$2 \cdot \omega = \bigcup_{n<w} 2 \cdot n = \bigcup_{n<\omega} n = \omega$$

dove l'uguaglianza rossa viene dimostrata come segue:
Sia $x \in \bigcup_{n<\omega} n$ allora esiste $\overline{n}$ con $x \in \overline{n}$ (dunque $n \neq \emptyset = 0$, ricordando che $2 \cdot n = n + n > n$ essendo $n \neq 0$ si ha $x \in 2 \cdot \overline{n}$ ovvero $x \in \bigcup_{n \in \omega} 2 \cdot n$
Viceversa se $x \in \bigcup_{n<\omega} 2 \cdot n$ allora $\exists \overline{n} \in \omega$ con $x \in 2 \cdot \overline{n}$ ora $2\overline{2} \in \omega$ da cui $x \in \bigcup_{n<\omega} n$.
Abbiamo mostrato che valgono entrambi i contenimenti dunque vale l'uguaglianza

Esercizio 23.7. $\alpha^\beta \cong Exp(\alpha, \beta)$
Dimostrazione.
Mostriamo per ricorsione transfinita su β che vale la seguente proprietà

$$P(\beta) = \text{“}\forall\alpha \text{ ordinale} \quad \alpha^\beta \cong Exp(\alpha,\beta)\text{”}$$

- $\beta = 0$ *allora* $\alpha^0 = 1$ *ed inoltre* $Exp(\alpha, 0)$ *consiste della sola funzione nulla da cui* $Exp(\alpha, 0) = 1$
- $\beta = \delta + 1$ *e supponiamo* $P(\delta)$

$$\alpha^{\delta+1} = \alpha^\delta \cdot \alpha \cong \alpha^\delta \otimes \alpha \cong Exp(\alpha,\delta) \otimes \alpha \cong Exp(\alpha, \delta + 1)$$

  - *nero deriva dalla definizione di esponenziazione tra ordinali*
  - *rosso deriva dal fatto che* $\xi \cdot \nu \cong \xi \otimes \nu$ *per ogni* ξ, ν *ordinali*
  - *verde deriva dal fatto che* $P(\delta)$ *è vera*
  - *Andiamo a mostrare che vale blu.*
    Sia
    $$\psi : Exp(\alpha, \beta) \otimes \beta \to Exp(\alpha + 1, \beta) \quad (f, \gamma) \to f \cup (\alpha, \gamma)$$
    tale definizione è ben posta in quanto se $f \in Fun_0(\alpha, \beta)$ *allora* $dom f = \alpha$ *dunque* $\alpha \notin dom f$ *inoltre se* f *aveva supporto finito anche* $f \cup (\alpha, \gamma)$ *ha supporto finito.*
    Mostriamo che tale funzione è un isomorfismo d'ordine.
    Chiaramente è iniettiva in quanto supponiamo $h = \psi((f, \gamma)) = \psi((g, \delta))$. $\gamma = \delta = h(\alpha)$ *mentre* $\forall \xi \in \alpha f(\xi) = h(\xi) = g(\xi)$.
    Mostriamo che è suriettiva. Sia $k \in Fun_0(\alpha+1, \beta)$ *allora pongo* $f = k_{|\alpha}$ *(ha supporto finito) e* $\gamma = k(\alpha)$ *dunque* $\psi((k, \gamma)) = k$.
    Proviamo che è un isomorfismo d'ordine Siano $\Gamma, Gamma_1 \in Exp(\alpha, \beta) \otimes \beta$ *dunque* $\Gamma_1 = (f, \gamma)$ *e* $\Gamma_2 = (f, \delta)$
    $$\Gamma_1 < \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \delta \vee (\beta = \delta \wedge f < g) \quad \Leftrightarrow$$
    Per la struttura d'ordine introdotta su $Exp(\alpha + 1, \beta$ $\psi(\Gamma_1) < \psi(\Gamma_2)$ *è equivalente a*
    $$\psi(\Gamma_1)(k) < \psi(\Gamma_2)(k) \text{ dove } k = \max\{n \mid \psi(\Gamma_1)(n) \neq \psi(\Gamma_2)(n)\}$$
    osserviamo ora che $k = \alpha$ *se e solo se* $\psi(\Gamma_1)(k) < \psi(\Gamma_2)(k)$ *equivalentemente* $\beta < \delta$. $k \neq \alpha$ *equivale* $\psi(\Gamma_1)(\alpha) = \psi(\Gamma_2)(\alpha)$ *ovvero* $\beta = \delta$ *e inoltre* $k = \max\{n \mid f(n) \geq g(n)\}$ *da cui*
    $$\psi(\Gamma_1)(k) < \psi(\Gamma_2)(k) \quad \Leftrightarrow \quad f(k) < g(k)$$
    Abbiamo dunque mostrato che $\Gamma_1 < \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\Gamma_1) < \psi(\Gamma_2)$

Esercizio 23.8. *Se* $n, m < \omega$ *allora l'esponenziale ordinale* n^m *coincide con l'esponenziale* n^m *come numeri naturali.*
Dimostrazione.
n^m *come numero naturale è definito come l'unico naturale equipotente a* $Fun(n, m)$.
Nell'esercizio precedente abbiamo dimostrato che α^β *è isomorfo a* $Exp(\alpha, \beta)$ *dunque* α^β *è equipotente a* $Fun_0(\alpha, \beta)$.
Osserviamo che $Fun_0(n, m) = Fun(n, m)$ *se* n, m *sono naturali dunque abbiamo mostrato che* n^m *come esponenziale ordinale è equipotente a* $Fun(n, m)$ *da cui l'esponenziale ordinale coincide con l'esponenziale tra numeri naturali.*

Esercizio 23.9. *Usando la ricorsione transfinita dimostrare*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$$

Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita

$$P(\gamma) = \text{“}\forall \alpha, \gamma \text{ ordinali} \quad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)\text{”}$$

che tale proprietà vale per ogni ordinale γ

- *Se* $\gamma = 0$ *allora*
$$\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$$
- *Se* $\gamma = \delta + 1$ *e supponiamo* $P(\gamma)$ *allora*
$$\alpha \cdot (\beta + (\delta + 1)) = \alpha \cdot ((\beta + \delta) + 1) = \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha$$
dove abbiamo usato in ordine le definizioni di somma e prodotto per un successore
$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \alpha = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha$$
dove l'uguale rosso deriva dal fatto che $P(\delta)$ *è vera*
- *Supponiamo* $\gamma = \lambda$ *limite e* $P(\gamma)$ *per ogni* $\gamma < \lambda$.
Come abbiamo osservato a lezione λ *limite implica* $\beta + \lambda$ *limite da cui*
$$\alpha \cdot (\beta + \lambda) = \bigcup_{xi<\lambda} \alpha \cdot (\beta + \xi) = \bigcup_{\xi<\lambda} (\alpha \cdot +\alpha \cdot \xi) \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \lambda$$
Dove verde è l'ipotesi induttiva e l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $\alpha \cdot \lambda$ *è limite.*
Mostriamo che $\alpha \cdot \lambda$ *è limite.*
Supponiamo per assurdo che esista $\xi = \max(\alpha \cdot \lambda)$, *ora* $\xi \in \alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha \cdot \delta$ *ovvero* $\exists \delta < \lambda$ *con* $x \in \alpha \cdot \delta$.
Essendo λ *limite,* γ *non è il massimo da cui esiste* $\gamma_1 < \lambda$ *con* $\gamma_1 > \gamma$.
Ora possiamo moltiplicare a sinistra per α *mantenendo la disuguaglianza dunque*
$$\alpha \cdot \gamma_1 > \alpha \cdot \gamma$$
abbiamo dunque provato che $\alpha \cdot \gamma \in \alpha\lambda$ *ma ciò è assurdo in quanto* $\xi < \alpha \cdot \gamma$ *contro la massimalità di* ξ

Esercizio 23.10. *Usando la ricorsione transfinita dimostrare*

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$$

Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita

$$P(\gamma) = \text{“}\forall \alpha, \gamma \text{ ordinali} \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)\text{”}$$

che tale proprietà vale per ogni ordinale γ

- $\beta = 0$ *allora* $\alpha \cdot (\beta \cdot 0) = \alpha \cdot 0 = 0$ *e* $(\alpha \cdot \beta) \cdot 0 = 0$
- *Supponiamo* $\gamma = \delta + 1$ *e* $P(\delta)$ *vera allora*

  $$\alpha \cdot (\beta \cdot (\delta + 1)) = \alpha \cdot (\beta \cdot \delta + 1) = \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) + \alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta + \alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma + 1) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

- *Supponiamo* $\gamma = \lambda$ *limite e* $P(\xi)$ *per* $\xi < \lambda$ *, allora* $\beta \cdot \lambda$ *limite (esercizio precedente) da cui*

  $$\alpha \cdot (\beta \cdot \lambda) = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha \cdot (\beta \cdot \xi) = \bigcup_{\xi < \lambda} (\alpha \cdot \beta) \cdot \xi = (\alpha \cdot \beta) \cdot \lambda$$

Esercizio 23.11. *Usando la ricorsione transfinita dimostrare*

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta + \gamma}$$

Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita

$$P(\gamma) = \text{“}\forall \alpha, \beta \text{ ordinali} \quad \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta + \gamma}\text{”}$$

che tale proprietà vale per ogni ordinale γ

- $\gamma = 0$ *allora*

  $$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{0} = \alpha^{\beta} \cdot 1 = \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta + 0}$$

- *Sia* $\gamma = \delta + 1$ *e supponiamo* $P(\delta)$ *allora*

  $$\alpha^{\beta} \cdot (\alpha^{\delta + 1}) = \alpha^{\beta} \cdot (\alpha^{\delta} \cdot \alpha) = (\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta}) \cdot \alpha = \alpha^{\beta + \delta} \cdot \alpha = \alpha^{(\beta + \delta) + 1} = \alpha^{\beta + (\delta + 1)} = \alpha^{\alpha + \gamma}$$

- *Se* $\gamma = \lambda$ *limite e vale* $P(\xi)$ *per* $\xi < \lambda$ *allora*

  $$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\lambda} = \bigcup_{\xi < \lambda} (\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\xi}) = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha^{\beta + \xi} = \alpha^{\beta + \lambda}$$

Esercizio 23.12. *Usando la ricorsione transfinita dimostrare*

$$\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$$

Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita

$$P(\gamma) = \text{“}\forall\alpha,\beta \text{ ordinali} \qquad \left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}\text{”}$$

che tale proprietà vale per ogni ordinale γ

- $\gamma = 0$ *allora* $\left(\alpha^{\beta}\right) i^{0} = 1$ *e* $\alpha^{\beta\cdot 0} = \alpha^{0} = 1$
- *Supponiamo* $\gamma = \delta + 1$ *e valga* $P(\delta)$ *allora*

$$\left(\alpha^{\beta}\right) i^{\delta+1} = \left(\alpha^{\beta}\right) i^{\gamma} \cdot \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta\cdot\delta} \cdot \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta\cdot\delta+\beta} = \alpha^{\beta(\delta+1)} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$$

- *Supponiamo* $\gamma = \lambda$ *limite e* $P(\xi)$ *vera per* $\xi < \lambda$

$$\left(\alpha^{\beta}\right) i^{\lambda} = \bigcup_{\xi<\lambda} \left(\alpha^{\beta}\right) i^{\xi} = \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha^{\beta\cdot\xi} = \alpha^{\beta\cdot\lambda}$$

24 Lezione del 30 aprile

Esercizio 24.1. *Se $\mathfrak{C}$ è un insieme di cardinali, allora* $\bigcup \mathfrak{C} = \sup_{k \in \mathfrak{C}} k$

Dimostrazione.
Sia $\alpha = \bigcup \mathfrak{C}$. *A lezione abbiamo mostrato che* α *cardinale.*
Chiaramente abbiamo per ogni $k \in \mathfrak{C}$ *si ha* $k \in \alpha$.
Supponiamo per assurdo che α *non sia il minimo dei maggioranti ovvero che* μ *cardinale con* $\mu \leq k$ *per ogni* $k \in \mathfrak{C}$ *e sia* $\mu < \alpha$.
Ora poichè $\mu < \alpha$ *abbiamo che esiste* $\xi \in \mathfrak{C}$ *con* $\mu < \xi$, *contro l'ipotesi che* μ *fosse un maggiorante*

Esercizio 24.2. *Se* $\alpha < \beta$ *allora* $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$

Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita che

$$P(\beta) = \text{“}\forall \alpha < \beta \quad \rightarrow \quad \alpha_\alpha < \aleph_\beta\text{”}$$

vale per ogni β *ordinale*

- $\beta = 0$ *allora è vera a vuoto in quanto* $\alpha < 0$ *sempre falsa*
- $\beta = \delta + 1$ *allora*
$$\aleph_{\delta+1} = \mathcal{H}(\aleph_\delta)$$
ora dalla funzione di Hartogs sappiamo che $\forall A$ *vale* $\mathcal{H}(A) \nleq A$ *dunque nel caso* A *ordinale sappiamo che anche* $\mathcal{H}(A)$ *è un ordinale e dunque poichè* 2 *ordinali sono sempre confrontabili si ha* $\mathcal{H}(A) > A$ *se* A *ordinale.*
Ricordando che $\aleph_\xi$ *è un cardinale per ogni* ξ *e che i cardinali sono ordinali otteniamo*
$$\mathcal{H}(\aleph_\delta) > \aleph_\delta \quad \rightarrow \quad \aleph_\beta > \aleph_\delta$$
Ora da $\alpha < \delta + 1$ *si considerano 2 casi*
  - $\alpha = \delta$ *dunque*
  $$\aleph_\delta = \aleph_\alpha < \aleph_\beta$$
  - $\alpha < \delta$ *allora per ipotesi induttiva*
  $$\aleph_\alpha < \aleph_\delta < \aleph_\beta$$
- $\beta = \lambda$ *limite* $\alpha < \lambda$ *allora* $\alpha + 1 < \lambda$ *essendo* λ *limite. Otteniamo dunque la seguente catena di disuguaglianza*
$$\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} \leq \bigcup_{\xi<\lambda} \aleph_\xi = \aleph_\lambda$$

Esercizio 24.3. *Senza A.C. dimostrare che* $|\omega_1| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))|$.
Abbiamo visto a lezione che vale tale relazione

Esercizio 24.4. *Mostrare che* $|\mathfrak{B}_{\omega_1}| = c$
Andremo a mostrare per induzione su ω_1 *che* $|\mathfrak{B}_\alpha| = c$ *per ogni* $\alpha < \omega_1$*, quindi*

$$|\mathfrak{B}_{\omega_1}| = \left|\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{B}_\alpha\right| \leq |\omega_1 \cdot \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = c$$

infatti

- $\mathfrak{B}_0 = \{$ *aperti* $\}$ *che abbiamo dimostrato avere la cardinalità del continuo*
- $$\mathfrak{B}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}_\alpha \cup \{B^c\, B \in \mathfrak{B}_\alpha\} \cup \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n|\ \{B_n\} \bigcup \mathfrak{B}_\alpha\right\}$$

  Ora $\mathfrak{B}_\alpha$ *ha cardinalità del continuo per ipotesi induttiva*
  $\{B^c\, B \in \mathfrak{B}_\alpha\}$ *ha cardinalità del continuo essendo in ovvia bigezione con* $\mathfrak{B}_\alpha$.
  $\{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n|\ \{B_n\} \bigcup \mathfrak{B}_\alpha\}$ *ha cardinalità minore di quella del continuo in quanto esiste una corrispondenza iniettiva tra l'insieme in esame e i sottoinsiemi di cardinalità al più numerabile di* $\mathfrak{B}_\alpha$ *(poichè* $\mathfrak{B}_\alpha$ *è equipotente a* $\mathbb{R}$ *tali sottoinsiemi hanno cardinalità minore del continuo)*
  $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ *è unione finita di insiemi con cardinalità minore del continuo e poichè* $\mathfrak{B}_\alpha$ *ha cardinalità del continuo si ha* $|\mathfrak{B}_{\alpha+1}| = c$
- *Se* $\alpha = \lambda$ *limite allora*
  $$\mathfrak{B}_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} B_\xi$$
  dunque $\mathfrak{B}_\lambda$ *è unione al più numerabile di insiemi con cardinalità del continuo dunque ha cardinalità del continuo*

Per l'altra disuguaglianza osserviamo che gli aperti di $\mathbb{R}$ *che sono c sono contenuti in* $\mathfrak{B}_{\omega_1}$

25 Lezione del 5 maggio

I seguenti 2 esercizi servono solamente per la risoluzione degli esercizi e non sono stati assegnati a lezione

Esercizio 25.1 (Non assegnato)**.** *Se λ limite allora $\alpha+\lambda$ è limite.*
Dimostrazione.
Supponiamo, per assurdo, che esiste $\xi = \max(\alpha+\lambda)$ allora

$$\xi \in \alpha+\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha+\gamma \quad \rightarrow \quad \exists \gamma_1 < \lambda \text{ con } \xi \in \alpha+\gamma_1$$

Poichè λ è limite, γ_1 non è massimo in γ_1 da cui esiste $\gamma_2 < \lambda$ con $\gamma_2 > \gamma_1$.
Ora $\gamma_1 < \gamma_2 \quad \rightarrow \quad \alpha+\gamma_1 < \alpha+\gamma_2$.
Dall'ultima disuguaglianza otteniamo $\alpha+\gamma_1 \in \alpha+\lambda$ il che è assurdo in quanto $\alpha+\gamma_1 > \xi$ contro la massimalità di ξ

Esercizio 25.2 (Non assegnato)**.** *Per ogni α ordinale vale $0 \cdot \alpha = 0$*
Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita

$$P(\alpha) = \text{“}0 \cdot \alpha = 0\text{”}$$

- $\alpha = 0$ *allora* $0 \cdot 0 = 0$
- $\alpha = \beta+1$ *e sia* $P(\beta)$ *allora*

$$0 \cdot (\beta+1) = 0 \cdot \beta + 0 = 0 + 0$$

- $\alpha = \lambda$ *limite e per ogni* $\xi < \lambda$ *vale* $P(\xi)$

$$0 \cdot \lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} (0 \cdot \xi) = \bigcup_{\xi<\lambda} 0 = 0$$

Esercizio 25.3. *$\alpha \cdot \beta$ è successore se e solo se α e β sono successori.*
Dimostrazione.
$\leftarrow$ Supponiamo α, β successori dunque

$$\alpha = \delta_1 + 1 \quad \beta = \delta_2 + 1$$

da cui

$$\alpha \cdot \beta = (\delta_1 + 1) \cdot (\delta_2 + 1) = (\delta_1 + 1) \cdot \delta_2 + \delta_1 + 1$$

dunque $\alpha \cdot \beta = \ni +1$ dove abbiamo posto $\eta = (\delta_1 + 1) \cdot \delta_2 + \delta_1$

$\rightarrow$ Mostriamo in modo contronominale (se ξ non è successore, allora $\xi = 0$ oppure è limite) dunque possono verificarsi i seguenti casi

- *$\alpha = 0$ dunque $\alpha \cdot \beta = 0$ che non è successore.*
- *$\beta = 0$ dunque per il secondo esercizio della sezione $\alpha \cdot \beta = 0$ che non è successore*
- *$\beta = \lambda$ limite. Mostriamo che $\alpha \cdot \lambda$ è limite (lo abbiamo già mostrato in un altro esercizio, lo ripetiamo per completezza).*
  Supponiamo, per assurdo esista $\xi = \max(\alpha \cdot \lambda)$ dunque

  $$\xi \in \alpha \cdot \lambda \quad \rightarrow \quad \exists \gamma_1 < \lambda \text{ con } \xi \in \alpha \cdot \gamma_1$$

  ora γ_1 non è massimo in λ (λ non ha massimo) dunque $\exists \gamma_2 < \lambda$ con $\gamma_1 < \gamma_2$

  $$\gamma_1 < \gamma_1 \quad \rightarrow \quad \alpha \cdot \gamma_1 < \alpha \cdot \gamma_2$$

  da cui $\alpha \cdot \gamma_1 \in \alpha \cdot \lambda$, ora $\alpha \cdot \gamma_1 > \xi$ contro la massimalità di ξ
- *L'ultimo caso che rimane è $\alpha = \lambda$ limite e β successore.*
  Essendo β successore si ha $\beta = \delta + 1$ da cui

  $$\lambda \cdot \beta = \lambda \cdot (\gamma + 1) = \lambda \cdot \delta + \lambda$$

  ora per il primo esercizio della sezione $\lambda \cdot \delta + \lambda$ è limite

I prossimi 4 esercizi servono solamente per gli esercizi precedenti e non sono stati assegnati a lezione. Vengono messi da parte in modo che le dimostrazioni successive siano più omogenee

Esercizio 25.4 (Non assegnato)**.** *Se* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora* $\alpha_1 + \gamma \leq \alpha_2 + \gamma$
Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita che

$$P(\gamma) = \text{“}\forall \alpha_1, \alpha_2 \textit{ ordinali} \quad \alpha_1 < \alpha_2 \quad \to \quad \alpha_1 + \gamma \leq \alpha_2 + \gamma\text{”}$$

- $\gamma = 0$ *Supponiamo* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora*

$$\alpha_1 + 0 = \alpha_1 \leq \alpha_2 = \alpha_2 + 0$$

- *Supponiamo* $\gamma = \delta + 1$ *e* $P(\delta)$*. Se* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora*

$$\alpha_1 + (\delta + 1) = (\alpha_1 + \delta) + 1 \leq (\alpha_2 + \delta) + 1 = \alpha_2 + (\delta + 1) = \alpha_2 + \beta$$

- *Supponiamo* $\gamma = \lambda$ *limite, e* $P(\xi)$ *per ogni* $\xi < \lambda$*. Se* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora*

$$\alpha_1 + \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha_1 + \xi \leq \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha_2 + \xi = \alpha_2 + \lambda$$

Esercizio 25.5 (Non assegnato)**.** *Se* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora* $\alpha_1 \cdot \gamma \leq \alpha_2 \cdot \gamma$
Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita che

$$P(\gamma) = \text{“}\forall \alpha_1, \alpha_2 \textit{ ordinali} \quad \alpha_1 < \alpha_2 \quad \to \quad \alpha_1 \cdot \gamma \leq \alpha_2 \cdot \gamma\text{”}$$

- $\gamma = 0$ *Supponiamo* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora*

$$\alpha_1 \cdot 0 = 0 \leq \alpha_2 \cdot 0 = 0$$

- *Supponiamo* $\gamma = \delta + 1$ *e* $P(\delta)$*. Se* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora*

$$\alpha_1 \cdot (\delta + 1) = (\alpha_1 \cdot \delta) + \alpha_1 \leq \alpha_2 \cdot \delta + \alpha_1$$

  Ora da $\alpha_1 < \alpha_2$ *moltiplicando a sinistra per* $\alpha_2 \cdot \delta$ *ottengo*

$$\alpha_2 \cdot \delta + \alpha_1 < \alpha_2 \cdot \delta + \alpha_2 = \alpha_2(\delta + 1)$$

  dunque mettendo insieme entrambe le disuguaglianze otteniamo la tesi

- *Supponiamo* $\gamma = \lambda$ *limite, e* $P(\xi)$ *per ogni* $\xi < \lambda$*. Se* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora*

$$\alpha_1 \cdot \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha_1 \cdot \xi \leq \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha_2 \cdot \xi = \alpha_2 \cdot \lambda$$

Esercizio 25.6 (Non assegnato). *Sia $\alpha_1 < \alpha_2$ allora per ogni β ordinale*

$$\alpha_1^\beta \le \alpha_2^\beta$$

Dimostrazione.
Mostriamo la proprietà

$$P(\beta) = \text{“}\forall \alpha_1, \alpha_2 \text{ ordinali} \quad \alpha_1 < \alpha_2 \quad \rightarrow \quad \alpha_1^\beta \le \alpha_2^\beta\text{”}$$

- $\beta = 0$ *allora* $\alpha_1^0 = 1 \le \alpha_2^0 = 1$
- *Supponiamo* $\beta = \delta + 1$ *e* $P(\delta)$. *Se* $\alpha_1 < \alpha_2$ *allora*

$$\alpha_1{}^{\text{‘}\delta+1} = \alpha_1^\delta \cdot \alpha_1$$

Esercizio 25.7 (Non assegnato). *Sia $\beta_1 < \beta_2$ allora per ogni α ordinale*

$$\alpha^{\beta_1} \le \alpha^{\beta_2}$$

Dimostrazione.
Mostriamo la proprietà

$$P(\beta_2) = \text{“}\forall \alpha, \beta_2 \text{ ordinali} \quad \beta_1 < \beta_2 \quad \rightarrow \quad \alpha^{\beta_1} \le \alpha^{\beta_2}\text{”}$$

- $\beta_2 = 0$ *allora è vera a vuota in quanto* $\beta_1 < 0$ *è sempre false*
- *Supponiamo* $\beta = \delta + 1$ *e* $P(\delta)$. *Se* $\beta_1 < \delta + 1$ *allora si possono verificare* 2 *ipotesi*
  - *se* $\beta_1 = \delta$ *dunque*

    $$\alpha^{\delta+1} = \alpha^\delta \cdot \alpha = \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha$$

    Poichè $\alpha \ge 1$ *(abbiamo definito l'esponenziale ordinale con base diversa da* 0*) si ha moltiplicando a sinistra per* α^{β_1}

    $$\alpha^{\beta_1} \cdot \alpha \ge \alpha^{\beta_1}$$

    da cui la tesi
  - *Se* $\beta_1 < \delta$ *allora*

    $$\alpha^{\delta+1} = \alpha^\delta \cdot \alpha$$

    e poichè $\alpha \ge 1$ *si ha*

    $$\alpha^\delta \cdot \alpha \ge \alpha^\delta \le \alpha^{\beta_1}$$

    dove l'ultima disuguaglianza deriva dall'ipotesi
- *Se* $\beta_2 = \lambda$ *è limite e* $P(\xi)$ *è vera per ogni* $\xi < \lambda$. *Se* $\beta_1 < \lambda$ *allora*

$$\alpha^{\beta_1} < \alpha^\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda}$$

Esercizio 25.8. *Supponiamo* $\alpha_1 \leq \alpha_2$ *e* $\beta_1 \leq \beta_2$ *allora*

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$$

Dimostrazione.
Andiamo a distinguere vari casi

- *Se* $\alpha_1 = \alpha_2$ *e* $\beta_1 = \beta_2$ *allora la tesi è banalmente vera*
- *L'esercizio 23.6 dimostra il caso* $\alpha_1 = \alpha_2$ *e* $\beta_1 < \beta_2$
- *L'esercizio 25.5 dimostra il caso* $\alpha_1 < \alpha_2$ *e* $\beta_1 = \beta_2$
- *Manca il caso* $\alpha_1 < \alpha_2$ *e* $\beta_1 < \beta_2$.
  Moltiplicando a sinistra per α_1 *in* $\beta_1 < \beta_2$ *ottengo*

  $$\alpha_1 \cdot \beta_1 < \alpha_2 \cdot \beta_2$$

  Moltiplicando a destra per β_2 *in* $\alpha_1 < \alpha_2$ *ottengo*

  $$\alpha_1 \cdot \beta_2 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$$

  dunque mettendo insieme entrambe le disuguaglianze ottengo la tesi

Esercizio 25.9. *Supponiamo* $\alpha_1 \leq \alpha_2$ *e* $\beta_1 \leq \beta_2$ *allora*

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$$

Dimostrazione.
Andiamo a distinguere vari casi

- *Se* $\alpha_1 = \alpha_2$ *e* $\beta_1 = \beta_2$ *allora la tesi è banalmente vera*
- *L'esercizio 23.5 dimostra il caso* $\alpha_1 = \alpha_2$ *e* $\beta_1 < \beta_2$
- *L'esercizio 25.4 dimostra il caso* $\alpha_1 < \alpha_2$ *e* $\beta_1 = \beta_2$
- *Manca il caso* $\alpha_1 < \alpha_2$ *e* $\beta_1 < \beta_2$.
  Sommando a sinistra per α_1 *in* $\beta_1 < \beta_2$ *ottengo*

  $$\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2$$

  Sommando a destra per β_2 *in* $\alpha_1 < \alpha_2$ *ottengo*

  $$\alpha_1 + \beta_2 \leq \alpha_2 + \beta_2$$

  dunque mettendo insieme entrambe le disuguaglianze ottengo la tesi

Esercizio 25.10. *Supponiamo* $\alpha_1 \leq \alpha_2$ *e* $\beta_1 \leq \beta_2$ *allora*

$$\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$$

Dimostrazione.
Andiamo a distinguere vari casi

- *Se* $\alpha_1 = \alpha_2$ *e* $\beta_1 = \beta_2$ *allora la tesi è banalmente vera*
- *L'esercizio 25.7 dimostra il caso* $\alpha_1 = \alpha_2$ *e* $\beta_1 < \beta_2$
- *L'esercizio 25.6 dimostra il caso* $\alpha_1 < \alpha_2$ *e* $\beta_1 = \beta_2$
- *Manca il caso* $\alpha_1 < \alpha_2$ *e* $\beta_1 < \beta_2$.
  Da $\beta_1 < \beta_2$ *ottengo per l'esercizio 25.7*

  $$\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$$

  Da $\alpha_1 < \alpha_2$ *ottengo per l'esercizio 25.6*

  $$\alpha_1^{\beta_2} \leq \alpha_2^{\beta_2}$$

  dunque mettendo insieme entrambe le disuguaglianze ottengo la tesi

Il seguente esercizio non è stato assegnato

Esercizio 25.11. *Per ogni* $n < \omega$ *si ha* $\exists \eta_n$ *con* $(\delta+1)^n = \eta_n + 1$.
Dimostrazione.
Mostriamo per induzione numerabile che

$$P(n) = \text{“}\exists \eta_n \quad (\delta+1)^n = \eta + 1$$

vale per ogni $n < \omega$

- $n = 0$ *allora per definizione di esponenziale* $(\delta+1)^n = 1$ *dunque è il successore di 0* ($\eta = 0$)
- *Supponiamo che* $P(n)$ *valga e mostriamo* $P(n+1)$

  $$(\delta+1)^{n+1} = (\delta+1)^n \cdot (\delta+1) = (\eta_n + 1) \cdot (\delta+1)$$

  ora la moltiplicazione ordinale è distributiva a destra da cui

  $$(\delta+1)^{n+1} = (\eta_n + 1) \cdot \delta + (\eta_n + 1)$$

  ma la somma ordinale è associativa da cui

  $$(\delta+1)^{n+1} = ((\eta_n + 1) \cdot \delta + \eta_n) + 1 = \eta_{n+1} + 1$$

Esercizio 25.12. *α^β è successore se e solo se α successore e β ordinale finito o $\beta = 0$*
Dimostrazione.
$\leftarrow$ Se α è successore allora $\alpha = \delta + 1$ dunque per l'esercizio precedente si ha $(\delta + 1)^\beta = \eta_\beta + 1$ per ogni β finito.
Se $\beta = 0$ allora per ogni ordinale α non nullo $\alpha^\beta = 1$ che è successore.
$\rightarrow$ Dimostriamolo in modo contronominale.
Supponiamo $\beta \neq 0$ e andiamo ad analizzare i seguenti casi

- *$\alpha = \lambda$ limite.*
  Mostriamo per induzione transfinita

$$P(\beta) = \text{“}\forall\lambda \text{ limite} \quad \beta =\neq 0 \wedge \lambda^\beta \text{ limite”}$$

  che β è vera per ogni ordinale β

  - *$\beta = 0$ vera a vuoto*
  - *$\beta = \delta + 1$ con $P(\delta)$ allora*
  $$\lambda^{\delta+1} = \lambda^\delta \cdot \lambda$$
    ora abbiamo mostrato che $\xi \cdot \eta$ è successore se e solo se lo sono sia ξ che η dunque $\lambda^{\delta+1}$ è limite non essendo 0 non è successore poichè λ limite
  - *$\beta = \eta$ limite e supponiamo $P(\xi)$ per ogni $\xi < \eta$.*
    Supponiamo per assurdo λ^η abbia massimo e sia ζ tale massimo.
    Ora $\zeta \in \lambda^\eta = \bigcup_{\xi<\eta} \lambda^\xi$ da cui esiste $\xi < \eta$ con $\zeta \in \lambda^\xi$.
    Per ipotesi λ^ξ non ha massimo (è limite) da cui esiste $\zeta_1 \in \lambda^\xi$ con $\zeta < \zeta_1$.
    Ora $\zeta_1 \in \lambda^\xi$ implica $\zeta_1 \in \lambda^\eta$ il che è assurdo per la massimalità di ζ.
    Dunque era assurdo supporre α^λ con massimo, ovvero è limite

- *Resta il caso α successore e β infinito.*
  Mostriamo per induzione transfinita che

$$P(\beta) = \text{“}\forall\alpha \text{ successore} \quad \beta \text{ infinito} \quad \rightarrow \quad \alpha^\beta \text{ limite”}$$

  - *$\beta = 0$. $P(\beta)$ è vera a vuoto essendo 0 finito*
  - *$\beta = \delta + 1$.*
    Se δ è finito, allora anche β lo è e dunque $P(\beta)$ vera a vuoto.
    Assumiamo δ infinito da cui
  $$\alpha^{\delta+1} = \alpha^\delta \cdot \alpha$$
    ora abbiamo dimostrato che $\xi \cdot \eta$ è successore se e solo se ξ e η lo sono, essendo per ipotesi induttiva α^δ limite si ha $\alpha^{\delta+1}$ limite (non è nullo essendo $\alpha \neq 0$ poichè base e $\alpha^\delta \neq 0$ poichè limite)
  - *$\beta = \lambda$ limite e supponiamo $P(\xi)$ per ogni $\xi < \lambda$ Supponiamo per assurdo α^λ abbia massimo dunque sia ζ tale massimo.*
    Da $\zeta \in \alpha^\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha^\xi$ segue che esiste $\xi < \lambda$ con $\zeta \in \alpha^\xi$.
    Per ipotesi induttiva α^ξ è limite, dunque ζ non è massimo in tale ordinale da cui esiste $\zeta_1 \in \alpha^\xi$ con $\zeta_1 > \zeta$.
    Ora $\zeta_1 \in \alpha^\xi$ dunque $\zeta_1 \in \alpha^\lambda$ contro la massimalità di ζ

26 Lezione del 7 maggio

Esercizio 26.1. *Dato un qualunque ordinale β consideriamo*

$$\begin{cases} \alpha_0 = \beta \\ \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} \end{cases}$$

allora la sequenza α_n è crescente e $\alpha = \bigcup \alpha_n$ è limite
Dimostrazione.
Mostriamo che la proprietà

$$P(n) = \text{“}\alpha_n \leq \alpha_{n+1}\text{”}$$

vale per ogni $n < \omega$ per induzione.

- *Nel prossimo esercizio mostreremo che $\beta \leq \omega^\beta$ da cui*

$$\beta = \alpha_0 \leq \alpha_1 = \omega^\beta$$

- *Supponiamo $P(n)$con $n \geq 1$ dunque n successore con $n = s + 1$ dunque $\alpha_s \leq \alpha_{s+1}$*

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} = \omega^{\alpha_{s+1}} \geq \omega^{\alpha_s} = \omega^{\alpha_s} = \alpha_{s+1} = \alpha_n$$

  dove la disuguaglianza rossa deriva dall'esercizio 25.7

Andiamo a mostrare che α è limite.
Supponiamo per assurdo, α non sia limite (chiaramente $\alpha \neq 0$) dunque ammette massimo ξ.
Poichè ξ massimo di α allora $\xi \in \alpha$ ovvero esiste m con $\xi \in \alpha_m$, ovvero $\xi < \alpha_m$ contro l'ipotesi di massimalità

Esercizio 26.2. $\omega^\alpha \geq \alpha$
Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita

$$P(\alpha) = \text{“}\omega^\alpha \geq \alpha\text{”}$$

vale per ogni ordinale α

- $\alpha = 0$ *allora* $\omega^0 = 1 \geq 0$
- $\alpha = 1$ *allora* $\omega \geq 1$
- *Supponiamo $\alpha = \delta + 1$ con $\delta \geq 1$ e $P(\delta)$ (il caso $\delta = 0$ lo abbiamo già trattato)*

$$\omega^{\delta+1} = \omega^\delta \cdot \omega \geq \delta \cdot \omega > \delta \cdot 2 = \delta + \delta \geq \delta + 1$$

  dove

  - *blu deriva dall'ipotesi induttiva dove abbiamo moltiplicato a destra per ω*
  - *rosso deriva da $\omega > 2$ dove abbiamo moltiplicato a sinistra per δ*
  - *giallo deriva da $\delta \geq 1$ dove abbiamo sommato a sinistra per δ*

- *Se $\alpha = \gamma$ limite e $P(\xi)$ per $\xi < \lambda$*

$$\omega^\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \omega^\xi \leq \bigcup_{\xi<\lambda} \xi = \lambda$$

Esercizio 26.3. *Mostrare l'unicità della forma normale di Cantor.*
Dimostrazione.
Sia

$$P(\alpha) = \text{“}\alpha \neq 0 \textit{ ordinale ammette un'unica forma normale di Cantor”}$$

mostriamo per induzione transfinita "forte" che tale proprietà vale per ogni ordinale α

- $P(\alpha)$ *è vera a vuoto*
- *Supponiamo* $P(\alpha)$ *vera per ogni* $\xi < \alpha$ *e siano*

  $$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

  $$\alpha = \omega^{\delta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\delta_r} \cdot m_r$$

  due forme normali ovvero $\gamma_1 > \cdots > \gamma_k$ *e* $\delta_1 > \cdots > \delta_r$ *ordinali e* $n_i, m_j < \omega$ *non nulli.*
  Supponiamo per assurdo $\gamma_1 < \delta_1$ *allora*

  $$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k = \omega^{\gamma_1}(n_1 + \omega^{\gamma_2'} \cdot n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k'} n_k)$$

  dove $\gamma_i' \neq 0$ *è quell'unico ordinale tale che* $\gamma_1 + \gamma_i' = \gamma_i$*.*
  Osserviamo ora che $\forall i = 2, \ldots, k$ *si ha* $\omega^{\gamma_i'} \cdot n_i \leq n_i$ *da cui*

  $$\alpha \leq \omega^{\gamma_i}(n_1 + \cdots + n_k)$$

  ora $n_1 + \cdots + n_k$ *è un numero naturale dunque è minore (stretto) di* ω *da cui otteniamo*

  $$\alpha < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \omega^{\gamma_1 + 1} \leq \omega^{\delta_1} \leq \alpha$$

  abbiamo mostrato che $\alpha < \alpha$ *il che è assurdo.*
  In modo analogo si mostra che era assurdo supporre $\gamma_1 > \delta_1$ *ovvero* $\gamma_1 = \delta_1$*.*
  Per unicità della divisione euclidea (dividiamo per ω^{γ_1}*) otteniamo* $n_1 = m_1$ *e*

  $$\omega^{\gamma_2} \cdot m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k = \omega^{\delta_2} \cdot m_2 + \cdots + \omega^{\delta_r} \cdot m_r$$

  dunque possiamo applicare l'ipotesi (il motivo viene mostrato in un esercizio successivo) induttiva al resto ottenendo la tesi

27 Lezione del 8 maggio

Esercizio 27.1. *Se $\gamma > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_k$ e $n_i < \omega$ allora*

$$\omega^\gamma > \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

Dimostrazione.
Mostriamo per induzione transfinita

$$P(\gamma) = \text{“}\forall k < \omega\ \forall \gamma_1 > \cdots > \gamma_k \textit{ordinali } \gamma_1 < \gamma\ \forall n_1, \ldots, n_k < \omega$$
$$\gamma > \gamma_1 \quad \rightarrow \quad \omega^\gamma > \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k\text{”}$$

vale per ogni γ ordinale

- $\gamma = 0$ *vera a vuoto in quanto* $\gamma_1 < 0$ *sempre false*
- $\gamma = \delta + 1$ *con* $P(\delta)$.
  Data una sequenza di $\gamma_1 > \cdots > \gamma_k$ *da* $\gamma > \gamma_1$ *si possono verificare 2 casi distinti*
  - *Se* $\delta > \gamma_1$ *dunque si da* $P(\delta)$ *si ha*

    $$\omega^\delta > \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

    dunque otteniamo da $2 > 1$

    $$\omega^\delta \cdot 2 \geq \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

    ora da $2 < \omega$ *otteniamo moltiplicando a sinistra per* ω^δ

    $$\omega^\beta = \omega^\delta \cdot \omega > \omega^\delta \cdot 2 \geq \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

  - *Se* $\delta = \gamma_1$ *Sia*

    $$\rho = \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

    Poichè $\delta = \gamma_1 > \gamma_2$ *per ipotesi induttiva si ha* $\omega^\delta > \rho$ *dunque per quanto visto a lezione* $\rho + \omega^\delta = \omega^\delta$ *Ora* $\omega^\delta > 0$ *dunque sommando a sinistra per* $\omega^\delta \cdot n_1 + \rho$ *otteniamo*

    $$\omega^\delta \cdot n_1 + \rho + \omega^\delta > \omega^\delta \cdot n_1 + \rho \quad \rightarrow \quad \omega^\delta(n_1 + 1) = \omega^\delta \cdot n_1 + \omega^\delta > \omega^\delta \cdot n_1 + \rho$$

    Osserviamo ora

    $$\omega^{\delta+1} = \omega^\delta \cdot \omega = \bigcup_{n<\omega} \omega^\delta n > \omega^\delta(n_1 + 1)$$

    Abbiamo dunque mostrato

    $$\omega^\beta = \omega^{\delta+1} > \omega^\delta(n_1 + 1) > \omega^\delta \cdot n_1 + \rho = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

- *Sia* $\gamma = \lambda$ *limite e* $P(\xi)$ *per* $\xi < \lambda$.
  Siano $\gamma_1 > \cdots > \gamma_k$ *con* $\gamma_1 > \lambda$.
  Ora essendo λ *limite,* γ_1 *non è massimo ovvero esiste* $\xi < \lambda$ *con* $\xi > \lambda_1$.
  Ora per ipotesi induttiva si ha

  $$\omega^\xi > \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

  dunque

  $$\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k < \bigcup_{\xi<\lambda} \omega^\xi = \omega^\lambda$$

Esercizio 27.2 (Non assegnato). *Per ogni α vale $0 \cdot \alpha = 0$*
Dimostrazione.
Mostriamolo per induzione transfinita su α

- $\alpha = 0$ *allora* $0 \cdot = 0$
- $\alpha = \beta + 1$ *allora*
$$0 \cdot (\beta + 1) = 0 \cdot \beta + 0 = 0 + 0 = 0$$
- $\alpha = \lambda$ *limite allora*
$$0 \cdot \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} 0 \cdot \xi = \bigcup_{\xi < \lambda} 0 = 0$$

Esercizio 27.3. *Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti*

(i) $\forall \beta < \alpha$ *si ha* $\beta \cdot \alpha = \alpha$

(ii) $\forall \beta, \gamma < \alpha$ *si ha* $\beta \cdot \gamma < \alpha$

(iii) $\alpha = \omega^{(\omega^\gamma)}$ *per qualche* γ

Dimostrazione.
Andiamo a mostrare le varie implicazioni

- *(i)→(ii) Se $\beta = 0$ allora $\alpha > 0$ da cui $\beta \cdot \gamma = 0 < \alpha$ (esercizio precedente).*
Se $\beta \neq 0$ allora
$$\gamma < \alpha \quad \to \quad \beta \cdot \gamma < \beta \cdot \alpha = \alpha$$
- *(i) → (ii) Essendo α moltiplicativamente chiuso è infinito , lo è additivamente.*
Se $\beta, \gamma < \alpha$ allora se $\beta = \gamma$ si ha $\beta + \gamma = \beta \cdot 2 < \alpha$.
Altrimenti se $\beta \neq \gamma$ supponiamo $\beta > \gamma$ da cui
$$\beta + \gamma < \beta + \beta = \beta \cdot 2 < \alpha$$
Dalla caratterizzazione degli additivamente chiusi otteniamo $\alpha = \omega^\delta$.
Per concludere basta mostrare che δ è additivamente chiuso ovvero $\delta = \omega^\gamma$.
Siano $\xi, \zeta < \delta$ allora $\omega^\xi, \omega^\zeta < \omega^\delta = \alpha$.
Essendo α moltiplicativamente chiuso si ha
$$\alpha > \omega^\xi \cdot \omega^\zeta = \omega^{\xi + \zeta}$$
da cui $\xi + \zeta < \gamma$
- *(ii)→(iii) Sia $\beta < \alpha$ allora se*
$$\beta = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$
è la forma normale di β
Essendo ω^γ additivamente chiuso si ha $1 + \omega^\gamma$ da cui
$$\beta \cdot \alpha = (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot \omega^{\omega^\gamma} = (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot (\omega \cdot \omega^\gamma) =$$
$$= ((\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot \omega) \cdot \omega^{\omega^\gamma} = \omega^{\gamma_1 + 1} \cdot \omega^{\omega^\gamma} = \omega^{(\gamma_1 + 1) + \omega^\gamma} = \omega^{\omega^\gamma}$$
dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che ω^γ additivamente chiuso, mentre l'uguale rosso è una proprietà che mostriamo nell'esercizio successivo

Esercizio 27.4 (Non assegnato). *Dato un ordinale β scritto in forma normale di Cantor*

$$\beta = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

si ha $\beta \cdot \omega = \omega^{\gamma_1 + 1}$
Dimostrazione.
Essendo ω limite si ha

$$(\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot \omega = \bigcup_{n \in \omega} (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot n = \bigcup_{n \in \omega} (\omega^{\gamma_1} \cdot (n_1 \cdot n) + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot (n_k \cdot n))$$

Abbiamo dimostrato che

$$\omega^{\gamma_1} < w^{\gamma_2} \cdot (n_2 \cdot n) + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot (n_k \cdot n)$$

dunque

$$\bigcup_{n \in \omega} (\omega^{\gamma_1} \cdot (n_1 \cdot n) + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot (n_k \cdot n)) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \omega^{\gamma_1} \cdot (n_1 \cdot n)$$

Ma vale anche l'altro contenimento in quanto per ogni $n < \omega$ si ha

$$\omega^{\gamma_1} \cdot (n_1 \cdot n) < \omega^{\gamma_1} \cdot (n_1 \cdot (n+1)) + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot (n_k \cdot (n+1))$$

dunque valgono entrambi i contenimenti da cui

$$(\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot \omega = \bigcup_{n < \omega} w^{\gamma_1} \cdot (n_1 \cdot n) = \bigcup_{n < \omega} \omega^{\gamma_1} \cdot n = w^{\gamma_1} \cdot \omega = \omega^{\gamma_1 + 1}$$

Parte IV.

28 Lezione dell 8 Maggio

Esercizio 28.1. .

- *La somma e il prodotto tra cardinali sono associativi e commutativi*
- $\kappa \cdot (\mu + \eta) = \kappa \cdot \mu + \kappa \cdot \eta$
- $\kappa^\mu \cdot \kappa^\eta = \kappa^{\mu+\eta}$
- $(\kappa^\mu)^\eta = \kappa^{\mu \cdot \eta}$
- *Monotonia. Siano* $\kappa \leq \kappa'$ *e* $\mu \leq \mu'$ *allora*

$$\kappa + \mu \leq \kappa' + \mu'$$

$$\kappa \cdot \mu \leq \kappa' \cdot \mu'$$

$$\kappa^\mu \leq \kappa'^{\mu'}$$

Dimostrazione.

- *Chiaramente è valida la proprietà commutativa per la somma infatti per ogni* A, B *si ha* $A \cup B = B \cup A$.
  Per quanto riguarda il prodotto basta osservare che

  $$\phi : \ A \times B \to B \times A \quad (a, b) \to (b, a)$$

  è una bigezione
- *Siano* B, C *disgiunti allora la funzione*

  $$\psi : \ A \times (B \cup C) \to A \times B \cup A \times C \quad (a, x) \to (a, x)$$

  è una bigezione essendo $B \cap C = \emptyset$
- *Abbiamo già visto queste 2 proprietà all'inizio del corso*
- *Siano* A, A', B, B' *insiemi a 2 a due disgiunti tali che*

  $$|A| = \kappa \quad |A'| = \kappa' \quad |B| = \mu \quad |B'| = \mu'$$

  poichè $\kappa \leq \kappa'$ *e* $\mu \leq \mu'$ *allora esistono iniezioni*

  $$\psi : \ A \to A' \quad \phi : \ B \to B'$$

  - *Per la somma consideriamo la funzione*

    $$\vartheta : \ A \sqcup B \to A' \sqcup B' \quad x \to \begin{cases} \psi(x) \ \ se \ x \in A \\ \phi(x) \ \ se \ x \in B \end{cases}$$

    tale funzione è un iniezione essendolo ψ *e* ϕ

– *Per il prodotto consideriamo la funzione*

$$\Gamma:\ A \times B \to A' \times B' \quad (a,b) \to (\psi(a), \phi(b))$$

essendo ψ, ϕ *iniezioni, anche* Γ *lo è*

– *Per quanto riguarda l'esponenziale (basta considerare il caso infinito, il caso finito è un banale conto combinatorio) , sia* $\star \notin A'$ *allora essendo* A' *infinito si ha* $A' \cup \{\star\}$ *e* A' *sono equipotenti da cui*

$$\kappa'^{\mu'} = |Fun(B', A' \cup \{\star\}|$$

Andiamo a definire la funzione

$$\Lambda:\ Fun(B, A) \to Fun(B', A' \cup \{\star\})$$

tale funzione manda la funzione $f = \{(b, a) \,|\, b \in B\}$ *nella funzione*

$$\Lambda(f) = \{(\phi(b), \psi(a)) \,|\, b \in B\} \cup (B' \setminus \phi[B]) \times \{\star\}$$

.
Tale funzione è iniettiva in quanto se $f \neq g$ *allora esiste* $b \in B$ *con* $f(b) \neq g(b)$ *e dunque* $\Lambda(f)(\phi(b)) \neq \Lambda(f)(\psi(b))$ *dunque* $\Lambda(f) \neq \Lambda(g)$

Dall'iniettività di queste funzioni segue la tesi

Esercizio 28.2. *Verificare che* $c_1^{\aleph} = 2^{\aleph_1}$ ***Dimostrazione.***

$$c^{\aleph_1} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_1} = 2^{\aleph_1}$$

29 Lezione del 12 Maggio

Esercizio 29.1 (Non è stato assegnato). *Per ogni coppia di insiemi A, B otteniamo*

$$|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$$

Dimostrazione.
Supponiamo senza perdere di generalità $|A| \geq |B|$ e sia $\psi : B \to A$ iniezione.
Essendo B infinito si ha che $B \neq \emptyset$ da cui $\exists b_0 \in B$ allora abbiamo

$$|A| \leq |A \times B| \leq |A \times A| = |A|$$

dove abbiamo usato le iniezioni

$$A \to A \times B \quad a \to (a, b_0)$$

$$A \times B \to A \times A \quad (a, b) \to (a, \psi(a))$$

Esercizio 29.2. *Se α, β sono cardinali infiniti allora*

$$\left|\alpha^\beta\right| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$$

Dimostrazione.
Mostriamo la proprietà per induzione infinita su β

- *$\beta = 0$ allora è vera a vuoto in quanto β finito*
- *$\beta = \gamma + 1$*
$$\left|\alpha^\beta\right| = |\alpha^\gamma \cdot \alpha|$$
ora ricordiamo che il prodotto ordinale è definito sul prodotto cartesiano dunque
$$\left|\alpha^\beta\right| = \left|\alpha^\delta \times \alpha\right| = \max\left\{\left|\alpha^\delta\right|, |\alpha|\right\} = \max\{\max\{|\alpha|, |\delta|\}, |\alpha|\} = \max\{|\alpha|, |\delta|\}$$
Osserviamo ora che essendo δ infinito si ha
$$|\delta| = |\delta \cup \{\delta\}| = |\delta + 1|$$
dunque abbiamo la tesi
- *$\beta = \lambda$ limite.*
Osserviamo dunque $\alpha < \alpha^\lambda$ in quanto $\alpha^\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha^\xi$ e $1 < \lambda$.
La mappa
$$\psi : \lambda \to \alpha^\lambda \quad \xi \to \alpha^\xi$$
è un'iniezione.
Abbiamo dunque mostrato $\max\{|\alpha|, |\lambda|\} \leq \left|\alpha^\lambda\right|$. Andiamo a mostrare l'altra inclusione
$$\left|\alpha^\lambda\right| = \left|\bigcup_{\xi<\lambda} \alpha^\xi\right| \leq \sum_{\xi<\lambda} \left|\alpha^\xi\right| = \max\left\{|\lambda|, \sup_{\xi<\lambda} \left|\alpha^\xi\right|\right\}$$
Ora per ipotesi induttiva $\left|\alpha^\xi\right| = \max\{|\alpha|, |\xi|\}$ dunque otteniamo
$$\left|\alpha^\lambda\right| \leq \max\{|\lambda|, |\alpha|\}$$

Esercizio 29.3 (Monotonia della somma infinita). *Siano $\kappa_i \leq \mu_i$ per ogni $i \in I$ allora*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \mu_i$$

Dimostrazione.
Dall'assioma di scelta possiamo definire le seguenti sequenze

$$\langle A_i \,|\, i \in I\rangle \text{ con } |A_i| = \kappa_i \ \forall i \in I$$

$$\langle B_i \,|\, i \in I\rangle \text{ con } |B_i| = \mu_i \ \forall i \in I$$

$$\langle \psi_i \,|\, i \in I\rangle \text{ con } \psi_i :\ A_i \to B_i \text{ iniezione } \ \forall i \in I$$

Andiamo a definire una funzione

$$\psi :\ \sqcup A_i \to \sqcup B_i \quad x \to \psi_i(x) \text{ dove } i \text{ è l'unico indice con } x \in I_i$$

tale funzione ‘e un iniezione essendolo ψ_i.
Dall'iniettività della funzione otteniamo la tesi

Esercizio 29.4 (Associatività infinita). *Se $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ allora*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} \kappa_i \right)$$

Dimostrazione.
Consideriamo

$$\psi :\ \sqcup A_i \to \sqcup_{j\in J} \left(\sqcup_{i\in I_j} A_i\right) \quad x \to x$$

mostriamo che è ben definita.
Sia $x \in \sqcup A_i$ allora esiste unico $\bar{i}$ tale ch ex $\in A_{\bar{i}}$ ora esiste un unico $\bar{j}$ tale che $\bar{i} \in I_{\bar{j}}$.
Inoltre tale funzione è chiaramente iniettiva e suriettiva

Esercizio 29.5. *Se $I = \bigsqcup_{j\in J} A_j$ allora*

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in J} \left(\prod_{i\in I_j} \kappa_i \right)$$

Dimostrazione.
Sia $\langle A_i \,|\, i \in I\rangle$ dove $|A_i| = \kappa_i$.
Andiamo a definire una funzione

$$\psi :\ \times_{i\in I} A_i \to \times_{j\in J} \left(\times_{i\in I_j} A_j\right)$$

Sia $\Gamma = \langle a_i \,|\, i \in I\rangle \in \times_{iinI} A_i$.
Sia

$$\psi(\Gamma) = \langle b_j \,|\, j \in J\rangle \text{ dove } b_j = \langle a_i \,|\, i \in I_j\rangle$$

Mostriamo ora che tale funzione è invertibile.
Sia

$$\Lambda = \langle b_j \,|\, j \in J\rangle \in \times_{j\in J} \left(\times_{i\in I_j} A_i\right)$$

dunque

$$b_j = \langle b_{j,i} \,|\, i \in I_j rangle \text{ dove } b_{j,i} \in A_i$$

Pongo dunque $\phi(\Lambda)$ *come la* I*-sequenza*

$$\langle b_{f(i),i} \,|\, i \in I \rangle \text{ dove } f(i) \text{ è l'unico indice } i \text{ tale che } i \in I_i$$

Per come sono definite le 2 funzioni, una è l'inversa dell'altra

Esercizio 29.6. *Per ogni cardinale* κ *e insieme* I *abbiamo*

$$\prod_{i \in I} \kappa = \kappa^{|I|}$$

Sia A *un insieme con* $|A| = \kappa$ *allora definiamo una funzione*

$$\psi : \times_{i \in I} A \to Fun(I, A)$$

Se $\langle a_i \,|\, i \in I \rangle \in \times_{i \in I} A_i$ *allora si ha* $a_i \in A$.
Possiamo dunque associare alla sequenza la funzione

$$f : I \to A \quad i \to a_i$$

Similmente possiamo definire una funzione

$$\phi : Fun(I, A) \to \times_{i \in I} A$$

Se $g : I \to A$ *allora poniamo* $\phi(g)$ *la sequenza* $\langle g(i) \,|\, i \in \rangle$.
Chiaramente ϕ *e* ψ *sono una l'inversa dell'altra dunque abbiamo*

$$|\times_{i \in I} A_i| = |Fun(I, A)| = \left|A^I\right| = \max\{|A|, |I|\} = \max\{k, |I|\} = k^{|I|}$$

Esercizio 29.7. *Siano* κ *e* μ_i *cardinali allora*

$$\prod_{i \in I} \kappa^{\mu_i} = \kappa^{\sum_{i \in I} \mu_i}$$

Dimostrazione.
Sia

$$\langle A_i \,|\, i \in I \rangle \text{ con } |A_i| = \mu_i$$

e sia B *insieme con* $|B| = \kappa$.
Allora

$$\prod_{i \in I} \kappa^{\mu_i} = |\times_{i \in I} Fun(A_i, B)|$$

$$\kappa^{\sum_{i \in I} \mu_i} = |Fun(\sqcup A_i, B)|$$

Andiamo a definire la funzione

$$\psi : \times_{i \in I} Fun(A_i, B) \to Fun(\sqcup A_i, B)$$

come segue.
Sia

$$\Gamma = \langle c_i \,|\, i \in I \rangle \in \times_{i \in I} Fun(A_i, B)$$

dunque $c_i : A_i \to B$.
Per ogni $a \in \sqcup A_i$ *esiste un unico* i_a *tale che* $a \in A_{i_a}$ *allora pongo*

$$\psi(\Gamma)(a) = c_{i_a}(a)$$

Costruiamo una funzione inversa

$$\phi : Fun(\sqcup A_i, B) \to \times_{i \in I} Fun(A_i, B)$$

Sia $g : \sqcup A_i \to B$ *allora per ogni* $i \in I$ *pongo* $c_i = g_{|A_i}$.
Sia $\phi(g) = \langle c_i \,|\, i \in I \rangle$

Sia $g : \sqcup A_i \to B$, *mostriamo* $\psi \circ \phi(g) = g$.
Se

$$\Gamma = \phi(g) = \langle s_i \,|\, i \in I \rangle$$

allora $\psi(\Gamma)(a) = s_{i_a}(a)$ *dove* i_a *è l'unico indice tale che* $a \in A_{i_a}$.
Ora $s_{i_a}(a) = g_{|A_i}(a) = g(a)$ *e poichè vale per ogni* a *si ha che* $\psi \circ \phi(g) = g$.

Esercizio 29.8. *Siano* κ_i *e* μ *cardinali allora*

$$\left(\prod_{i \in I} \kappa_i \right)^{\mu} = \prod_{i \in I} \kappa_i^{\mu}$$

Dimostrazione.
Sia B *un insieme con* $|B| = \mu$, $\langle A_i \,|\, i \in I \rangle$ *con* $|A_i| = \kappa_i$ *e sia* $A = \times_{i \in I} A_i$.
La tesi equivale a mostrare che

$$|Fun(B, A)| = |\times_{i \in I} Fun(B, A_i)|$$

Sia

$$\psi : \times_{i \in I} Fun(B, A_i) \to Fun(B, A)$$

definita nel modo seguente.
Sia $\langle c_i \,|\, i \in I \rangle \in \times_{i \in I} Fun(B, A_i)$ *dunque per ogni* $i \in I$ *si ha* $c_i : B \to A_i$.
Per ogni $b \in B$ *pongo*

$$\psi(\langle c_i \,|\, i \in I \rangle)(b) = \langle c_i(b) \,|\, i \in I \rangle$$

tale funzione è ben definita in quanto $c_i : B \to A_i$ *dunque* $c_i(b) \in A_i$.
Andiamo a costruire una sua funzione inversa

$$\phi : Fun(B, A) \to \times_{i \in I} Fun(B, A_i)$$

Sia $g : b \to \langle a_i \,|\, i \in I \rangle$ *allora*

$$\phi(g) = \langle h_i \,|\, i \in I \rangle \text{ dove } h_i : B \to A_i \text{ dove } h_i(b) \text{ è l'i-esimo elemento della sequenza } g(b)$$

Mostriamo che

$$\phi \circ \psi(\langle c_i \,|\, i \in I \rangle)) = \langle c_i \,|\, i \in I \rangle$$

Sia $\Gamma = \psi(\langle c_i \,|\, i \in I \rangle)$.
Ora

$$\phi(\Gamma) = \langle h_i \,|\, i \in I \rangle$$

dove $h_i : B \to A_i$ *e* $h_i(b)$ *è l'i-esimo elemento di* Γ.
Ora Γ *per definizione di* ψ *ha come i-esimo elemento* $c_i(b)$ *da cui* $h_i(b) = c_i(b)$

Esercizio 29.9. *Trovare un esempio di prodotto* $\prod_{i<\alpha} k_i$ *dove la sequenza è non-decrescente e* α *ordinale (non cardinale) e tale che la formula vista a lezione non valga.*

30 Lezione del 14 Maggio

Esercizio 30.1. *Sia k un cardinale infinito e $\{A_i \,|\, i \in I\}$ una sequenza di insiemi tali che $|I| \leq k$ e $|A_i| \leq k$ allora*

$$\left|\bigcup_{i|I} A_i\right| \leq k$$

Dimostrazione.
Per ogni $a \in \bigcup_{i\in I} a_i$ poniamo

$$\mathfrak{F}_a = \{i \in I \,|\, a \in A_i\} \neq \emptyset$$

consideriamo adesso $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_a \,|\, a \in A\}$
Sia f la funzione di scelta (A.C.) della famiglia f.
Sia B un insieme tale che $|B| = \kappa$ dunque esiste

$$\langle \psi_i \,|\, i \in I\rangle \quad \psi_i : A_i \to B \text{ iniettiva}$$

Consideriamo la funzione

$$\psi : \bigcup_{i\in I} A_i \to I \times A \quad a \to (f(\mathfrak{F}_a), \psi_{f(\mathfrak{F}_a)}(a))$$

Mostriamo che è iniettiva, siano $a, b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ con $\psi(a) = \psi(b)$ allora abbiamo

$$f(\mathfrak{F}_a) = f(\mathfrak{F}_b) = i$$

Dunque $\phi_i(a) = \phi_i(b)$ da cui $a = b$ essendo ϕ_i iniettiva

Esercizio 30.2. *Se $\kappa_i \leq \mu_i$ per ogni $i \in I$ allora*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \mu_i$$

Dimostrazione.
Siano

$$\langle A_i \,|\, i \in I\rangle \text{ con } |A_i| = \kappa_i \ \forall i \in I$$

$$\langle B_i \,|\, i \in I\rangle \text{ con } |B_i| = \mu_i \ \forall i \in I$$

$$\langle \psi_i \,|\, i \in I\rangle \text{ con } \psi_i : A_i \to B_i \text{ iniezione } \ \forall i \in I$$

Andiamo a definire una funzione

$$\psi : \bigsqcup_{i\in I} A_i \to \times_{i\in I}(B_i \cup \{\star\}) \quad a \to \langle b_i \,|\, i \in I\rangle \text{ dove } b_i = \begin{cases} \star \text{ se } a \notin A_i \\ \phi_i(a) \text{ se } a \in A_i \end{cases}$$

dove $\star \notin B_i$ per ogni $i \in I$.
Mostriamo che è iniettiva.
Siano a, b tali che $\psi(a) = \psi(b)$, distinguiamo 2 casi

- *Esiste i tale che $a, b \in A_i$.*
  Ora l'i-esimo elemento di $\phi(a)$ è $\phi_i(a)$ similmente quello di $\phi(b)$ è $\phi_i(b)$.
  Ora dal fatto che $\phi(a) = \phi(b)$ si ha $\phi_i(a) = \phi_i(b)$ ed essendo ϕ_i iniettivo allora $a = b$

- *Se* $a \in A_i$ *e* $b \in A_j$ *con* $i \neq j$ *allora l'i-esimo elemento di* $\phi(b)$ *è* $\star$ *mente l'i-esimo di* $\phi(a)$ *è* $\phi_i(a) \neq \star$.
  Abbiamo dunque un assurdo essendo $\phi(a) = \phi(b)$.
  Resta da provare che
  $$|\times_{i\in I}(B_i \cup \{\star\}| = |\times_{i\in I} B_i|$$
  Poichè B_i *è infinito esiste*
  $$\Phi = \langle \phi_i \,|\, i \in I \rangle \ \textit{con}\ \phi_i :\ B_i \cup \{\star\} \to B_i \ \textit{bigezione}$$
  dunque
  $$\vartheta :\ \times_{i\in I}(B_i \cup \{\star\} \to \times_{i\in} B_i \quad \langle c_i \,|\, i \in I \rangle \to \langle \phi_i(c_i) \,|\, i \in I \rangle$$

31 Lezione del 15 Maggio

Esercizio 31.1 (Non assegnato). *Per ogni coppia di ordinali α, β si ha*

$$cof(\alpha+\beta) = cof(\beta)$$

Dimostrazione.
Sia $B \subseteq \beta$ illimitato di cardinalità $cof(\beta)$.
Sia $\overline{B} = B \times \{1\}$ allora $\overline{B} \subseteq \alpha+\beta$.
Mostriamo che tale insieme è illimitato in $\alpha+\beta$.
Sia $\delta \in \alpha+\beta$ allora si possono verificare 2 situazioni

- *$\delta = (a, 0)$ con $a \in \alpha$ dunque per come abbiamo definito l'ordine sulla somma di ordinali, preso $b \in B$ si ha $b \in \beta$ e dunque $(b, 1) > \delta$.*
  Abbiamo mostrato che esiste $\overline{b} = (b, 1) \in \overline{B}$ con $\overline{b} > \delta$

- *$\delta = (b, 1)$ con $b \in \beta$.*
  Ora essendo B illimitato in β esiste $b_0 \in B$ con $b_0 > b$.
  Ponendo $\overline{b} = (b_0, 1)$ si ha $\overline{b} \in \overline{B}$ e $\overline{b} > \delta$

Abbiamo dunque che $B \times \{1\}$ è illimitato in $\alpha+\beta$ e dunque

$$cof(\alpha+\beta) \leq \left|\overline{B}\right| = |B \times \{1\}| = |B| = cof\beta$$

In maniera analoga mostriamo che vale l'altra disuguaglianza.
Sia $\overline{B} \in \alpha+\beta$ illimitato di cardinalità $cof(\alpha+\beta)$.
Sia

$$B = \left\{b \in \beta \,|\, (b,1) \in \overline{B}\right\}$$

Mostriamo che B è illimitato in β
Sia $b \in \beta$ allora $(b, 1) \in \alpha+\beta$.
Essendo $\overline{B}$ illimitato in $\alpha+\beta$, esiste $\Gamma \in \overline{B}$ con $\Gamma > (b, 1)$.
Ora $\Gamma = (b_0, 1)$ con $b_0 \in \beta$ e $b_0 > b$.
Infatti se $\Gamma = (a, 0)$ o $b_0 < b$ allora si avrebbe $\Gamma < (b, 0)$.
Abbiamo dunque $b_0 \in B$ con $b_0 > b$.
Abbiamo dunque B illimitato in β da cui

$$cof(\beta) \leq |\beta| = |\beta \times \{1\}| \leq \left|\overline{B}\right| = cof(\alpha+\beta)$$

Esercizio 31.2. *Per ogni ν regolare esistono cardinali arbitrariamente grandi di cofinalità ν.*
Dimostrazione.
Fissato un cardinale κ devo trovare un cardinale strettamente maggiore di κ con cofinalità ν
Poichè κ cardinale, esiste un ordinale α con $\kappa = \aleph_\alpha$.
Essendo ν cardinale, ν è un ordinale limite e quindi $\lambda = \alpha+\nu$ è limite (per un esercizio svolto in precedenza $\alpha+\nu$ successore se e solo se α, ν successori).
Abbiamo visto a lezione che se λ limite allora $cof\,(\aleph_\lambda) = cof(\lambda)$.
Se poniamo $\mu = \aleph_{\alpha+\nu}$ abbiamo $\mu > \kappa$ ed inoltre $cof(\mu) = cof(\nu) = \nu$

Esercizio 31.3. *Mostrare che*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \sum_{i\in I} |A_i|$$

Dimostrazione.
Sia per ogni $a \in \bigcup A_i$ $\mathfrak{F}_a = \{i \in I \,|\, a \in A_i\}$ e consideriamo la famiglia $\mathfrak{F} = \left\{\mathfrak{F}_a \,|\, a \in \bigcup_{i\in I} A_i\right\}$.

Sia f una funzione di scelta per tale famiglia
Consideriamo la funzione

$$\psi : \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigcup A_i \times \{i\} \qquad a \to (a, f(\mathfrak{F}_a)$$

è ben definita ed è un'iniezione in quanto se $\psi(a) = \psi(b)$ allora anche le prime componenti devono essere uguali ovvero $a = b$.
Ora $A_i \times \{i\}$ sono insiemi a 2 a 2 disgiunti di cardinalità A_i da cui

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \times \{i\} \right| = \sum_{i \in I} |A_i|$$

da cui la tesi

Esercizio 31.4. *Se k è un cardinale infinito allora*

$$|Fin(k)| = |Seq(k)| = k$$

Dimostrazione.
Poichè consideriamo solamente sottoinsiemi finiti otteniamo

$$Fin(k) = \bigcup_{n < \omega} Fin_n(\omega) \text{ dove } Fin_n(k) = \{A \subseteq k \,|\, |A| = n\}$$

Osserviamo ora $|Fin_n(k)| \leq k$ infatti possiamo definire una funzione

$$\psi :\, Fin_n(k) \to k^n$$

dove se $A \subseteq k$ di cardinalità n allora posso enumerare i suoi elementi $(a_i \,|\, i < n)$ dunque

$$\psi(A) :\, n \to k \quad i \to a_i$$

Tale funzione è una chiara iniezione infatti se $A \neq B$ allora esiste $a \in A$ con $a \notin B$ da cui $a \in Imm\psi(A)$ ma $a \notin Imm\psi(B)$ da cui $\psi(A) \neq \psi(B)$.
Dunque abbiamo $|Fin_n(k)| \leq |k|^n = \max\{k, n\} = k$ otteniamo dunque

$$|Fin(k)| \leq \sum_{n < \omega} |Fin_n(k)| \leq \sum_{n < \omega} k = k \cdot \aleph_0 = k$$

L'altra disuguaglianza si ottiene considerando la funzione

$$\pi :\, k \to Fin(k) \quad \xi \to \{\xi\}$$

Per quanto riguarda le sequenze finite possiamo fare un discorso analogo osservando che

$$Seq(k) = \bigcup_{n < w} Seq_n(k) \text{ dove } Seq_n(k) = \{a \in Seq(k) \,|\, a \text{ "lunga" } n\}$$

Allora se consideriamo la funzione

$$\phi :\, Seq_n(k) \to k^n \quad \langle a_i \,|\, i \in n \rangle \to \{(i, a_i) \,|\, i \in n\}$$

è una ben definita iniezione dunque in analogia al caso degli insiemi finiti si conclude osservando che $|Seq(k)| \leq k$.
Per l'altra disuguaglianza consideriamo la funzione

$$\rho :\, k \to Seq(k) \quad \xi \to \langle \xi \rangle$$

32 Lezione del 19 Maggio

Esercizio 32.1.

$$x \subseteq y \in V_\alpha \quad \to \quad x \in V_\alpha$$

Dimostrazione.
Mostriamolo per induzione transfinita su α

- $\alpha = 0$ *vera a vuoto*
- $\alpha = \lambda$ *limite.*
  Se $y \in V_\lambda$ *allora esiste* $\xi < \lambda$ *con* $y \in V_\xi$ *dunque* $x \subseteq y \in V_\xi$ *per cui* $x \in V_\xi$ *(ipotesi induttiva).*
  Ora poichè $V_\xi \subseteq V_\lambda$ *abbiamo* $x \in V_\lambda$
- $\alpha = \delta + 1$ *allora poichè* $y \in V_{\delta+1} = \mathcal{P}(V_\delta)$ *si ha* $y \subseteq V_\delta$.
  Dunque abbiamo $x \subseteq y \subseteq V_\delta$ *ovvero* $x \subseteq V_\delta$ *da cui* $x \in V_{\delta+1}$

Esercizio 32.2. *Sia* $\mathfrak{F} \in V_\alpha$ *allora* $\bigcup \mathfrak{F} \in V_\alpha$
Dimostrazione.
Possiamo assumere che esista $\beta < \alpha$ *tale che* $\forall A \in \mathfrak{F}\ A \in V_\beta$ *infatti per ogni* $A \in \mathfrak{F}$ *si ha*

$$A \in \mathfrak{F} \in V_\alpha \quad \to \quad \exists \gamma < \alpha \quad A \in V_\beta$$

.
Andiamo ora a dimostrare che $\bigcup \mathfrak{F} \subseteq V_\beta$ *infatti*

$$\bigcup \mathfrak{F} \subseteq V_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(x \in \bigcup \mathfrak{F} \quad \to \quad x \in V_\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(\exists A \in \mathfrak{F} \wedge x \in A \quad \to \quad x \in V_\beta)$$

Ora l'ultima implicazione è vera, infatti se $A \in \mathfrak{F}$ *allora* $A \in V_\beta$ *dunque per transitività*

$$x \in A \in V_\beta \quad \to \quad x \in V_\beta$$

Abbiamo dunque $\bigcup \mathfrak{F} \subseteq \beta$ *ovvero*

$$\bigcup \mathfrak{F} \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$$

in quanto se $\beta < \alpha$ *allora* $\beta + 1 \leq \alpha$

Esercizio 32.3. *Sia* A *un insieme, consideriamo la successione di insiemi definita per ricorsione numerabile*

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = \bigcup A_n \end{cases}$$

poniamo

$$TC(A) = \bigcup_{n<w} A_n$$

mostrare che $TC(A)$ *è la chiusura transitiva di* A *ovvero il più piccolo insieme transitivo che contiene* A .
Dimostrazione.
La dimostrazione consta di 2 parti, nella prima dimostriamo che $TC(A)$ *è un insieme transitivo, nella seconda mostreremo che* Y *transitivo che contiene* A *allora* $TC(A) \subseteq Y$

Sia $x \in y \in TC(A)$ *allora esiste* $n < \omega$ *con* $y \in A_n$ *da cui* $x \in A_{n+1}$ *infatti* $x \in A_n$ *ovvero* $x \in \bigcup A_n$

Sia Y un insieme transitivo che contiene A.

$$TC(A) \subseteq Y \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup_{n<\omega} A_n \subseteq Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall n < w\ (A_n \subseteq Y)$$

Mostriamo l'ultima proprietà per induzione su n

- $n = 0$ *allora si ha* $A = A_0 \subseteq Y$ *per ipotesi*
- *Supponiamo* $A_n \subseteq Y$ *allora per transitività abbiamo* $A_{n+1} = \bigcup A_n \subseteq Y$

Esercizio 32.4. $A \in V_\alpha$ *allora* $TC(A) \in V_\alpha$.
Dimostrazione.
Mostriamolo per induzione transfinita su α

- $\alpha = 0$ *vera a vuoto*
- $\alpha = \gamma + 1$ *allora se* $A \in V_{\gamma+1}$ *abbiamo* $A \subseteq V_\gamma$.
  Ora V_γ è un insieme transitivo che contiene A dunque per minimalità della chiusura transitiva abbiamo
  $$TC(A) \subseteq V_\gamma \quad \to \quad TC(A) \in V_{\gamma+1} = V_\alpha$$
- $\alpha = \lambda$ *limite.*
  Ora $A \in V_\lambda$ implica che esista $\gamma < \lambda$ con $A \in V_\gamma$, sia
  $$\xi = \min\{\gamma \mid A \in V_\gamma\}$$
  Mostriamo che ξ è successore.
  $\xi \neq 0$ in quanto $A \in V_0$ vera a vuoto.
  Se per assurdo ξ fosse limite allora $A \in V_\xi$ implicherebbe l'esistenza di $\zeta < \xi$ con $A \in V_\zeta$ (contro la minimalità di ξ).
  Abbiamo provato che $\xi = \eta + 1$ dunque $A \subseteq V_\eta$.
  Ora per minimalità della chiusura transitiva abbiamo $TC(A) \subseteq V_\eta$ dunque $TC(A) \in V_{\eta+1} \subseteq V_\lambda$

33 Lezione del 21 Maggio

Esercizio 33.1.

$$\textit{Non esistono catene } \epsilon\textit{-discendenti} \quad \to \quad \textit{Assioma di Fondazione}$$

Dimostrazione.
Supponiamo che non valga la fondazione, dunque esiste $x \neq \emptyset$ tale che $\forall y \in x$ si ha $y \cap x \neq \emptyset$. Allora detta f una funzione di scelta per $\mathcal{P}(X)$ e preso $x_0 \in X$ definiamo per ricorsione numerabile

$$x_{n+1} = f(x_n \cap x)$$

abbiamo dunque costruito una catena

$$x_0 \ni x_1 \cdots \ni x_n \ni \dots$$

infinita discendente.

Esercizio 33.2. *Sia $x \in V_\beta$ allora esiste $\alpha < \beta$ con $x \subseteq V_\alpha$*
Dimostrazione.
Mostriamo la proprietà per induzione transfinita su α

- $\beta = 0$ *vera a vuoto*
- $\beta = \delta + 1$ *allora*
$$x \in V_{\delta+1} = \mathcal{P}(V_\delta) \quad \to \quad x \subseteq V_\delta$$
dunque possiamo porre $\alpha = \delta < \beta$
- $\beta = \lambda$ *limite*
$$x \in V_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi$$
Allora è ben posto
$$\xi = \min \{\alpha < \lambda \,|\, x \in V_\alpha\}$$
Allora $\xi \neq 0$ in quanto se $\xi = 0$ allora $x \in \emptyset$ il che è assurdo.
Osserviamo che ξ non è limite altrimenti da $x \in V_\xi = \bigcup_{\delta<\xi} V_\delta$ seguirebbe $x \in V_\eta$ per $\eta < \xi$ contro la minimalità di ξ.
Abbiamo, dunque $\xi = \alpha + 1$ dunque
$$x \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \quad \to \quad x \subseteq V_\alpha$$

Esercizio 33.3. *Mostrare che per ogni α ordinale*

$$|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$$

ed in particolare per $\alpha \geq \omega^2$ si ha

$$|V_\alpha| = \beth_\alpha$$

Dimostrazione.
Mostriamo la proprietà per induzione transfinita su α

- $\alpha = 0$ *ora*
$$|V_\omega| = \left| \bigcup_{n<\omega} V_n \right|$$
Dunque V_ω è unione numerabile di insiemi finiti dunque ha cardinalità al più numerabile.
Inoltre abbiamo osservato che per ogni α ordinale si ha $\alpha \in V_\alpha + 1$ dunque $\omega \subseteq V_\omega$.
Valgono entrambe le inclusioni dunque per Cantor-Bernstain si ha $|V_\omega| = \aleph_0 = \beth_0$

- $\alpha = \delta + 1$ *allora*
$$|V_{\omega+\alpha}| = \left|V_{\omega+(\delta+1)}\right| = \left|V_{(\omega+\delta)+1}\right| = 2^{|V_{\omega+\delta}|} = 2^{\beth_\delta} = \beth_\alpha$$

- $\alpha = \lambda$ *limite.*
$$|V_{\omega+\lambda}| = \left|\bigcup_{\xi<\lambda} V_{\omega+\xi}\right| \leq \sum_{\xi<\lambda} |V_\xi| = \sum_{\xi<\lambda} \beth_\xi = \max\{|\lambda|, \beth_\lambda\} = \beth_\lambda$$
In quanto abbiamo osservato che $|\alpha| \leq \beth_\alpha$ *per ogni* α.
Andiamo a mostrare l'altra inclusione, per ogni $\delta < \lambda$ *si ha*
$$|V_{\omega+\lambda}| \geq |V_{\omega+\delta}| = \beth_\delta$$
e poichè tale disuguaglianza vale per ogni $\delta < \lambda$ *possiamo concludere*
$$|V_{\omega+\lambda}| \geq \beth_\lambda$$

L'altra proprietà segue dal fatto che se $\alpha \geq \omega^2$ *allora* $\omega + \alpha = \alpha$

Esercizio 33.4. *Trovare il minimo* α *tale che*

- $\mathbb{Z} \in V_\alpha$
- $\mathbb{Q} \in V_\alpha$
- $\mathbb{R} \in V_\alpha$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in V_\alpha$

Dimostrazione.
Osserviamo che $\omega \in V_{\omega+1}$ *w* $\omega \notin V_\omega$ *in quanto abbiamo visto che per ogni* α *ordinale* $\alpha \subseteq V_\alpha$ *ma* $\alpha \notin V_\alpha$.

- *Ricordiamo che abbiamo definito* $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \sim$ *dove* $(a, b) \sim (c, d)$ *se e solo se* $a + d = b + c$.
Abbiamo dunque che $\mathbb{Z}$ *è un insieme di coppie ordinate.*
Mostriamo per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ *in quale livello della gerarchia appartiene la coppia ordinata* (n, m).
Abbiamo definito la coppia ordinata come la coppia di kuratowski $\{\{n\}, \{n, m\}\}$.
Se assumiamo $n > m$ *abbiamo che* $n, m \in V_{n+1}$ *dunque* $\{n\}, \{n, m\} \in V_{n+2}$.
Abbiamo dunque $\{\{n\}, \{n, m\}\} \subseteq V_{n+2}$ *ovvero* $(n, m) \in V_{max\{n,m\}+3}$.
Possiamo quindi affermare che $\mathbb{Z} \subseteq V_\omega$ *infatti per quanto abbiamo mostrato in precedenza ogni coppia ordinata* (n, m) *appartiene ad un livello finito. Ora* $\mathbb{Z} \notin V_\omega$ *infatti se così fosse si avrebbe* $\omega \subseteq \mathbb{Z} \in V_\omega$ *da cui per l'esercizio 5.1 si avrebbe* $\omega \in V_\omega$ *il che è assurdo.*
Abbiamo dunque che $\mathbb{Z}$ *appartiene al livello* $V_{\omega+1}$ *e non esistono livelli inferiori a cui* $\mathbb{Z}$ *appartenga*

- *Con un ragionamento analogo possiamo dire che il minimo livello a cui appartiene* $\mathbb{Q}$ *è* $V_{\omega+1}$ *infatti abbiamo definito* $\mathbb{Q}$ *come l'insieme* $\mathbb{Z} \times N$ *per una relazione di equivalenza.*

- *Abbiamo definito il campo dei reali come l'insieme*
$$\mathbb{R} = \{X \subseteq \mathbb{Q} \,|\, X \text{ taglio di Dedekind}\}$$
dunque $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}$ *ovvero* $\mathbb{R} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ *dunque il minimo livello a cui appartiene* $\mathbb{R}$ *è* $\mathcal{P}(V_{w+1}) = V_{w+2}$

Esercizio 33.5. *Mostrare che se k limite forte allora* $\kappa^{cof(\kappa)} = 2^\kappa$
Dimostrazione.
Vista a lezione

34 Lezione del 22 Maggio

Esercizio 34.1. *Esistono livelli κ non accessibili con $|V_\kappa| = \kappa$ e se $A \in V_\kappa$ allora $|A| < \kappa$*

Esercizio 34.2. *Mostrare che per ogni α vale*

$$V_\alpha \models Vuoto, Unione, Estensione, Separazione, Fondazione$$

Dimostrazione.

.

- *Vuoto. Per definizione $V_0 = \emptyset$ e dunque $\emptyset \in V_1$.*
  Ora per ogni ordinale α diverso da 0 abbiamo $V_1 \subseteq V_\alpha$ dunque per ogni $\alpha > 0$ si ha $\emptyset \in V_\alpha$ dunque $V_\alpha \models Vuoto$
- *A lezione abbiamo dimostrato che ogni insieme transitivo soddisfa la separazione e che V_α è transitivo.*
  Dunque per ogni α si ha $V_\alpha \models Estensione$
- *Unione. Mostriamo*
  $$A \in V_\alpha \quad \to \quad \bigcup A \in V_\alpha$$
  - *$\alpha = 0$ vera a vuoto*
  - *$\alpha = \beta + 1$ allora se $A \in V_{\beta+1}$ abbiamo $A \subseteq V_\beta$.*
    Ora $x \in \bigcup A$ se e solo se $\exists y \in A$ con $x \in y$.
    Abbiamo dunque $x \in y \in A \subseteq V_\beta$ dunque essendo V_β transitivo abbiamo $x \in V_\beta$.
    Abbiamo provato che
    $$\bigcup A \subseteq V_\beta \quad \to \quad A \in V_{\beta+1}$$
  - *$\alpha = \lambda$ limite. Da $A \in V_\lambda$ si ha che $\exists \eta < \lambda$ con $A \in V_\eta$.*
    Sia
    $$\xi = \min \{\gamma \leq \eta \,|\, A \in V_\gamma\}$$
    Ora $\xi \neq 0$ infatti $A \in V_\xi \neq \emptyset$ e ξ non è limite in quanto se lo fosse da $A \in V_\xi$ si avrebbe che esiste $\delta < \xi$ con $A \in V_\delta$ contro la minimalità di ξ.
    Abbiamo dunque mostrato che ξ è successore. Per il caso precedente abbiamo $A \in V_\xi \to \bigcup A \in V_\xi \subseteq V_\lambda$
- *Separazione.*
  $V_\alpha \models$ Separazione se per ogni formula $\psi(x, A_1, \ldots, A_n)$ dove $x, A_1, \ldots, A_n$ vale la proprietà
  $$\forall A_1, \ldots, A_n, B \in V_\alpha \quad C = \{x \in B \,|\, \psi(x, A_1, \ldots, A_n) \in V_\alpha\}$$
  - *Se $\alpha = 0$ vera a vuoto*
  - *$\alpha = \beta + 1$ Allora $B \subseteq V_\beta$ e di conseguenza $C \subseteq V_\beta$ infatti se $x \in C$ allora $x \in B \subseteq B$ dunque $x \in V_\beta$.*
    Abbiamo dunque $\forall x \in C$ si ha $x \in V_\beta$ di conseguenza $C \subseteq V_\beta$ ovvero $C \in V_{\beta+1}$
  - *$\alpha = \lambda$ limite.*
    Poichè $B \in V_\lambda$ è garantita l'esistenza di $\gamma < \lambda$ tale che $B_\in V_\gamma$.
    Posto
    $$\xi = \min \{\delta \leq \gamma \,|\, B \in V_\delta\}$$
    si ha che ξ è successore (stessa argomentazione della dimostrazione dell'unione) dunque per il punto precedente $B \in V_\xi$ implica $C \in V_\xi$ dunque $C \in V_\lambda$

- *Fondazione.*
  Supponiamo per assurdo che non valga la fondazione, dunque esiste una catena discendente
  $$x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni \dots$$
  Ora passando ai ranghi otteniamo una catena discendente di ordinali
  $$\rho(x_0) > \rho(x_1) > \cdots > \rho(x_n) > \dots$$
  il che è assurdo

Esercizio 34.3 (Non assegnato)**.** *Sia $f : A \to B$ allora*
$$f \in V_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad A, Immf \in V_\alpha$$
la freccia $\Leftarrow$ vale se $\alpha = \lambda$ limite.
Dimostrazione.
$\to$ Se $f \in V_\alpha$ allora poichè $V_\alpha \models Unione$ allora $\bigcup f, \bigcup\bigcup f \in V_\alpha$.
Ora se
$$C = \left\{x \in \bigcup\bigcup f \,|\, |\{x\} \in \bigcup f\right\}$$
Ora $V_\alpha \models Separazione$ dunque $C \in V_\alpha$.
Per un'esercizio già svolta sappiamo che $C = domf = A$.
Similmente sappiamo che
$$Immf = \left\{x \in \bigcup\bigcup f \, \exists a \in A \ (a, x) \in f\right\}$$
Per motivi analoghi a sopra si ha $Immf \in V_\alpha$.

$\Leftarrow$ Sappiamo, da esercizio visto a lezione, che per definire il prodotto cartesiano tra 2 insiemi bastano gli assiomi di Unione, Coppia, Separazione.
Dunque poichè $A, Immf \in V_\lambda$ si ha $A \times Immf \in V_\lambda$.
Ora
$$f \subseteq A \times Immf \in V_\lambda \quad \to \quad f \in V_\lambda$$

Esercizio 34.4 (Modelli naturali della teoria degli insiemi)**.** .

- *$V_\alpha \models Potenza$ se e solo se α limite*
- *$V_\alpha \models Infinito$ se e solo se $\alpha > \omega$*
- *Per quali α vale se $A, B \in V_\alpha$ allora $Fun(A, B) \in V_\alpha$?*
- *Per quali α si ha $V_\alpha \models A.C.$ (dove usiamo la formulazione per ogni X non vuoto esiste $f : \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X$ con $f(A) \in A$ per ogni A)*

Dimostrazione.
$\to$ Supponiamo α sia successore ovvero $\alpha = \beta + 1$ allora $\beta \in V_\alpha$.
Se, per assurdo, $\mathcal{P}(\beta) \in V_\alpha$ allora $\mathcal{P}(\beta) \subseteq V_\beta$ ma $\beta \in \mathcal{P}(\beta)$ dunque $\beta \in V_\beta$ il che è assurdo.
$\Leftarrow$ Sia $A \in V_\lambda$ con λ limite, allora $A \in V_\gamma$ con $\gamma < \lambda$.
Sia $x \in \mathcal{P}(A)$ allora $x \subseteq A \in V_\gamma$ da cui sia
$$\alpha_x = \min\{\delta \leq \gamma \,|\, x \in V_\delta\}$$
Abbiamo definito la funzione-classe $x \to \alpha_x$ dunque per rimpiazzamento esiste l'insieme $\Gamma = \{\alpha_x \,|\, x \in \mathcal{P}(A)\}$.
Sia $\xi = \sup \Gamma$ allora abbiamo $\xi \leq \gamma$ ed inoltre $\mathcal{P}(A) \in V_\xi$ dunque
$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) \in V_\xi \subseteq V_\lambda$$

$\rightarrow$ *Poichè* $V_\alpha \models Infinito$ *allora esiste* $Y \in V_\alpha$ *con* Y *induttivo.*
Ora ricordando che avevamo definito n *naturale se e solo se* n *appartiene ad ogni insieme induttivo, abbiamo* $\omega \subseteq Y \in V_\alpha$.
Ora se $\alpha \leq \omega$ *avremmo* $\omega \in V_\alpha \subset V_\omega$ *il che è assurdo.*
$\Rightarrow$ *Poichè* $\alpha > \omega$ *allora* $V_{w+1} \subseteq V_\alpha$.
Dal fatto che $\omega \in V_{\omega+1}$ *abbiamo* $\omega \in V_\alpha$.
Dunque V_α *contiene un insieme induttivo (abbiamo dimostrato che* ω *è induttivo) e dunque* $V_\alpha \models Infinito$

Già visto a lezione

Sappiamo che per ogni $X \in V_\alpha$ *esiste una funzione* $f : \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \rightarrow X$.
Lo scopo è trovare per quali α *si ha* $f \in V_\alpha$. *Se* $\alpha = \lambda$ *limite allora da* $X \in V_\lambda$ *segue che* $X \in V_\delta$ *con* $\delta < \lambda$.
Ora $\mathcal{P}(X) \subseteq V_\delta$ *infatti* $\forall y \in \mathcal{P}(X)$ *si ha* $y \subseteq x$ *dunque* $y \subseteq x \in V_\delta$ *da cui* $y \in V_\delta$.
Dunque $\mathcal{P}(X) \setminus \emptyset, X \in V_\lambda$.
Dall'esercizio precedente segue che $f \in V_\lambda$.
Se $\alpha = \beta + 1$ *allora* $\beta \in V_{\beta+1}$ *dunque ponendo* $X = \beta$ *abbiamo per l'esercizio precedente* $\mathcal{P}(\beta) \setminus \emptyset \in V_{\beta+1}$ *Ora* $\{\beta\} \subseteq \mathcal{P}(\beta) \setminus \emptyset \in V_\beta + 1$ *dunque* $\{\beta\} \in V_{\beta+1}$ *ovvero* $\{\beta\} \subseteq V_\beta$ *e poichè* $\beta \in \{\beta\}$ *abbiamo che* $\beta \in V_\beta$ *il che è assurdo*

Esercizio 34.5. *Può capitare che* $A \times A = A$ *? e che* $A \times A \subsetneq A$
Dimostrazione.
Visto a lezione