Qui riunisco gli appunti che non so se possono servire a qualcosa

1 14 NOVEMBRE

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia W un suo sottospazio vettoriale

Introduciamo la seguente relazione d'equivalenza

$$U \sim_W U' \quad \Leftrightarrow \quad U - U' \in W$$

Pooiché é una relazione d'equivalenza posso passare al quoziente in modo canonico

$$\pi : V \to \frac{V}{W}$$

tale proiezione é lineare e surgettiva.
$Ker\phi = W$

Sia U uno spazio complementare di W in V allora $V = W \oplus U$

$$P_U : V \to U \quad v \to u$$

infatti

$$\forall v \in V \quad \exists! u \in U \, w \in W \quad v = u + w$$

P_U é lineare e surgettiva e $kerP_U = W$ Sia U come prima e consideriamo la restrizione di ϕ a

U.
Tale restrizione risulta un isomorfismo infatti

- lineare perché ϕ lo era
- iniettiva
  il Kernel é composto dagli elementi di W, ora $W \cap U = \{0\}$ quindi il kernel é ridotto al solo 0
- surgettiva.
  $\forall v \quad v = u + w \quad [v] = [w] + [u]$ ma $[w] = 0$ quindi $[v] = \pi(u) \quad u \in U$ quindi anche la restrizione é surgettiva.

Supponiamo che U e U' siano 2 complementari di U
Esiste : $\varphi : U \to U'$ isomorfismo canonico

$$\pi_{|U} : U \to \frac{V}{W} \quad \text{isomorfismo}$$

$$\pi_{|U'} : U \to \frac{V}{W} \quad \text{isomorfismo}$$

segue che

$$\phi = (\pi_{|U'})^{-1} \circ (\pi_{|U})$$

Osservazione 1. Un isomorfismo si dice canonico se non dipende da scelte arbitrali

2 Due modi duali di presentare un sottospazio

Sia $W \subseteq \mathbb{K}^n$ e sia inoltre $\dim W = m$.

Definizione 2.1 (Forma parametrica)**.** Sia $W = Span(w_1, \cdots, w_n)$ un sottospazio di $\mathbb{K}^n$.

$$W = Im(A)$$

dove

$$A : K^m \to V \text{ con } A = (w_1 | \cdots |w_p)$$

con $A \in M(m, n, \mathbb{K})$
A porta la base canonica di $\mathbb{K}^m = \{E_1, \cdots E_m\}$ in una base D di W $\{w_1 \cdots w_n\}$ tale funzione é iniettiva

Definizione 2.2 (Forma cartesiana)**.**

$$W = ker(A)$$

dove

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n-m}$$

surgettiva con $A \in M(n - m, m, \mathbb{K})$

Osservazione 2. In entrambe le rappresentazioni $rk(A)$ é il massimo possibile

- Parametrica $rk(A) = m$ ma il rango é minore del minimo tra m e n e quindi m é il massimo possibile
- Cartesiana Essendo surgettiva $rk(A) = n - m$ ma in questo caso il rango é minore del minimo tra $n - m$ é n quindi é di nuovo il massimo possibile

3 19 Dicembre

Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso.
Sia $n \in \mathbb{N}$

Definizione 3.1.

$$\mathfrak{P}_n = \{p \in \mathbb{K}[t] \,|p \text{ monico e } \deg p = m\}$$

Identifichiamo canonicamente

$$\mathfrak{P}_n \cong \mathbb{K}^n \qquad p(t) = a_0 + cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n \to \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\phi : \mathbb{K}^n \to \mathfrak{P}_n \cong \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \to (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n)$$

Allora

(i) ϕ é una funzione polinomiala di $\mu_1, \cdots, \mu_n$

(ii) ϕ é surgettiva perché $\mathbb{K}$ é chiuso

(iii) ϕ non é iniettiva perché i coefficienti dell'immagine sono simmetrici

C'é una naturale azione del gruppo simmetrico S_n su $\mathbb{K}^n$.

$$\phi \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ mu_n \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} \mu_1' \\ \vdots \\ mu_n' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_n \begin{pmatrix} \mu_1' \\ \vdots \\ mu_n' \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ mu_n \end{pmatrix}$$

Definizione 3.2.

$$\Delta_n = \{p \in \mathfrak{P}_n \,|\, \exists \mu \, p(\mu) = 0 \text{ e } m_\mu = 1\}$$

dove m_μ indica la molteplicitá algebrica.

$$\tilde{\Delta_n} = \phi^{-1}(\Delta_n)$$

SIa

$$P_{ij} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, \mu_i = \mu_j \right\}$$

Allora P_{ij} é un iperpiano di $\mathbb{K}^n$ ($\dim P_{ij} = n - 1$) e

$$\tilde{\Delta_n} = \bigcup_{i \neq j} P_{ij}$$

Sia $p(t) \in \Delta_n$ allora

$$p(t) = (t-\mu)^2 q(t)$$

deriviamo

$$p'(t) = 2(t-\mu)q(t) + (t-\mu)^2 q'(t) = (t - /mu)a(t)$$

per un certo $a(t)$.
Quindi condizione necessaria (e sufficiente) affinché μ sia radice multipla di p e che $p'(\mu) = 0$
Sia $p(t) \in \mathfrak{P}_n$ con

$$p(t) = \phi \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Allora vale

$$p(t) \in \Delta_n \Leftrightarrow p'(\mu_1) \cdots p'(\mu_n) = 0$$

Esempio 3.1. *Sia* $n = 2$

$$\phi \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = t^2 - (\mu_1 + \mu_2)t + \mu_1\mu_2 = p(t)$$

Siano a_1 *e* a_2 *tali che* $p(t) = t^2 - a_1 t + a_0$ *allora*

$$p'(t) = 2t + a_1$$

Da cui

$$p'(\mu_1)p'(\mu_2) = (2\mu_1 + a_1)(2\mu_2 + a_1) = 4\mu_1\mu_2 + 2a_1(\mu_1 + \mu_2) + a_1^2 = 4a_0 - a_1^2$$

quindi

$$\delta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, 4a_0 - a_1^2 \right\}$$

Viene chiamato luogo discriminante di $\mathfrak{P}_n$

4 Isometria tra complementi del radicale

Proposizione 4.1. *Due complementari del radicale di ϕ sono canonicamente isomorfi.*

Dimostrazione.

$$V = U_1 \oplus Rad(\phi) = U_2 \oplus Rad(\phi)$$

Dunque

$$\forall u \in U_1 \quad \exists! z \in Rad(\phi)\, u_2 \in U_2 \quad u = u + u_2$$

Definisco ora

$$g: U_1 \to U_2 \qquad u = z + u_2 \to u_2$$

Dimostriamo che g é un isometria

- Mostriamo che g é un isomorfismo.
  Essendo $\dim U_1 = \dim U_2$ mostriamo che g é iniettiva.
  $u \in \ker g \quad \Leftrightarrow \quad u \in U \cap Rad(\phi)$ ma come abbiamo visto nella proposizione precedente $Rad(\phi_{|U}) = \{0\}$

- Mostriamo che g preserva il prodotto scalare.
  Siano $u, w \in U_1$ allora

$$u = z_1 + u_2 \qquad w = z_2 + w_2 \qquad \text{con } z_1, z_2 \in Rad(\phi) \text{ e } u_2, w_2 \in U_2$$

$$\phi(u, w) = \phi(z_1 + u_2, z_2 + w_2) = \phi(z_1, z_2) + \phi(u_2, z_2) + \phi(z_1, w_2) + \phi(u_2, w_2) = \phi(u_2, w_2) = \phi(g(u), g(w))$$

5 Una BUONA dimostrazione sulla dimensione dell'ortogonale

Sia (V, ϕ) con ϕ prodotto scalare su V
Definiamo lo spazio quoziente $V \backslash \phi$ con l'usuale relazione $v \sim v' \Leftrightarrow v - v' \in Rad\phi$
Con questa costruzione ϕ passa al quoziente infatti definiamo

$$\hat{\phi}([v],[w]) = \phi(v,w)$$

Notiamo che tale definizione é ben definita infatti non dipende dai rappresentanti

$$[v] = [v + z_1] \text{ e } [w] = [w + z_2] \quad z_1, z_2 \in Rad\phi$$

$$\hat{\phi}([v+z_1],[w+z_2]) = \phi(v+z_1, w+z_2) = \phi(v,w)$$

Proposizione 5.1 (Caso non degenere)**.**
Sia V uno spazio vettoriale con ϕ prodotto vettoriale non degenere.
Sia $W \subseteq V$ sottospazio. Allora

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$$

Dimostrazione. Considero l'isomorfismo

$$V \xrightarrow{F_\phi} V^*$$

Vediamo chi é l'immagine dell'annullatore.

$$v \in W^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \phi(v,w) = 0 \quad \forall w \in W \quad \Rightarrow \quad \varphi_v \equiv 0 \quad \forall v \in W$$

Quindi l'immagine di $W^{\perp}$ mediante l'annullatore é l'annullatore di W quindi

$$\dim W^{\perp} = \dim Ann(W) = \dim V - \dim W$$

□

Sia V uno spazio vettoriale e Z un suo sottospazio.
Possiamo definire lo spazio quoziente e la proiezione al quoziente

$$\pi : V \to V \backslash Z \qquad v \to [v]$$

Proposizione 5.2. *$W \subseteq V$ sottospazio*

$$\pi(W) = W \backslash (W \cap Z)$$

Dimostrazione. Siano

$$w_1, w_2 \in W \quad \text{t. c .} \quad [w_1] = [w_2] \quad \Rightarrow \quad w_1 = w_2 + z \text{ con } z \in Z$$

$$z = w_1 - w_2 \quad \Rightarrow z \in W \cap Z$$

Specializziamo munendo V di un prodotto scalare ϕ e ponendo $Z = Rad\phi$.
Come abbiamo osservato ϕ discende allo spazio quoziente .

Proposizione 5.3. *$\hat{\phi}$ é non degenere.*

Dimostrazione.

$$[v] \in Rad\,\phi \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi}([v],[w]) = 0 \quad \forall [w] \in V \backslash Rad\,\phi \quad \Rightarrow \quad \phi(v,w) = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v \in Rad\,\phi \quad \Rightarrow \quad [v] = [0] \quad \Rightarrow \quad Rad\,\phi = \{0\}$$

□

Proposizione 5.4 (Caso degenere)**.**
Sia V uno spazio vettoriale con ϕ prodotto scalare degenere.
Sia $W \subseteq V$ sottospazio.
Allora

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim(W \cap Rad\,\phi)$$

Dimostrazione.

$$\dim \left(\frac{W}{W \cap Rad\,\phi}\right)^{\perp\hat{\phi}} = \dim \frac{V}{Rad\,\phi} - \dim \frac{W}{W \cap Rad\,\phi} \quad \hat{\phi} \text{ é non degenere}$$

Inoltre per quanto detto sopra

$$\pi\left(W^{\perp\phi}\right) = \frac{W^{\perp\phi}}{W^{\perp\phi}} = \frac{W^{\perp\phi}}{Rad\phi} \quad \text{infatti } Rad\phi \subseteq W^{\perp\phi}$$

Resta da provare che

$$\frac{W^{\perp\phi}}{Rad\,\phi} = \left(\frac{W}{W \cap Rad\,\phi}\right)^{\perp\hat{\phi}}$$

Infatti

$$\pi(W^{\perp}) = \left\{[v] \in \frac{V}{Rad\,\phi} \mid \phi(v,w) = 0\,\forall w \in W\right\} =$$

$$= \left\{v \in \frac{V}{Rad\,\phi} \mid \hat{\phi}([v],[w])\,\forall[w] \in \pi(W)\right\} = \left(\frac{W}{W \cap Rad\,\phi}\right)$$

Dunque calcolando le dimensioni da entrambi i lati otteniamo

$$\dim W^{\perp} - \dim Rad\,\phi = \dim V - \dim Rad\,\phi - \dim W + \dim W \cap Rad\,\phi$$

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim(V \cap Rad\,\phi)$$

□

Osservazione 3. Queste 2 dimostrazione sono "buona, molto buone" a differenza dell'altra "cattiva" perché qui le mani non ce le sporchiamo con le matrici