TEORIA DEI SEMIGRUPPI
CORSO DEL PROF. CARLO LUIGI BERSELLI
UNIVERSITÀ DI PISA - A.A. 2012/2013

MATTEO DUNEZ

1. 1.3.2013 - Cenni alla meccanica dei continui, teorema del trasporto, derivazione delle equazioni di Eulero

Cominciamo con il richiamare alcuni concetti riguardanti le EDO; in genere la più semplice di esse con cui si può avere a che fare (ovviamente considerando il problema di Cauchy associato) é

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $y(t) = y_0 e^{at}$. Questo continua a valere anche a livello vettoriale con

$$\begin{cases} y(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

dove

$$y(t) = y_0 e^{At} \qquad e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Invece nel caso di problemi del tipo $y'(t) = ay(t) + f(t)$ ci si riconduceva a quanto visto: moltiplicando tutto per e^{-at} si ha

$$y'e^{-at} - aye^{-at} = e^{-at} f \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(ye^{-at}) = fe^{-at} \Longrightarrow ye^{-at} = y_0 + \int_0^t f(s)e^{-at} ds$$

e noi cercheremo di fare lo stesso anche nel caso in cui lo spazio delle fasi sia di dimensione infinita.

Esempio 1.1. **Esempio modello** *Sia $x \in \mathbb{R}$ e consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore:*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy;$$

qui si vede che abbiamo a che fare con un operatore del tipo $A = -\partial^2_{xx}$ e quindi l'equazione può essere espressa come $u_t + Au = 0$ dove $u : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. In particolare u può essere pensata come $u : [0,T] \times X \longrightarrow X$ con X un opportuno spazio di Banach.

Adesso enunciamo un teorema che da una condizione sulla massimalità di una soluzione.

Teorema 1.1. *Sia*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con f che soddisfa le condizioni di Cauchy - Lipschitz. Sia $[0,T)$ l'intervallo massimale d'esistenza della soluzione. Se

$$\sup_{t \in [0,T)} |y(t)| \le C$$

dove C è una costante allora la soluzione non è massimale.

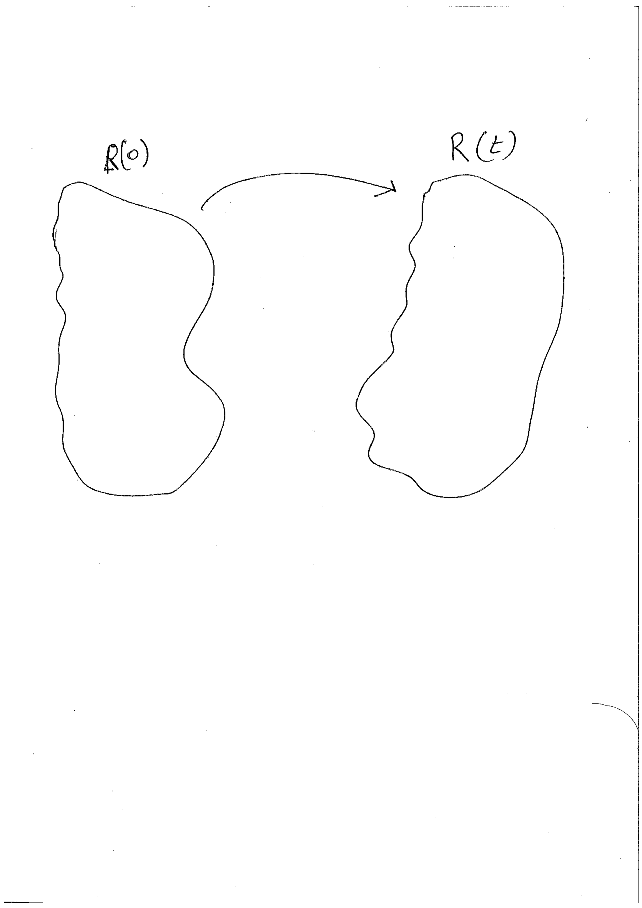
Cominciamo ora ad avvicinarci alle quantità che si riveleranno fondamentali nel seguito. Supponiamo di avere un continuo e sia $\rho(x,t)$ la densità puntuale. Restano definite la **massa** del volume V come

massa
$$m(V) := \int_V \rho(x,t)dx \tag{1}$$

e la **quatità di moto**

q.m
$$q(V) := \int_V \rho(x,t)u(x,t)dx \tag{2}$$

dove $u : \mathbb{R}^3 \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ è il campo delle velocità.
Adesso consideriamo un volume materiale R e mandiamo la configurazione iniziale $R(0)$ nella configurazione $R(t)$.



1

Qualsiasi sia l'istante t considerato, la massa si dovrà conservare e quindi si ha

cons_m_int
$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{R(t)} \rho(x,t)dx \equiv 0.} \tag{3}$$

Osservazione 1.1. *Per capire dove viene mandato ogni punto del volume materiale al variare del tempo si deve studiare il flusso; esso è ricavabile dalle seguenti EDO:*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = u(X(t),t) \\ X(0) = x \in R(0) \end{cases}.$$

Partendo da questo sistema proviamo a cercare J. Sia

$$X_i(x,h) = x_i + u_i(x,0)h + O(h^2).$$

Allora

$$\partial_j X_i(x,h) = \delta_{ij} + \partial_j u_i(x,0)h + O(h^2) = \delta_{ij} + A_{ij}h$$

dove $A_{ij} = \partial_j u_i + O(h^2)$. *Adesso* $\det \partial_j X_i = \det(I + hA)$ *ma noi sappiamo che* $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - \lambda^{n-1} \operatorname{Tr} A + \dots$ *e quindi*

$$\det(I + hA) = (-h)^n p(-1/h) = I + hTR\,A$$

e di conseguenza

$$J(x,h) = I + h\nabla \cdot u(x,0) + O(h^2).$$

Inoltre

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} J(x,0) = \nabla \cdot u(x,0) \\ \frac{d}{dt} J(x,t) = \nabla \cdot u(X(x,t),t) \cdot J(x,t) \end{cases} . \tag{4}$$

Teorema 1.2 (del Trasporto). *Sia la funzione* $f(x,t)$. *Allora*

$$\frac{d}{dt}\int_{R(t)} f\,dx = \int_{R(t)} \partial_t f + \nabla \cdot (fu)\,dx \tag{5}$$

dove $\nabla \cdot u = \partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3$ *per* u *un campo assegnato.*

Corollario 1. *Sia* $f \equiv 1$. *Allora*

$$\frac{1}{V}\frac{d}{dt}\int_{R(t)} dx = \frac{1}{V}\int_{R(t)} \nabla \cdot u\,dx \overset{|V|\to 0}{\longrightarrow} \nabla \cdot u(x,t) \tag{6}$$

Se nel teorema del trasporto si pone $f = \rho(x,t)$ abbiamo la forma integrale della conservazione della massa; poichè essa vale $\forall\ x \forall\ t$ allora si ha anche la forma differenziale

cons_m_diff

$$\boxed{\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0.} \tag{7}$$

Osservazione 1.2. *La (7) è equivalente a*

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

dove quella che abbiamo introdotto è la derivata materiale

$$\frac{D}{Dt} := \partial_t + u \cdot \nabla.$$

Infine osserviamo che uno scalare f *si dice trasportato da* u *se* $\frac{D}{Dt} f = 0$.

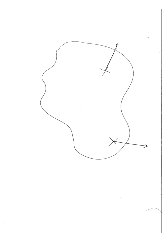
Adesso passiamo ad occuparci della quantità di moto. In generale su un fluido agirà una forza F e si avrà

$$\frac{d}{dt}\int_{R(t)} \rho u\,dx = F.$$

Questa forza si esprimerà con una componente in $R(t)$ e una di tipo superficiale. Per manipolare quest'ultima ci servono alcuni ingredienti.

Definizione 1.1 (Fluido ideale). *Un fluido è detto ideale quando esiste uno scalare* $p(x,t)$ *(la pressione) tale che sulla superficie* S *di* $R(t)$, *la forza al tempo* t *è per ogni* x *esprimibile come* $p(x,t)n$ *dove* n *è la normale esterna e si pone*

$$\varphi_S = -\int_S pn\,dA.$$



2

Ricordiamo che vale il teorema della divergenza e che quindi si ha

$$\int_V \nabla \cdot f\,dx = \int_{\partial V} fn\,dA. \tag{8}$$

Proposizione 1.1. *Sotto l'ipotesi che il fluido sia ideale si ha la seguente equazione vettoriale:*

$$\frac{d}{dt}\int_{R(t)} \rho u dx = \int_{R(t)} -\nabla p + \rho f dx. \tag{9}$$

Dimostrazione. Per il teorema del trasporto si ha

$$\frac{d}{dt}\int_{R(t)} \rho u_i dx = \int_{R(t)} \partial_t(\rho u_i) + \nabla_j(\rho u_i u_j) dx$$

ma vedendo più nel dettaglio i due addendi si ha

$$\partial_t(\rho u_i) = \partial_t \rho u_i + \rho \partial_t u_i$$

$$\partial_j(\rho u_i u_j) = \partial_j(\rho u_i) u_j + \rho u_j \partial_j u_i$$

ma $\partial_t \rho u_i + \partial_j(\rho u_i) u_j = 0$ perchè sappiamo che la massa si conserva e quindi rimane solo il termine

$$\int_{R(t)} \rho \partial_t u_i + \rho u_j \partial_j u_i dx = \int_{R(t)} \rho(\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i) dx.$$

Ne deriva la relazione puntuale

$$\rho(\partial_t u + (u\nabla)u) = -\nabla p + \rho f.$$

□

A questo punto la conservazione della massa e la conservazione della quantità di moto ci forniscono le equazioni costitutive del nostro modello e, accoppiate, prendono il nome di **equazioni di Eulero**:

eq_eul
$$\boxed{\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \\ \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) = -\nabla p + \rho f \end{cases}} \tag{10}$$

che sono quattro equazioni in cinque incognite...
Se si aggiunge l'ipotesi che la densità sia costante ($\rho = 1$ per semplicità) e che il fluido sia omogeneo, si ottengono le **equazioni di Eulero per fluidi incomprimibili omogenei**:

eq_eul_omo
$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} .} \tag{11}$$

Adesso è il momento di arrivare ad un'equazione di bilancio per l'energia cinetica; al momento lavoreremo in $\mathbb{R}^3$. Sappiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t u \cdot u dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx$$

ma per le (11) si ha la seguente identità integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\partial_t u \cdot u}_{E(t)} + [(u \cdot \nabla) u + \nabla p] u dx = \int_{\mathbb{R}^3} f u dx.$$

A questo punto osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j} u_j \partial_j u_i u_i dx = \int_{\mathbb{R}^3} u_j \frac{|u|^2}{2} dx = -\int_{\mathbb{R}^3} \partial_j u_j \frac{|u|^2}{2} dx = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot u dx = 0$$

perchè il fluido è ipotizzato omogeneo. Si noti che abbiamo esplicitato solo una volta la somma su i e j, nel seguito useremeo la convenzione di Einstein per cui gli elementi con indici ripetuti si intendono sommati.
Questo ci permette di vedere come il termine convettivo dia contributo nullo; ora abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla p \cdot u dx = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i p u_i dx = -\int_{\mathbb{R}^3} p \partial_i u_i dx = -\int_{\mathbb{R}^3} p \nabla \cdot u dx = 0.$$

In definitiva

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f u dx \tag{12}$$

e questo ci permetterà in seguito di avere una stima per $\|u\|_{L^2}$.

Osservazione 1.3. *Bisogna, comunque, fare attenzione alle condizioni al bordo: su $\partial\Omega$ supponiamo (imponiamo) $u \cdot n = 0$ ossia che nulla entri e nulla esca. Se così non fosse, derivando per parti ci troveremmo*

$$\int_\Omega \nabla p \cdot u dx = \int_\Omega \partial_i p u_i dx = \int_{\partial\Omega} p u_i n_i ds - \int_\Omega p \partial_i u_i dx$$

e

$$\int_\Omega (u\cdot\nabla) u u dx = \int_\Omega (u_j \partial_j) u_j u_j dx = \int_{\partial\Omega} u_j n_j \frac{|u|^2}{2} dx - \int_\Omega \partial_j u_j \frac{|u|^2}{2} dx.$$

2. 7.3.2013 - Leggi di conservazione per fluidi ideali e teoremi di Bernoulli, Helmotz e Kelvin

Cominciamo dall'osservare che la conservazione della massa per qualsiasi configurazione di volume (cons_m_diff 7) nel caso di un fluido omogeneo si esprime come

$$\rho_t + \partial_j(\rho u_j) = \rho_t + u_j \partial_j \rho + \rho \underbrace{\partial_j u_j}_{=0} = \rho_t + (u\cdot\nabla)\rho = 0.$$

Ci chiediamo quindi qual'è la soluzione di

omo_mass
$$\rho_t + (u\cdot\nabla)\rho = 0. \tag{13}$$

Bisogna sempre considerare il flusso $x \longmapsto X$; si ha che

$$\frac{d}{dt}\rho(X(x,t),t) = \partial_t \rho + \sum_{i=1}^{3} \partial_i \rho \frac{\partial X_i}{\partial t} \equiv 0$$

e quindi in questo caso, ma anche per qualsiasi campo che venga trasportato, basta considerare il valore iniziale ($t = 0$) ossia

$$\rho(X(x,t),t) = \rho_0(x).$$

Proposizione 2.1. *Sia*

$$[\operatorname{rot} u]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Allora vale la seguente identità vettoriale:

id_1
$$\frac{1}{2}\nabla |u|^2 = (u\cdot\nabla)u + u \times \operatorname{rot} u. \tag{14}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
[u \times \operatorname{rot} u]_i &= \varepsilon_{ijk} u_j (\operatorname{rot} u)_k = \varepsilon_{ijk} u_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} u_j \partial_l u_m = \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) u_j \partial_l u_m = u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i = \\
&= \partial_i \left(\frac{1}{2}|u|^2\right) - (u\cdot\nabla)u.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.1. *La precedente identità è un caso particolare di una più generale ossia di*

$$\nabla(f\cdot g) = (f\cdot\nabla)g + (g\cdot\nabla)f = f \times \operatorname{rot} g + g \times \operatorname{rot} f. \tag{15}$$

Teorema 2.1 (**di Bernoulli**)**.** *Sia la seconda equazione costitutiva dove supponiamo $\rho = 1$ e $f = 0$. Se u è una soluzione stazionaria, ossia tale che*

$$\begin{cases} u(x,t) = u(x) \\ p(x,t) = p(x) \end{cases}$$

allora

bern
$$\frac{1}{2}|u|^2 + p = cost \tag{16}$$

e questo vale per ogni traiettoria.

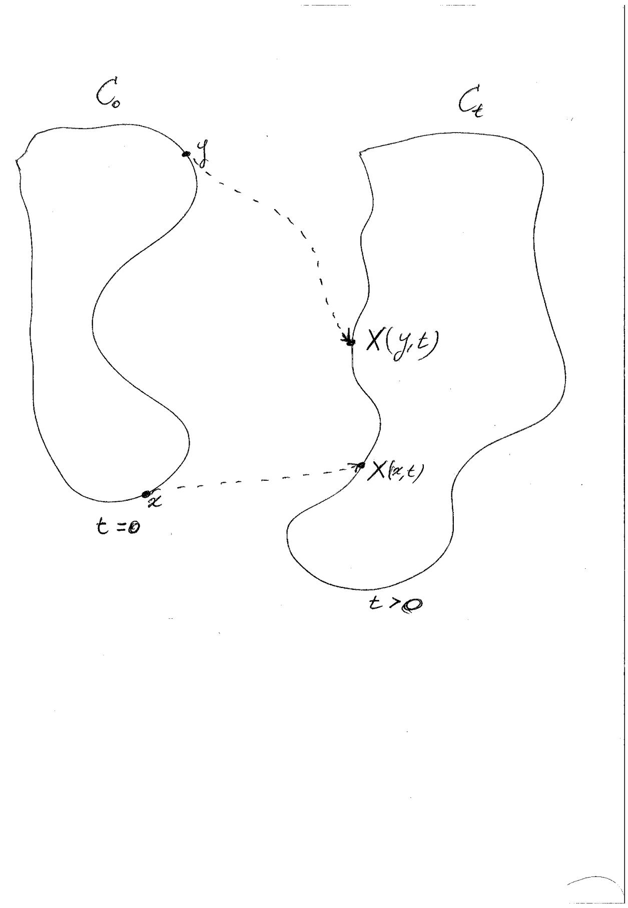
Dimostrazione. Osserviamo prima di tutto che non essendoci dipendenza dal tempo, l'equazione diventa
$$(u\cdot\nabla)u+\nabla p=0.$$
Adesso si ha
$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}|u|^2+p\right]_{X(S_1)}^{X(S_2)} &= \int_{X(S_1)}^{X(S_2)} \nabla\left(\frac{1}{2}|u|^2+p\right) X(s)\,ds = (14) = \\ &= \int_{S_1}^{S_2} [u(X(s))\times \operatorname{rot} u(X(s))]\, u(X(s)\,ds\end{aligned}$$
dove in quest'ultima uguaglianza abbiamo usato le equazioni di Eulero in forma rotazionale ossia nella forma
$$\partial_t u - u\times \operatorname{rot} u + \nabla\left(\frac{1}{2}|u|^2+p\right)=f.$$
Ora, sapendo che $(a\times b)_i=\varepsilon_{ijk}\,a_j b_k$, l'ultimo integrale scritto sarà del tipo
$$\int_{S_1}^{S_2} a\times b\cdot u\,ds=\int_{S_1}^{S_2} a\times a\cdot b\,ds=0$$
dato che il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo. □

Tornando all'equazione $(u\cdot\nabla)u+\nabla p=0$, applichiamogli la divergenza così da avere:
$$\nabla\cdot\nabla p=\Delta p$$
$$\nabla\cdot((u\cdot\nabla)u)=\partial_j(u_k\partial_k u_j)=\partial_j u_k\partial_k u_j+u_k\partial_j\underbrace{\partial_k u_k}_{\nabla\cdot u=0}$$
e unendo le cose troviamo
$$\Delta p+\nabla u\nabla u=0\Longrightarrow -\Delta p=\nabla u\nabla u.$$
Quindi a meno di costanti, utilizzando la funzione di Green, si ha
$$p(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla u\nabla u(y)}{|x-y|}\,dy \tag{17}$$
e questo ci consente di notare che il valore della pressione in un punto x dipende dai valori assunti dal campo u in tutto il resto del volume.

Teorema 2.2 (**di Helmotz**). *Sia la funzione $\omega:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3$. Sotto l'ipotesi che $\nabla\cdot u=0$ e che $u\cdot n=0$ su $\partial\Omega$, vale, unica, la seguente decomposizione:*
$$\omega=u+\nabla p. \tag{18}$$

Dimostrazione. (!) Per assurdo si abbia $\omega=u_1+\nabla p_1=u_2+\nabla p_2$. Allora
$$u_1-u_2+\nabla(p_1-p_2)=0.$$
A questo punto moltiplichiamo per (u_1-u_2) e successivamente integriamo così da avere
$$\int_\Omega [u_1-u_2+\nabla(p_1-p_2)](u_1-u_2)\,dx=0\Longrightarrow\int_\Omega |u_1-u_2|^2\,dx=0\Longrightarrow u_1=u_2$$
e si ha anche
$$\int_\Omega \nabla p\cdot u\,dx=-\int_\Omega p\nabla u\,dx=0$$
per l'ipotesi di divergenza nulla. Quindi $p_1=p_2$.
(∃) Sia $\omega=u+\nabla p$ e su ω applichiamo la divergenza così da avere $\nabla\cdot\omega=\nabla\cdot u+\Delta p$. Quindi su Ω si ha $-\Delta p=\nabla\cdot\omega$; ora invece $\omega\cdot n=u\cdot n+\nabla p\cdot n$ e questo ci porta al seguente problema di Neumann:
$$\begin{cases}-\Delta p=\nabla\cdot\omega & \Omega\\ \frac{\partial p}{\partial n}=\omega\cdot n & \partial\Omega\end{cases}.$$
□

Adesso passiamo al teorema di Kelvin; prima di enunciarlo consideriamo, al tempo $t=0$, una linea chiusa nel fluido; un generico punto $x\in C_0$ sarà trasportato in $x\longmapsto X(x,t)\in C_t$ per $t>0$. Quello che ci dice il teorema di Kelvin è che qualcosa resta immutato.



3

Teorema 2.3 (di Kelvin)**.** *Sia u soluzione dell'equazione di Eulero. Posto che*

$$\oint_{C_t} u\,ds := \iint_{S_t} \operatorname{rot} u \cdot n\,ds$$

si ha che

kelvin (19)
$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t} u\,ds = cost.$$

Dimostrazione. L'obiettivo è dimostrare che

$$\frac{d}{dt}\oint_{C_t} u\,ds = \int_{C_t} \frac{D}{Dt} u\,ds;$$

a tal fine parametrizziamo la curva C_t con $x(s) : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ al tempo $t = 0$ mentre per $t > 0$ con $X(x(s), t)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\oint_{C_t} u\,ds &= \frac{d}{dt}\int_0^1 u\left(X(x(s),t), \frac{\partial X}{\partial s}(x(s),t)\right) ds = \\
&= \int_0^1 u_t + \sum_{k=1}^{3} \partial_k u \frac{\partial X_k}{\partial_t}\frac{\partial X}{\partial s} ds + \int_0^1 u\,\partial_t \partial_s X\,ds = \\
&= \int_0^1 [\partial_t u + (u\nabla)u]\frac{\partial X}{\partial s} ds + \int_0^1 u\,\partial_t \partial_s X\,ds.
\end{aligned}$$

Resta da mostrare che l'ultimo integrale scritto in realtà è nullo. Si ha

$$\int_0^1 u\,\partial_t \partial_s u\,ds = \int_0^1 u\,\partial_s \partial_t u\,ds = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_s u^2\,ds = 0$$

perchè $x(0) = x(1)$ e quindi la circolazione è nulla. Infine, nell'ipotesi che u sia soluzione dell'equazione di Eulero, abbiamo

$$\oint_{C_t} \frac{D}{Dt} u\, ds = -\int_{C_t} \nabla p\, ds \equiv 0.$$

□

Teorema 2.4 (di Stokes)**.** *Si ha*

th_sto

$$\boxed{\frac{d}{dt}\oint_{C_t} u\, ds = \iint_{\Sigma_t} (\nabla \times u) n\, dA = 0.} \tag{20}$$

Proposizione 2.2. *Sia un* **foglio di vorticità** *ossia una superficie S sulla quale $\forall\ x \in S$ si ha che x è tangente a $\omega(x,0) = \operatorname{rot} u(x,0)$. Allora se S è un foglio di vorticità in $t = 0$ lo sarà anche per $t > 0$.*

3. 8.3.2013 - Vorticità, fluidi non ideali e derivazione delle equazioni di Navier-Stokes

Sia la vorticità

$$\omega = \operatorname{rot} u.$$

Il rotore descrive una circuitazione istantanea e vogliamo vedere se e quale equazione soddisfa; sappiamo che u deve soddisfare

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\nabla)u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}.$$

Poichè $\nabla(\operatorname{rot} u) = 0$ allora $\nabla \cdot \omega = 0$ ossia anche il rotore è a divergenza nulla. Adesso applichiamo il rotore a tutti i termini della prima equazione e vediamo cosa accade: per quanto riguarda il termine di pressione e per quello di derivazione in t si ha

$$\operatorname{rot}(\nabla p) = 0$$

$$\operatorname{rot} \partial_t u = \partial_t \omega.$$

Poi abbiamo

$$\operatorname{rot}[(u \cdot \nabla)u] = \operatorname{rot}\left[\nabla \frac{|u|^2}{2} - (u \times \operatorname{rot} u)\right] = \underbrace{\operatorname{rot} \nabla \frac{|u|^2}{2}}_{=0} - \operatorname{rot}(u \times \operatorname{rot} u).$$

Adesso resta da calcolare l'ultimo termine:

$$(-u \times \operatorname{rot} u)_k = -\varepsilon_{klm} u_l (\operatorname{rot} u)_m \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow -\varepsilon_{ijk}\partial_j (u \times \operatorname{rot} u)_k &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j \varepsilon_{klm} u_l (\operatorname{rot} u)_m = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j u_l (\operatorname{rot} u)_m = \\ &= (u \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)u. \end{aligned}$$

Osservazione 3.1. *Più in generale vale la seguente identità vettoriale:*

$$\operatorname{rot}(F \times G) = F(\nabla \cdot G) - G(\nabla \cdot F) + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G. \tag{21}$$

Quindi l'equazione della vorticità è

eq_vort

$$\boxed{\frac{D\omega}{Dt} = \partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)u.} \tag{22}$$

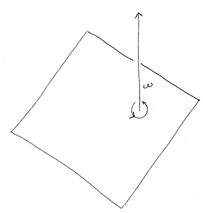
Osservazione 3.2. *E' importante osservare che non siamo in presenza di un'equazione di puro trasporto perchè è presente una sorgente. Questo significa che non vale più come per l'equazione $\rho_t + (u \cdot \nabla)\rho = 0$ il fatto che $\rho(X(x,t),t) = \rho_0(x)$.*

Esempio 3.1 (**Moto bidimensionale**)**.** *Sia $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ed $u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Il campo sarà*

$$u = (u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$$

mentre il rotore ad esso associato sarà

$$\operatorname{rot} u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(\partial_x u_2 - \partial_y u_1)$$



4

e quindi in dimensione 2 $\omega = \partial_x u_2 - \partial_y u_1$ *è uno scalare. Quale equazione soddisferà ? Partendo sempre dall'equazione per u, troviamo*

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}[(u\nabla)u] &= \partial_x(u_k \partial_k u_2) - \partial_y(u_k \partial_k u_1) = u_k \partial_k \partial_x u_2 - u_k \partial_k \partial_y u_1 = \\ &= u_k \partial_k(\partial_x u_2 - \partial_y u_1) = (u\cdot\nabla)\omega\end{aligned}$$

ma siamo nell'ipotesi in cui $\nabla \cdot u = 0$ *ossia* $\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0$ *quindi* $\partial_1 u_1 = -\partial_2 u_2$ *e di conseguenza* $\partial_1 u_k \partial_k u_2 - \partial_2 u_k \partial_k u_1 \equiv 0$. *Questo porta a dire che, in dimensione 2, la vorticitò soddisfa*

$$\partial_t \omega + (u\cdot\nabla)\omega = 0 \tag{23}$$

Grazie a questo esempio si evince come in dimensione 2 vi sia trasporto di tipo puro e quindi

$$\omega(X(x,t),t) = \omega_0(x).$$

Inoltre

st_infty_2

$$\boxed{\|\omega(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|\omega_0(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}} \tag{24}$$

Per quanto riguarda la vorticità in $\mathbb{R}^3$, si ritorna a dover lavorare con la (22)[1] e di conseguenza non abbiamo più le stime L^∞ per la vorticità.

Proposizione 3.1. *Sia una funzione h tale che*

$$\frac{D}{Dt}h = (h\cdot\nabla)u.$$

Allora

$$h(X(x,t),t) = (\nabla_x X)h_0(x). \tag{25}$$

Dimostrazione. Avevamo già visto che

$$\frac{d}{dt}X_i(x,t) = u_i(X(x,t),t);$$

adesso

3.1

$$\frac{d}{dt}\partial_j X_i(x,t) = \sum_k \partial_k u_i(X(x,t),t)\partial_j X_k(x,t) = (\nabla X\cdot\nabla u)_{ij} \tag{26}$$

ma

$$\frac{d}{dt}h_i(X(x,t),t) = \partial_t h_i + \partial_k h_i \frac{\partial X_k}{\partial t} = \partial_t h_i + u_k \partial_k h_i = \frac{D}{Dt}h_i = h_k \partial_k u_i.$$

Andando a moltiplicare nella (26) a destra e sinistra per $h_j(x,0)$ troviamo ora

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\partial_j X_i(x,t)h_j(x,0) &= \partial_j X_i \partial_k u_i h_j(x,0) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow h_i = \partial_j \nabla_i h_j(x,0).\end{aligned}$$

□

[1] il termine $(\omega\nabla)u$ è detto Vortex stretching.

Grazie a questa proposizione possiamo dire che, in presenza di un termine di trasporto e di una sorgente, un campo si rappresenta come

$$h_i = \partial_j X_i h_j(x,0).$$

Problema Sia l'equazione (22). Ci chiediamo se data ω sia possibile risalire ad u. Per farlo proviamo a fare il seguente calcolo:

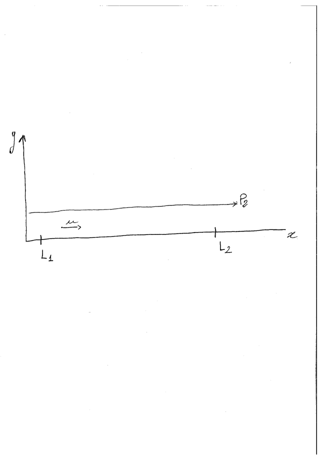
$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, u &= \varepsilon_{ijk}\partial_j \varepsilon_{klm}\partial_l u_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta im\delta_{jl})\partial_j\partial_l u_m = \partial_i(\partial_j u_j) - \partial_j^2 u_i = \\ &= \nabla(\nabla\cdot u) - \Delta u. \end{aligned}$$

Ma nel nostro caso u è a divergenza nulla e quindi $-\Delta u = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, u$. Questo ci permette di arrivare alla legge di Biot - Savart

biot_savart

$$\boxed{u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{rot}\,\omega(y)}{|x-y|}dy.} \tag{27}$$

Si noti che per conoscere la velocità in un punto è necessario conoscere la vorticità in tutto lo spazio.
Cominciamo ora a parlare di fluidi non ideali. Supponiamo di avere un canale e un fluido messo



5

in moto da una differenza di pressione. Siano $u(x,y,t) = (u(x,t),0)$ e $p(x,y,t) = p(x)$. Abbiamo due cose da osservare:

(1) $\nabla\cdot u = 0 \Longrightarrow \partial_x u = 0$;
(2) $\partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \partial_x p = 0 \Longrightarrow \partial_t u + u\partial_x u + 0\partial_y u + \partial_x p = 0$.

Di conseguenza l'equazione assumerà la forma

flu_sv

$$\partial_t u + \partial_x p = 0 \tag{28}$$

e un fluido che obbedisce a questa legge è detto **completamente sviluppato**.
Vediamo che forma avranno le soluzioni della (28): si ha

$$\partial_x(\partial_t u + \partial_x p) = \partial_t\partial_x u + \partial_{xx} p = 0$$

quindi l'unica soluzione è

$$p(x) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{L}x.$$

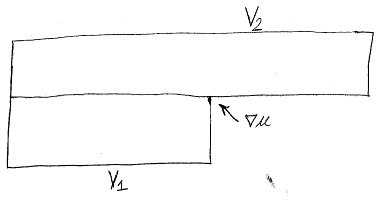
Di conseguenza

$$\partial_t u = \frac{p_1 - p_2}{L} \Longrightarrow u(t) = \Big(\frac{p_1-p_2}{L}\Big)t + C.$$

Notiamo come, per questi fluidi, la velocità cresca in maniera proporzionale al tempo; questo è un problema perchè in molti casi non si accorda alla realtà...
Cambiamo quindi le nostre ipotesi; supponiamo di non avere un fluido ideale ma che si abbiamo forze di taglio che agiscono su di esso.La forza agente sulla superficie sarà della forma

$$p(t,x)n + \sigma(t,x,n) \qquad \sigma \in \mathscr{M}^{3\times 3}. \tag{29}$$

Qui entrano in gioco i fluidi newtoniani ossia che soddisfano le **ipotesi di Newton**: supponendo che $\sigma(t,x,n) = \sigma(t,x)\cdot n$ (cosa che Cauchy effettivamente scoprì) si richiede che la matrice $\sigma(t,x)$ debba dipendere linearmente da ∇u; Newton pensava a due masse sovrapposte con velocità di scorrimento $v_2 > v_1$ e giunse quindi a ipotizzare che:



6

(1) σ è invariante per trasformazioni unitarie ossia

$$\sigma(U\nabla u U^{-1}) = U\sigma(\nabla u)U^{-1};$$

(2) σ è simmetrica;
(3) σ dipende linearmente da $Du = (\nabla u + \nabla u^T)/2$.

Come nozione, scriviamo quale fu la forma trovata per σ:

sigma (30)
$$\boxed{\sigma = 2\mu\left[D - \frac{1}{3}(\nabla\cdot u)I\right] + \xi(\nabla\cdot u)I}$$

dove μ e ξ sono rispettivamente il primo e il secondo coefficiente di viscosità.
Ora, sempre ricordando che sussite l'ipotesi che $\nabla\cdot u = 0$, troviamo che

$$\frac{D}{Dt}u = \nabla p + \nabla\sigma = \nabla p + 2\mu\partial_j\left(\frac{\partial_i u_j + \partial_j u_i}{2}\right) = 2\mu\partial_i\underbrace{\frac{\partial_j u_j}{2}}_{=0} + 2\frac{\mu}{2}\partial_j\partial_j u_i =$$
$$= \mu\Delta u.$$

Arriviamo così alle equazioni derivatee da Navier (1833) e Stokes (1845):

NSE (31)
$$\boxed{\begin{cases}\partial_t u + (u\nabla)u - \mu\Delta u + \nabla p = 0\\ \nabla\cdot u = 0\end{cases}.}$$

Osserviamo che μ ha come dimensioni

$$[\mu] = \frac{Kg}{m\cdot s}$$

e che quindi le equazioni devono essere rese adimensionali.

4. 15.3.2013 - Adimensionalizzazione delle NSE e numero di Reynolds

Definizione 4.1 (**Linea di vorticità**). *Una linea di vorticità è una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tangente al campo di vorticità in ogni punto.*

Definizione 4.2 (**Tubo di vorticità**). *Si tratta di un tubo costituito da curve chiuse che contengono le linee di vorticità e inoltre si ha*

$$\int_{C_1} u ds = \int_{C_2} u ds = cost.$$

Si osservi che ω tende a curvarsi, ma questo fenomeno può essere controllato con $\|\omega\|_{L^\infty}$.

Proposizione 4.1. *Sia l'* **elicità**

$$H := \int u \cdot \omega dx. \tag{32}$$

Essa è un invariante del moto.

Dimostrazione. Partiamo dal considerare le equazioni di Eulero in forma rotazionale ossia

$$\partial_t u - u \times \omega + \nabla q = 0$$

e sfruttando il fatto che

$$(u\nabla)u = \frac{1}{2}\nabla|u|^2 - u \times \omega$$

si ha

$$\int \partial_t u \cdot \omega - \underbrace{u \times \omega \cdot \omega}_{=0} + \underbrace{\nabla q \cdot \omega}_{=0} = 0.$$

□

Osservazione 4.1. *L'elicità, oltre a essere costante nel tempo, è anche un invariante topologico.*

Osservazione 4.2. *Notiamo come tutto questo si abbia a viscosità nulla, nel caso di fluidi ideali.*

Proposizione 4.2. *Siano le (31). Allora*

(1) *l'energia cinetica non è più una costante del moto;*
(2) *nel limite per $\gamma \to 0$ ritroviamo le equazioni di Eulero.*

Dimostrazione. 1) Si ha

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u|^2 dx - \gamma \int \Delta u \cdot u dx$$

e integrando per parti il secondo integrale troviamo

$$-\int_\Omega \partial_{jj} u^i u^i dx = \underbrace{-\int_{\partial\Omega} n^j \partial_j u^i u^i ds}_{=0} + \int_\Omega \partial_j u^i \partial_j u^i dx$$

quindi l'energia cinetica assume la forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 dx + \gamma \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0$$

dove vediamo che entra il gioco il termine dissipativo rappresentato dal secondo integrale. □

Avevamo visto che le le variabili che entrano in gioco nelle equazioni di Navier-Stokes, da noi derivate, posseggono una dimensione. Proviamo a eliminarla: scriviamo le nostre variabili come il prodotto di un termine dimensionale per uno adimensionale ossia

$$p = Pp' \qquad x = Lx' \qquad t = Tt' \qquad u = Uu' \qquad U = \frac{L}{T}$$

e scriviamoci i singoli pezzi dell'equazione.

$$\partial_t u = \partial_t (Uu') = \partial_{t'} Uu' \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{U}{T}\partial_{t'} u'$$

$$u \cdot \nabla u = u^j \partial_j u^i = Uu'^j \frac{\partial}{\partial x'_j} Uu'^j \frac{\partial}{\partial x_i} x'_j = \frac{U^2}{L}(u'\nabla)u'$$

$$\Delta u = \Delta(Uu') = \frac{\partial^2}{\partial x_j}(Uu') = \frac{U}{L^2}\Delta u'$$

Adesso l'equazione è diventata

$$\frac{U}{T}\partial_t u + \frac{U^2}{L}(u\nabla)u - \nu\frac{U}{L^2}\Delta u + \frac{P}{L}\nabla p = 0$$

e moltiplicando per TU^{-1} troviamo

$$\partial_t u + \frac{U^2}{L}\frac{T}{U}(u\nabla)u - \nu\frac{U}{L^2}\frac{T}{U}\Delta u + \frac{PT}{LU}\nabla p = 0.$$

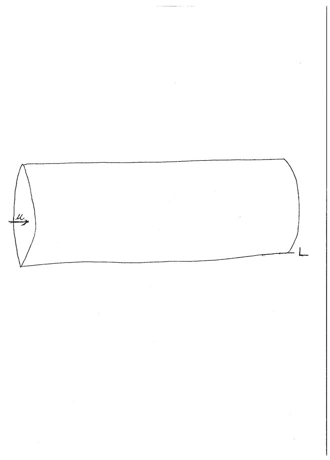
Osserviamo ora che

$$\frac{U^2T}{LU} = 1 \qquad \frac{\nu UT}{L^2u} = \frac{\nu}{UL}$$

e questo ci permette proprio di definire il **numero di Reynolds**

rey (33) $$\frac{\nu}{UL} := \frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

Ma che cos'è questo numero? Parliamo dell'esperimento di Reynolds.



7

In un tubo di lunghezza L, nel quale scorre il fluido, inseriamo dell'inchiostro (è il tracciante) per vedere come le particelle vengono trasportate lungo u con $\dot{X}(t) = u(X(t), t)$. Se u è basso osserviamo delle rette, mentre se u sale il tracciante diffonde. Si ha che per $\nu \to 0$ la dissipazione si stabilizza e

$$\nu\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \longrightarrow \varepsilon > 0.$$

Questo è il fenomeno della **dissipazione turbolenta**.
Nella realtà lo studio dei fenomeni è ben approssimato, però, dalle equazioni di Eulero perchè Re è molto alto. Vediamo alcuni esempi:

sfera di 1 cm a 1 cm/s	$\mathrm{Re} = 100$
automobile	$\mathrm{Re} = 6 \cdot 10^5$
aereoplano	$\mathrm{Re} = 8 \cdot 10^7$
nuotatore	$\mathrm{Re} = 10^6$
flussi geofisici	$\mathrm{Re} = 10^{20}$.

Esempio 4.1 (**Flussi di Beltrami**). *Si hanno quando* rot $u = u$.

(34) $$u(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin\pi z + \cos\pi y \\ \sin\pi x + \cos\pi z \\ \sin\pi y + \cos\pi x \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{\pi^2 t}{\mathrm{Re}}}$$

(35) $$p(x,y,z,t)0 - (\cos\pi x \sin\pi y + \sin\pi x\cos\pi z + \sin\pi z\cos\pi y)e^{-\frac{\pi^2 t}{\mathrm{Re}}}.$$

Ma cosa discrimina il numero di Reynolds?
Supponiamo di avere $\partial_t u = 0$; allora le ($\overset{\text{NSE}}{31}$) diventano

$$(u\nabla)u - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u + \nabla p = 0$$

e riusciamo a distinguere due casi:

(1) $\mathrm{Re} \ll 1 \Longrightarrow$ domina il termine dissipativo e si hanno moti lenti;
(2) $\mathrm{Re} \gg 1 \Longrightarrow$ domina il termine di trasporto.

5. 21.3.2013 - Decomposizione di Helmotz e soluzione del problema di Laplace e di Stokes sul toro tramite seri di Fourier

Consideriamo il caso in cui $\mathrm{Re} \ll 1$: questo ci porta a trattare le equazioni di Stokes (per il momento nel caso stazionario)

SE_S (36)
$$\boxed{(S)\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f \\ \nabla\cdot u = 0 \end{cases}.}$$

Proiettando sui campi a divergenza nulla abbiamo

$$-\mathbb{P}\Delta := A \qquad \mathbb{P}\omega = u$$

e questo ci consente di lavorare con un'equazione della forma

$$Au = f.$$

Esempio 5.1 (**sugli sviluppi in serie di Fourier**). *Consideriamo l'equazione* $-\Delta u = f$ *con* u, f *periodiche con* $x \in (-\pi,\pi)$. *Si ha*

$$u(x) = \sum_k u_k e^{ikx} \qquad f(x) = \sum_k f_k e^{ikx}$$

ma sappiamo che

$$f_0 = 0 \qquad u_k = \frac{f_k}{k^2}$$

quindi

$$u(x) = \sum_{k\neq 0} \frac{f_k}{k^2} e^{ikx}$$

e questo ci permette di affermare, per inciso, che se $f \in L^2$ *allora anche* $u \in L^2$ *(in realtà* $u \in H^2$*).*

Torniamo all'equazione di Stokes: cerchiamo la soluzione espressa in serie di Fourier. Siano $x \in (-\pi,\pi)^3$ ed $u : (-\pi,\pi)^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; vogliamo

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} u_k e^{ik\cdot x} \qquad p(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} p_k e^{ik\cdot x}. \tag{37}$$

Ma come imponiamo che $\nabla\cdot u = 0$=? Si ha

$$\nabla\cdot u = \sum_j \partial_j u^j = \sum_j ik_j u_k^j e^{ik\cdot x} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^3 k^j u_k^j = 0 \Longleftrightarrow k\cdot u_k \equiv 0$$

e questo ci porta a definire lo spazio dove vivrà la soluzione come

$$H^0_{\mathrm{div}} := \left\{ u = \sum_k u_k e^{ikx},\ \sum |u_k|^2 < +\infty,\ k\cdot u_k = 0,\ u_{-k} = \bar{u}_k \right\} \tag{38}$$

ossia lo spazio delle funzioni lineari, a quadrato sommabile e divergenza nulla.

Osservazione 5.1. *Sia* $f \in L^2$ *ossia* $\sum_k |f_k|^2 < +\infty$. *Ma abbiamo visto che* $u_k^2 = f_k^2/k^4$ *e quindi*

$$f_k^2 = k^4 u_k^2 \in L^2 \Longrightarrow u \in H^2.$$

Proposizione 5.1. *Sia*

$$-\Delta u = -\sum_m \partial_m\partial_m u = f.$$

Vale la seguente stima:

st_2 (39)
$$\boxed{\|D^2 u\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2}}$$

Dimostrazione. Moltiplico tutto per $\partial_j \partial_j u$ e integro così da avere

$$-\int \partial_m \partial_m u \partial_j \partial_j u dx = (\text{ per parti }) = \int \partial_m u \partial_j \partial_j \partial_m u dx =$$
$$= (\text{ per parti }) = -\int \partial_j \partial_m u \partial_j \partial_m u dx = \|D^2 u\|^2_{L^2}$$

ma il primo integrale scritto è uguale a

$$\int f \partial_j \partial_j u dx \leq \|f\|_{L^2} \|\Delta u\|_{L^2}$$

e quindi

$$\|D^2 u\|^2_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\Delta u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|D^2 u\|_{L^2}$$

da cui la tesi. □

Adesso passiamo alla **decomposizione di Helmotz** nel caso periodico. Avevamo visto che $\omega = u + \nabla p$ con la condizione che $\nabla \cdot u = 0$. Questa condizione rimane mentre, proprio perchè siamo in condizioni di periodicità non avremo più la condizione $u \cdot n = 0$ su $\partial\Omega$.
Siamo su $(-\pi,\pi)^3$ e al solito

$$u = \sum_k u_k e^{ikx} \qquad w = \sum_k w_k e^{ikx} \qquad p = \sum_k p_k e^{ikx}$$

e la decomposizione diventa

$$w_k = u_k + ikp_k.$$

Sappiamo che la condizione $\nabla \cdot u = 0$ diventa $k \cdot u_k = 0$ e moltiplicando per k troviamo

$$kw_k = i|k|^2 p_k \Longrightarrow p_k = \frac{k \cdot w_k}{i|k|^2}$$

e andando a sostituire si ha

$$u^l_k = w^l_k - ikp^l_k = w^l_k - k^l \frac{k^m w^m_k}{|k|^2} = \left(\delta_{lm} - \frac{k^l k^m}{|k|^2}\right) w^m_k$$

e quindi

(40)
$$u_k = \left[I - \frac{k \otimes k}{|k|^2}\right] w_k.$$

Quindi volendo provare a fare la stessa cosa nel caso della (SE_S 67) avremo $|k|^2 u_k + ikp_k = f_k$ e moltiplicando per k (per eliminare u) troviamo

$$p_k = \frac{kf_k}{i|k|^2}.$$

Ma moltiplicare per k equivale ad applicare la divergenza e quindi

$$-\Delta(\nabla u) + \Delta p = \nabla \cdot f$$

e infine

$$u_k = \frac{f_k - ikp_k}{|k|^2} = \frac{1}{|k|^2}\left(f_k - \frac{k \cdot k}{|k|^2} f_k\right)$$

quindi

(41)
$$u_k = \frac{1}{|k|^2}\left[I - \frac{k \otimes k}{|k|^2}\right] f_k.$$

Osservazione 5.2. *Se f è a divergenza nulla allora $p = 0$ e u si scriverà come $(-\Delta)^{-1} f$.
Se $f \in L^2$ allora $p \in H^1$ e $u \in H^2$.*

Adesso cerchiamo di raggiungere qualche risultato nel caso della equazioni di Stokes non stazionaria

SE_NS (42)
$$\boxed{(NS)\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}.}$$

Per studiare cosa succede vediamo cosa abbiamo per l'equazione del calore

(43)
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}.$$

Per essa cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(x,t) = \sum_k u_k(t) e^{ikx}$$

e quindi che dovranno soddisfare

$$\sum_k \dot{u}_k e^{ikx} + \sum_k |k|^2 u_k e^{ikx} = \sum_k f_k e^{ikx} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \dot{u}_k + |k|^2 u_k = f_k$$

e moltiplicando per $e^{|k|^2 t}$ troviamo

$$\frac{d}{dt}\left(u_k e^{|k|^2 t}\right) = f_k e^{|k|^2 t}.$$

Se $f = 0$ allora $u_k e|k|^2 t = u_k(0)$ e quindi

$$u_k(t) = u_k(0) e^{-|k|^2 t}.$$

Per (SE_NS 42) troviamo con lo stesso metodo che

$$\dot{u}_k + |k|^2 u_k + ikp_k = 0$$

e moltiplicando tutto per k si arriva a trovare $k \cdot p_k = 0$.

6. 22.3.2013 - Teoria delle turbolenze e introduzione alla ricerca di soluzioni deboli

Definizione 6.1 (**Eddy**). *Un eddy è una parte di fluido con proprietà diverse rispetto al fluido che lo circonda*[2].

A ogni eddy si associa una velocità v_l e una lunghezza l tipiche e questo permette di associare anche un numero di Reynolds che in questo caso sarà

$$\mathrm{Re}_l = \frac{v_l l}{\nu}.$$

In generale un eddy avrà

(1) un **tempo inerziale**

$$T_I = \frac{l}{v_l}$$

che è il tempo necessario affincè un eddy si deformi;

(2) un **tempo viscoso**

$$T_\nu = \frac{l^2}{\nu}$$

che è il tempo necessario al dimezzamento della velocità.

E' evidente il legame tra questi due tempi e il numero di Reynolds ossia il fatto che

$$\mathrm{Re}_l = \frac{T_\nu}{T_I}.$$

Osservazione 6.1.

$$\mathrm{Re}_l \gg 1 \iff T_\nu \gg T_I \Longrightarrow \textit{Eddy vive}$$

$$\mathrm{Re}_l \ll 1 \iff T_\nu \ll T_i \Longrightarrow \textit{Eddy muore.}$$

In teoria della turbolenza l'idea è che ogni eddy si rompa e trasferisca energia a strutture via via più piccole; in particolare la teoria prevede che ad una certa scala $\bar{l}$ gli effetti di viscosità prevalgano distruggendo l'eddy.

Si può introdurre l'ipotesi (Kolmogorov) che sussista una quantità indipendente dalla scala. Supponiamo che L sia la scala macroscopica e che ad essa sia associata la velocità u_L. L'idea è cercare una costante

$$\varepsilon = \frac{u_L^2}{T_I} = \frac{u_L^3}{L}$$

che abbia le dimensioni di un flusso di energia per unità di massa. Quindi, se questa costante esistesse, in un'altra scala l avremmo

$$u_l = (\varepsilon\, l)^{1/3}.$$

[2] Un uragano, per esempio, può essere considerato un eddy.

Inoltre avremo

$$\mathrm{Re}_l = \frac{u_l\, l}{\nu} = \frac{\varepsilon^{1/3}\, l^{4/3}}{\nu}.$$

Osservazione 6.2. *Più le strutture diventano piccole e più diventano preponderanti le forze di tipo viscoso e si passa da moti veloci, dovuti al termine $(u\nabla)u$, a moti lenti, dovuti al termine $\nu\,\Delta\, u$. Questo significa che, a seconda dei fenomeni, un'equazione diventerà più adatta rispetto ad un'altra nel descriverli.*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re} \gg 1 & u_t + (u\nabla)u + \nabla p = f \\ \mathrm{Re} \ll 1 & u_t - \nu\,\Delta\, u + \nabla p = f \end{array} \tag{44}$$

Sia ora η la **lunghezza di Kolmogorov**. Si trova che

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \Longrightarrow \mathrm{Re} \equiv 1$$

e che una volta raggiunta questa scala, i fenomeni di dissipazione distruggono la struttura che vi è sottoposta.
Infine osserviamo che

$$\frac{L}{\eta} = \mathrm{Re}^{3/4}$$

e questo ci permette di notare che nella equazione

$$u_t + (u\nabla)u - \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\, u + \nabla p = 0$$

quando il numero di Reynolds aumenta l'energia ha scale maggiori, e quindi più tempo, per trasferirsi da strutture più grandi a strutture più piccole.

Adesso cambiano argomento. Cominciamo con alcune definizioni ed esempi che ci porteranno alla formulazione variazionale e, sperabilmente, alla risoluzione dei problemi che ci poniamo.

Definizione 6.2 (Derivata debole). *Sia $f \in L^p(\Omega)$. Si dice che $\partial_i f = g \in L^p(\Omega)$ è la derivata debole di f se*

$$\int_\Omega f\,\partial_i\,\varphi\,dx = -\int_\Omega g\,\varphi\,dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega). \tag{45}$$

Esempio 6.1. *Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} -\Delta\, u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

e vediamo qual'è la sua formulazione debole. Si ha

$$-\int \Delta\, u\varphi\, dx = \int f\,\varphi\, dx \Longrightarrow \int \nabla u \nabla\,\varphi\, dx = \int f\,\varphi\, dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega).$$

Ma come formuliamo la condizione al bordo? Fino ad ora consideravamo $u \in W^{1,2}(\Omega)$; proviamo a definire

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}}} \tag{46}$$

e questo ci permetterà di tener conto della condizione al bordo. Osserviamo che poichè vale la disuguaglianza di Poincarè ossia

$$\|u\|_{L^2} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}$$

per $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ si ha

$$\|\nabla u\|_{L^2} \simeq \|u\|_{W_0^{1,2}}.$$

Passiamo ora all'operatore

$$\gamma_0 : \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) \ni \varphi \longmapsto \varphi_{|\partial\Omega}.$$

Dove andrà a finire γ_0?
Consideriamo $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$. Allora

$$\gamma_0 : W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \{x_n = 0\}$$

e il prossimo teorema specifica meglio le cose.

Teorema 6.1 (**della traccia**). *Per l'operatore traccia si ha*

$$\gamma_0 : W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{1/2,2}(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{47}$$

e

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{W^{1/2,2}} \lesssim \|\varphi\|_{W^{1,2}}. \tag{48}$$

Osservazione 6.3. *In definitiva se $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$, lo è nel senso di $W^{1/2,2}(\partial\Omega) \subsetneq L^2(\partial\Omega)$.*

Adesso la situazione è la seguente:

heat_var

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \Longrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \qquad \forall\ \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega).} \tag{49}$$

Il prossimo teorema ci permetterà di trovare una soluzione al problema in forma debole.

Definizione 6.3 (**Forme continue**). *Sia $a(u,v)$ una forma bilineare con u e v vettori dello spazio vettoriale V. Si dice che essa è continua se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$|a(u,v)| \le C\|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall\ u, v \in V. \tag{50}$$

Definizione 6.4 (**Forme coercive**). *Sia $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare. Essa è coerciva se esiste $\alpha > 0$ tale che*

$$a(u,u) \ge \alpha\|u\|^2 \qquad \forall\ u \in V. \tag{51}$$

Osservazione 6.4. *Supponiamo di avere $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e che $V = \mathbb{R}^n$ e quindi che tutto ha dimensione finita. Di conseguenza sappiamo esistere $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ tale che*

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle$$

e che $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ è un endomorfismo. Quindi

$$R(A) = \mathbb{R}^n \iff \ker A = \{\emptyset\}.$$

Allora se A rappresenta una forma definita positiva e al contempo $\langle Au, u\rangle = 0$ se ne deduce che necessariamente $u \equiv 0$ e quindi che A è iniettiva.

Osservazione 6.5. *Cosa accadrebbe se la dimensione fosse infinita? Le cose potrebbero andare decisamente male: sia per esempio $V = l^2$ e sia $\{Au_n\}_n = \frac{1}{n}u_n$. Quindi*

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} u_n^2 > 0$$

ma se volessimo risolvere $Au = F \in l^2$ con $F = \frac{1}{n}$? L'equazione porterebbe ad

$$\frac{1}{n} u_n = \frac{1}{n} \Longrightarrow u_n \equiv 1 \Longrightarrow u_n \notin l^2$$

contro le nostre ipotesi.

Osservazione 6.6. *La coercività assicura che il primo degli autovalori sia positivo.*

Teorema 6.2 (**di Lax-Milgram**). *Sia V uno spazio di Banach riflessivo su $\mathbb{R}$ ed $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coerciva. Allora $\forall\ F \in V'\ \exists!\ u \in V$ tale che*

(1) $a(u,v) = \langle F, v\rangle\ \ \forall\ v \in V$;
(2) $\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}$.

Dimostrazione. Poniamo $A : V \longrightarrow V'$ in modo che $\langle Au, v\rangle_{V',V} = a(u,v)$. Si vede che

$$\begin{cases} A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 \\ |\langle Au, v\rangle| \le C\|u\|\|v\| \qquad \forall\ u \in V \\ \langle Au, u\rangle \ge \alpha\|u\|^2 \end{cases}$$

e anche ora il problema è risolvere

$$Au = F \in V'.$$

(1) a è iniettiva? (Unicità della soluzione) Preso $a \neq 0$ si ha

$$\alpha\|u\|_V^2 \le \langle Au, u\rangle \le \|Au\|_{V'}\|u\|_V \Longrightarrow \|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|Au\|_{V'} \Longrightarrow \ker A = \{\emptyset\}.$$

(2) $R(A)$ è chiuso? Sia $y_n = Au_n \longrightarrow y \in V$ e vediamo se $y = Au$ con $u \in V$. La successione $\{y_n\}$ è convergente quindi è di Cauchy; allora

$$\|u_n - u_m\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|Au_n - Au_m\|_{V'} = \frac{1}{\alpha}\|y_n y_m\| \longrightarrow 0.$$

Ma allora anche $\{u_n\}$ è di Cauchy in V e di conseguenza $u_n \longrightarrow u \in V$. Allora $Au_n \longrightarrow Au$ e quindi $R(A)$ è chiuso.

(3) $R(A) = V'$? Supponiamo per assurdo che esista $F \in V' \setminus R(A)$; per ipotesi V è riflessivo ossia $V'' = V$; adesso per Hahn-Banach esiste $\varphi \in V''$ tale che $\varphi(F) = 1$ e $\varphi(R(A)) = 0$. Quindi per la riflessività esiste $u \in V$ tale che

$$\varphi(F) = \langle u, F\rangle = 1 \qquad \langle u, Ax\rangle = 0 \quad \forall\ x \in V$$

e visto che questo vale per ogni x scegliamo $x = u$. Troviamo che

$$\langle u, Au\rangle = 0$$

e questo è assurdo.

□

Osservazione 6.7. *Osserviamo che il teorema di Lax-Milgram può essere formulato anche nel caso in cui lo spazio sia uno spazio di Hilbert.*

Osservazione 6.8. *Se oltre a soddisfare le ipotesi del teorema di Lax-Milgram, la forma bilineare $a(u, v)$ è simmetrica allora è un prodotto scalare e il teorema di Lax-Milgram diventa il teorema di Riesz.*

Teorema 6.3 (Variante del teorema di Lax-Milgram). *Sia $a : W \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dove W e V sono spazi di Banach riflessivi. Supponiamo che*

(1) $|a(w, v)| \leq C\|w\|_W \|v\|_V$;
(2) $\sup_{v\neq 0} \frac{a(w,v)}{\|v\|} \geq \alpha\|w\|$;
(3) $\sup_{w\in W} a(w, v) > 0\ \forall\ v \neq 0$.

Allora

$$a(w, v) = \langle F, v\rangle.$$

7. 9.4.2013 - Metodo di Faedo-Galerkin ed altri risultati

Adesso utilizziamo il metodo di Faedo-Galerkin assieme al teorema di Lax-Milgram per trovare la soluzione al problema che avevamo posto in forma debole.
Sia $V_a \subset V$ tale che

(1) $\dim V_a < +\infty$;
(2) $\inf_{V_a} \|v_a - v\|_V \longrightarrow 0\ \forall\ v \in V$.

Sia, per semplicità, $\Omega = [0, 1]$. Adesso

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \iff \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 f v\,dx \qquad \forall\ v \in H_0^1.$$

Noi vogliamo trovare

$$u_a \in V_a \ :\ a(u_a, v_a) = \langle F, v_a\rangle \qquad \forall\ v_a \in V_a = \langle\varphi_i\rangle, i = 1, \ldots, N.$$

Poichè V_a è generato dai $\{\varphi_i\}$ avremo

$$u_a(t) = \sum_i c_i \varphi_i(t)$$

e quindi

$$a(u_a, v_a) = \int F v_a \varphi\,dx \Longrightarrow \sum_{i,j} c_i a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) - \int f \varphi_i\,dx.$$

Questo non è altro che un sistema lineare $Ac = F$ dove

$$A_{ij} = (\varphi_i(x), \varphi_j(x)) \qquad F_i = \int f \varphi_i\,dx$$

e per il teorema di Lax-Milgram se A è coerciva e $\ker A = \{\emptyset\}$ allora abbiamo una soluzione.

Lemma 7.1 (di Céa)**.** *La migliore approssimazione ottenibile del sistema continuo è tale che*

$$\|u-u_a\|_V \le \frac{C}{\alpha}\|u-v_a\|. \tag{52}$$

Facciamo un attimo il punto dela situazione:
la **soluzione classica** di

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

è

$$u \in \mathscr{C}^2(\Omega)\cap\mathscr{C}^0(\overline{\Omega});$$

la **soluzione debole** di

$$\int \nabla u \nabla v\, dx = \int f v\, dx \qquad \forall\ v \in H_0^1$$

è

$$u \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 7.1. *Sia $u \in L^2(\Omega)$ e $\partial_i u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Allora*

$$\partial_i u \in L^2 \iff \int_\Omega |\tau_h u|^2 dx \le C \tag{53}$$

dove

$$\tau_h u := \frac{u(x+he)-u(x)}{h}.$$

Teorema 7.2 (**di De Rham**)**.** *Sia $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ con $u = \nabla p$. Allora*

$$p \in \mathscr{D}'(\Omega) \iff \int u f\, dx = 0 \qquad \forall\ f \in \left\{f \in \mathscr{C}_0^\infty, \nabla\cdot f = 0\right\} \tag{54}$$

ossia u è ortogonale alle funzioni a divergenza nulla.

Teorema 7.3 (**di Nečas**)**.** *Si hanno le seguenti possibilità:*

(1) *se $p \in \mathscr{D}'$ e $\nabla p \in L^2$ allora*

$$\inf_{\mathbb{R}}\|p-c\|_{L^2} \le C(\Omega)\|\nabla p\|_{L^2};$$

(2) *se $p \in \mathscr{D}'$ e $\nabla p \in H^{-1}$ allora*

$$\inf_{\mathbb{R}}\|p-c\|_{L^2} \le C(\Omega)\|\nabla p\|_{H^{-1}}$$

dove

$$\|f\|_{H^{-1}} := \sup \frac{\int f\varphi\, dx}{\|\nabla\varphi\|_{L^2}};$$

(3) *se $p \in \mathrm{L}^2_\#$ e $\nabla p \in H^{-1}$ allora*

$$\|p\|_{L^2} \le C(\Omega)\|\nabla p\|_{H^{-1}}.$$

8. 11.4.2013 - Esistenza di soluzioni per le equazioni di Stokes stazionarie

Siano i seguenti spazi:

$$\mathscr{V} = \left\{(\mathscr{C}_0^\infty(\Omega))^3, \nabla\cdot\varphi = 0\right\} \qquad V = \overline{\mathscr{V}}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} = \left\{H_0^1(\Omega), \nabla\cdot u = 0\right\} \tag{55}$$

e richiamiamo le (67)e il problema di Dirichlet associato:

$$(SSD)\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \Omega \\ \nabla\cdot u = 0 & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

dove $p \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $f \in V'$ dove $(H_0^1)' = H^{-1} \subset V'$.
Il prossimo risultato farà uso del metodo di Faedo-Galerkin e del teorema di Lax-Milgram e ci consentirà di arrivare ad una stima a priori.

Teorema 8.1. *Per il problema di Dirichlet per le equazioni di Stokes stazionarie si ha che*

$$f \in L^2 \Longrightarrow u \in H^2 \cap H^1_0 \cap V \qquad p \in H^1 \tag{56}$$

e inoltre vale la stima a priori

st_ss

$$\boxed{\nu \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} + (1+\nu\lambda)\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\Big)} \tag{57}$$

Dimostrazione. L'obiettivo è sfruttare il teorema di Lax-Milgram e per farlo modifichiamo leggermente le (67) in

mod

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_\lambda + \nabla p_\lambda = f \\ \lambda p_\lambda + \nabla u_\lambda = g \end{cases} \qquad \lambda > 0 \tag{58}$$

e definiamo lo spazio

$$\mathrm{L}^2_\# := \left\{ \varphi \in L^2 : \int \varphi\, dx = 0 \right\}$$

delle funzioni a quadrato sommabile e a media nulla. Per il momento cerchiamo una coppia

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \in H^1_0 \times \mathrm{L}^2_\# \doteq X$$

così da avere un vettore $U \in X$ sul quale

$$a_\lambda(U,V) = \langle F, V\rangle \qquad \forall\ V \in X.$$

Ma quale la forma bilineare a_λ che stiamo cercando? La troviamo scrivendo la formulazione integrale delle (58); siano $\varphi \in H^1_0$ e $\psi \in \mathrm{L}^2_\#$. Si ha

$$\begin{cases} \nu \int \nabla u \nabla \varphi\, dx - \int p \nabla \varphi\, dx = \int f \varphi\, dx \\ \lambda \int p \psi\, dx + \int \nabla u \psi\, dx = \int g \psi\, dx \end{cases} \tag{59}$$

e sommando le due equazioni troviamo

$$a_\lambda(U,V) = \nu \int \nabla u \nabla \varphi\, dx - \int p \nabla \varphi\, dx + \lambda \int p\psi\, dx + \int \nabla u \psi\, dx \tag{60}$$

$$\langle F, V\rangle = {}_{H^1_0}\langle f, \varphi\rangle_{H^{-1}} + \int g\psi\, dx. \tag{61}$$

Adesso vediamo se le ipotesi del teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte: per la coercività abbiamo

$$\begin{aligned} a_\lambda(U,U) &= \nu \int |\nabla u|^2 dx - \int p \nabla u\, dx + \lambda \int |p|^2 dx - \int p \nabla u\, dx = \\ &= \underbrace{\nu \|\nabla u\|^2_{L^2} + \lambda \|p\|^2_{L^2}}_{= \|U\|_X} \geq \min\{\nu, \lambda\} \|U\|_X \end{aligned}$$

e quindi a_λ è coerciva. E'anche continua e per il teorema di Lax-Milgram $\exists! U$ tale che

$$\|U\|_X \leq \frac{1}{\alpha}\|F\| \qquad a_\lambda(U,V) = \langle F; V\rangle \qquad \forall\ V \in X.$$

Inoltre

pippo

$$\begin{aligned} \nu\|\nabla u\|^2_{L^2} + \lambda\|p\|^2_{L^2} &\lesssim \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla u\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\|p\|_{L^2} \lesssim \\ &\lesssim \frac{\nu}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} + \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{H^{-1}} + \frac{\lambda}{2}\|p\|^2_{L^2} + \frac{1}{2\lambda}\|g\|^2_{L^2}. \end{aligned} \tag{62}$$

A questo punto però non possiamo passare al limite per $\lambda \to 0$ perchè c'è nella stima il termine $\frac{1}{2\lambda}$. Ciò nonostante se prendiamo $V = (0, \psi)$ la seconda equazione è soddisfatta e se prendiamo $V = (\varphi, 0)$ lo è la prima. Quindi la soluzione esiste sotto l'ipotesi che $f \in H^{-1}$ e $g \in \mathrm{L}^2_\#$. Adesso usiamo la terza delle disuguaglianze del teorema di Necas per avere una stima a priori in $\mathscr{D}'(\Omega)$ per $\nabla p = f + \nu\Delta u$ e migliorare la stima di sopra. Si ha

$$\|p\|_{L^2} \lesssim \|\nabla p\|_{H^{-1}} \lesssim \|f\|_{H^{-1}} + \nu\|\Delta u\|_{H^{-1}}$$

ma

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}} = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\langle \Delta u, \varphi\rangle}{\|\nabla \varphi\|} = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}$$

quindi si trova

$$\|\nabla p\|_{L^2} \lesssim \|\nabla p\|_{H^{-1}} \lesssim \|f\|_{H^{-1}} + \nu\|\nabla u\|_{L^2}$$

e andando a sostituire nella stima a cui eravamo arrivati si trova

$$\|\nabla u\|^2_{L^2} + \lambda\|p\|^2_{L^2} \lesssim \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{H^{-1}} + \frac{\nu}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} + \|g\|_{L^2}\|f\|_{H^{-1}} + \nu\|g\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}$$

ossia

$$\nu\|\nabla u\|_{H^{-1}} \lesssim \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{H^{-1}} + \|g\|^2_{L^2}.$$

A questo punto quindi la stima in nostro possesso è

pluto (63)
$$\nu\|\nabla u\|^2_{L^2} + (1+\lambda)\|p\|_{L^2} \lesssim \left(\|f\|_{H^{-1}} + \nu\|g\|_{L^2}\right). \tag{63}$$

Osserviamo che a questo punto, abbiamo trovato una u_λ tale che $a_\lambda(u_\lambda, v) = \langle F, v\rangle$ per ogni $v \in V$ e sappiamo che esiste una successione $\{\lambda_n\}$ tale che

$$\lambda_n \to 0 \qquad u_{\lambda_n} \xrightarrow{X} u.$$

Non è ancora finita. Adesso poniamo $f \in L^2$, come da ipotesi, e $g \in H^1 \cap \mathrm{L}^2_\#$. Vdremo che

$$\begin{cases} u \in H^1_0 \cap H^2 \\ p \in H^1 \cap \mathrm{L}^2_\# \end{cases}.$$

Sia $\mathbb{R}^3_+ := \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 > 0\}$ e consideriamo $-\Delta\omega = F$. Se sapessimo $\omega \in H^2$ allora

$$-\Delta\partial_j\omega\varphi = \partial_j F\varphi \Longrightarrow (\text{ per parti }) \Longrightarrow \int \nabla\partial_j\omega\nabla\varphi\, dx = -\int F\partial_j\varphi\, dx$$

e scegliendo $\varphi = \partial_j\omega$ troviamo

$$\|\nabla\partial_j\omega\|^2_{L^2} \leq \|F\|\|\partial_j\nabla\omega\| \tag{64}$$

e questo vale per $j = 1, 2$. Mentre per $j = 3$ si ha $-\partial_{33}\omega = F + \partial_{11}\omega + \partial_{22}\omega$.
Per arrivare ad una stima a priori consideriamo $(u, p) \in H^2 \times H^1$;

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \Omega \\ \lambda p + \nabla u = g & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \overset{\partial_j}{\Longrightarrow} \begin{cases} -\nu\Delta\partial_i u + \nabla\partial_i p = \partial_i f \in H^{-1} \\ \lambda\partial_i p + \nabla\partial_i u = \partial_i g \in \mathrm{L}^2_\# \\ \partial_i u = 0 \end{cases}.$$

Adesso usiamo la (63) con $\partial_i p$ e $\partial_i u$ così da avere (con $D_* = \partial_{11} + \partial_{22}$)

$$\nu\|D^2_* u\|_{L^2} + (1+\lambda)\|\nabla_* p\|_{L^2} \lesssim \left(\|f\|_{L^2} + \nu\|g\|_{H^1}\right)$$

ma come controlliamo il termine ∂_{33}? Dalle equazioni vettoriali prendiamo la terza per u e p e portando a destra i termini già sotto controllo si ha

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_3 + \partial_3 p = f_3 \\ \lambda\partial_3 p + \nabla\partial_3 u = \partial_3 g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\nu\partial_{33} u_3 + \partial_3 p = f_3 + \nu(\partial_{11} u_3 + \partial_{22} u_3 \\ \lambda\partial_3 p = \partial_3 g - \partial_1\partial_3 u_1 - \partial_2\partial_3 u_2 \end{cases}.$$

Il sistema è risolvibile perchè ha determinante $-1 - \nu\lambda \neq 0$ e possiamo procedere con le seguenti stime:

$$\begin{cases} \nu\|\partial_{33} u_3\|_{L^2} + (1+\lambda)\|\partial_3 p\| \lesssim \|f_3\|_{L^2} + \nu\|g_3\|_{H^1} \\ \nu\|\partial_{33} u_2\|_{L^2} + (1+\lambda)\|\partial_3 p\| \lesssim \|f_2\|_{L^2} + \nu\|g_2\|_{H^1} \\ \nu\|\partial_{33} u_1\|_{L^2} + (1+\lambda)\|\partial_3 p\| \lesssim \|f_1\|_{L^2} + \nu\|g_1\|_{H^1} \end{cases}$$

che finalmente ci portano alla (57).
Consideriamo ora un'approssimazione del nostro problema:

ss_appr (65)
$$\begin{cases} -\nu\Delta u + t\nabla p = f \\ \lambda p + t\nabla u = g \end{cases} \qquad t \in [0,1]; \tag{65}$$

facendo questo la stima a priori appena ricavata diventa

$$\frac{\nu}{t}\|u\|_{H^2} + (1 + \frac{\lambda\nu}{t^2})\|p\|_{H^1} \lesssim \left(\frac{1}{t}\|f\|_{L^2} + \frac{\nu}{t^2}\|g\|_{H^1}\right)$$

che è problematica quando $t = 0$. Guardando meglio le cose notiamo che quando $t = 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -\nu\Delta u = f & \Omega \\ \lambda p = g & \Omega \end{cases}$$

con u e p disaccoppiate! La stima che invece varrà, in $t=0$, è

$$\nu\|u\|_{H^2}+\|p\|_{H^1}\lesssim\|f\|_{L^2}+\|g\|_{H^1}.$$

□

Lemma 8.1. *Sia il sistema approssimato (65). Esiste $\delta_0>0$ per cui il sistema ammette soluzione unica per $t\in[0,\delta_0]$ e inoltre*

$$\|u\|_{H^2}+\|p\|_{H^1}\leq\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^2}+\frac{1}{\lambda}\|g\|_{H^1}\qquad\forall\ t\in[0,\delta_0]. \tag{66}$$

Dimostrazione. Ci riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases}-\nu\Delta u=f-t\nabla p\\ \lambda p=g-t\nabla u\end{cases}$$

e prendiamo $(v,q)\in(H^2\cap H^1_0)\times(H^1\cap \mathrm{L}^2_\#)$. L'obiettivo è arrivare a dimostrare che l'applicazione $\Phi:(v,q)\longmapsto(u,p)$ è una contrazione; prendiamo $(v,q),(\bar v,\bar q),(u,p),(\bar u,\bar p)$. Allora

$$\begin{cases}-\nu\Delta(u-\bar u)=-t\nabla(q-\bar q)\\ \lambda(p-\bar p)=-t\nabla(v-\bar v)\end{cases}\quad\Longrightarrow\begin{cases}\nu\|u-\bar u\|_{H^2}\leq\delta_0\|q-\bar q\|_{H^1}\\ \|p-\bar p\|_{H^1}\leq\frac{\delta_0}{\lambda}\|v-\bar v\|_{H^2}\end{cases}$$

con le ultime due stime che, s unite, diventano

$$\|u-\bar u\|_{H^2}+\|p-\bar p\|_{H^1}\leq\delta_0\left(\frac{1}{\nu}\|q-\bar q\|_{H^1}+\frac{1}{\lambda}\|v-\bar v\|_{H^2}\right).$$

Afffinchè si abbia una contrazione bisogna imporre che

$$\max\left\{\frac{\delta_0}{\nu},\frac{\delta_0}{\lambda}\right\}<1$$

e dato che ν e λ sono dati, riusciamo a trovare δ_0. □

Osservazione 8.1. *Ricordiamo due cose:*

(1) *per le immersioni di Sobolev si ha*

$$\begin{array}{lll} n=3 & W^{1,2}_0(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega) & \\ n=2 & W^{1,2}_0(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega) & q<+\infty;\end{array}$$

(2) *se $f\in L^p\cap L^q$ allora $f\in L^r$ con $p<r<q$ ed*

$$\|f\|_{L^r}\lesssim\|f\|^{\vartheta}_{L^p}\|f\|^{1-\vartheta}_{L^q}\qquad\frac{1}{r}=\frac{\vartheta}{p}+\frac{1-\vartheta}{q}.$$

9. 12.4.2013 - Regolarità per il problema di Stokes, esistenza nel caso stazionario non lineare:dati piccoli con contrazioni e dati qualsiasi

Allo stato attuale sappiamo che per il problema di Stokes stazionario lineare se $f\in L^2$ allora $u\in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\cap V$ dove $H^2\cap V=D(A)$ con $A=-\mathbb{P}\Delta$ e inoltre che

$$\|Au\|_{L^2}\simeq\|u\|_{H^2}.$$

Vediamo ora se ci sono le condizioni per poter utilizzare il metodo di Faedo-Galerkin: dobbiamo prendere $u_h\in V_h$ con $\dim V_h<+\infty$ e avere $a(u_h,v_h)=(f,v_h)$ per ongi $u_h\in V_h$. Il problema è che questi V_h non esistono...
Proviamo a modificare qualcosa: siano $(u,p)\in H^1_0\times \mathrm{L}^2_\#$ e scriviamo il problema in forma debole ossia

$$\begin{cases}\int\nabla u\nabla v\,dx-\int p\nabla v\,dx=\int fv\,dx\\ \int\nabla u q=0\end{cases}\qquad\forall\ (v,q)\in H^1_0\times\mathrm{L}^2_\#.$$

Adesso possiamo cercare $(u_h,p_h)\in X_hH^1_0\times\mathrm{L}^2_\#$ che risolvano il problema per ogni $(v_h,q_h)\in X_h$. Ma c'è ancora un altro problema: manca la coercività, ma ce la caviamo aggiungendo λp. Così facendo possiamo scrivere

$$A_h\begin{pmatrix}u_h\\ p_h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_h\\ 0\end{pmatrix}$$

con

$$u_h=\sum_i c_i\varphi_i\qquad p_h=\sum_i d_i\psi_i$$

dove $\langle \varphi_i \rangle = V_h \subset H_0^1$ e $\langle \psi_i \rangle = W_h \subset \mathrm{L}^2_{\#}$.
Passiamo adesso al problema non lineare ossia alle equazioni di Navier-Stokes stazionarie:

SE_S
$$\begin{cases} -\nu \Delta u + (u\nabla)u + \nabla p = f & \Omega \\ \nabla u = 0 & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{67}$$

Ci aspettiamo che $u \in V = \{v \in H_0^1 : \nabla \cdot v = 0\}$. La formulazione variazionale del problema è

$$\nu \int \nabla u \nabla v dx + \int (u \cdot \nabla) u v dx = \langle f, v \rangle \qquad \forall\ v \in V. \tag{68}$$

Mettiamo in evidenza a destra il termine non lineare così da lavorare con

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f - (u\nabla)u;$$

vogliamo modificare il termine a destra in $f - (\omega\nabla)u$ e studiare la mappa tale che $\omega \longmapsto u$.
Definiamo una forma bilineare $a_\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$a_\omega(u,v) = \nu \int \nabla u \nabla v dx + \int (\omega\nabla) u v dx$$

alla quale applicheremo il teorema di Lax-Milgram. Ma dobbiamo verificare che le condizioni richieste siano soddisfatte. Per la coercività abbiamo

$$a_\omega(u,u) = \nu \int |\nabla u|^2 dx + \int (\omega\nabla) u dx$$

ma il secondo termine è

$$\int \omega_j \partial_j u_i u_i dx = \int \omega_j \partial_j \frac{|u|^2}{2} dx = (\text{per parti}) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \omega_j n_j \frac{|u|^2}{2} dx}_{=0, \omega \in V} - \underbrace{\int_{\Omega} \partial_j \omega_j \frac{|u|^2}{2} dx}_{=0, \omega \in V}$$

e di conseguenza

coer_ssnl
$$a_\omega(u,u) \simeq \|u\|_{H_0^1} \lesssim \nu \|u\|_V^2. \tag{69}$$

Per quanto riguarda la continuità, per Schwartz sappiamo che

$$\nu \int \nabla u \nabla v dx \le \nu \|u\|_V \|v\|_V$$

quindi il primo pezzo riusciamo a controllarlo. Per il secondo, usando Hölder si ha

$$\int \underbrace{\omega}_{L^4} \underbrace{\nabla u}_{L^2} \underbrace{v}_{L^4} dx \lesssim \|\omega\|_{L^4} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^4} \qquad 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1.$$

Adesso pocihè per $n = 3$ si ha l'immersione $H_0^1 \longleftrightarrow L^6$ e quindi $\|\omega\|_{L^6} \lesssim \|\nabla\omega\|_{L^2}$, l'ultima quantità scritta può essere ulteriormente stimata con

$$\|\omega\|_{L^6} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^6} \lesssim \|\nabla\omega\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \le C \|u\|_V \|v\|_V$$

dove l'ultima stima è dovuta al fatto che ω è assegnata. A questo punto, per Lax-Milgram, $\forall\ f \exists! u \in V$ e per (69) si ha che

$$\nu \|\nabla u\|_{L^2}^2 \le a_\omega(u,u) \le \|f\|_{V'} \|\nabla u\|_{L^2} \Longrightarrow \|\nabla u\|_{L^2} \le \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}.$$

Ora possiamo cominciare a parlare di punto fisso; vogliamo capire come sono legati $\|\omega - \bar\omega\|_{L^2}$ ed $\|u - \bar u\|_{L^2}$. Poniamo $a_\omega(u,v) = \langle f, v \rangle$ e $a_{\bar\omega}(\bar u, v) = \langle f, v \rangle$. Allora

$$\begin{aligned} & a_\omega(u,v) - a_{\bar\omega}(\bar u, v) = 0 \iff \\ & \iff \nu \int \nabla u \nabla v dx - \nu \int \nabla \bar u \nabla v dx + \int (\omega\nabla) u v dx - \int (\bar\omega\nabla)\bar u v dx = 0 \iff \\ & \iff \nu \int (\nabla u - \nabla \bar u) \nabla v dx + \int [(\omega\nabla)u - (\bar\omega\nabla)\bar u] v dx = 0. \end{aligned}$$

Ora poniamo $v = u - \bar u$ e aggiungiamo e togliamo $\omega\nabla\bar u$ nell 'ultimo integrale scritto così da avere

$$\nu \int |\nabla u - \nabla \bar u|^2 dx + \underbrace{\int (\omega\nabla)(u - \bar u)(u - \bar u) dx}_{=0} + \int (\omega - \bar\omega) \nabla \bar u (u - \bar u) dx = 0$$

con il secondo integrale nullo e si vede integrando per parti; ora portando a destra l'ultimo integrale si ha

$$\|\nabla(u-\bar{u})\|_{L^2}^2 \lesssim \|\omega-\bar{\omega}\|_{L^4}\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}\|u-\bar{u}\|_{L^4} \lesssim \|\nabla(\omega-\bar{\omega})\|_{L^2}\|\nabla\bar{u}\|_{L^2}\|\nabla(u-\bar{u})\|_{L^2}.$$

Ora prendiam la palla

$$K=\left\{v\in V:\|u\|_V\le\frac{\|f\|_{V'}}{\nu}\right\}$$

che è chiusa il che significa che se prendiamo $\omega\in K$ allora $\omega\longmapsto u\in K$. Infine abbiamo che

$$\nu\|u-\bar{u}\|_V^2\le C(\Omega)\|\omega-\bar{\omega}\|_V\frac{\|f\|_{V'}}{\nu}\|u-\bar{u}\|_V \Longrightarrow \|u-\bar{u}\|_V\le\frac{C}{\nu^2}\|f\|_{V'}\|\omega-\bar{\omega}\|_V$$

e questo ci consente di dire che per avere una contrazione si deve imporre

$$\frac{C}{\nu^2}<1.$$

Osservazione 9.1. *Cosa ci consentono di dire questi calcoli? Abbiamo capito che si ha la soluzione quando ν è molto grande quindi quando* $\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$ *è piccolo.*

Il risultato di esistenza appena visto ha senso nel caso di dati piccoli; adesso vediamo se qualcosa si può dire per ν ed f arbitrari.

Lemma 9.1. *Sia $p(x)\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ e sia $\rho>0$ tale che $(p(x),x)\ge 0$ quando $|x|=\rho$. Allora esiste almeno un ξ tale che*

$$|\xi|\le\rho \qquad p(\xi)=0.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $p(x)\neq 0$ nella palla $B(0,\rho)$ e consideriamo la mappa tale che

$$x\longmapsto\frac{p(x)}{\|p(x)\|}\rho\in B(0,\rho)$$

che è continua da una palla chiusa in se. Per Brower esiste $\xi\in B(0,\rho)$ tale che

$$\xi=-\frac{p(x)}{\|p(x)\|}\rho$$

e quindi $\|\xi\|=\rho$. Allora

$$(p(\xi),\xi)=-\frac{(p(\xi),p(\xi))}{\|p(\xi)\|}\rho\le 0$$

che è assurdo perchè per ipotesi $(p(x),x\ge 0$. □

Proviamo ora ad utilizzare il metodo di Faedo-Galerkin con base spettrale. Sia ora $A:D(A)\longrightarrow H$ e $A^{-1}f\in H^2\cap V\Subset H$. A^{-1} è compatto e supponiamo che esistano dei ω_j tali che $A\omega_j=\lambda_j\omega_j$ e quindi si avrà

$$\begin{cases}-\nu\Delta\omega_j+\nabla p_j=\lambda_j\omega_j & \Omega\\ \nabla\cdot\omega_j=0 & \Omega\\ \omega_j=0 & \partial\Omega\end{cases} \qquad \int\omega_i\omega_j\,dx=\delta_{ij}. \tag{70}$$

Sia al solito V_m di dimensione finita con generatori questi autovettori ossia $V_m=\langle\omega_1,\dots,\omega_m\rangle$; Cerchiamo una

$$u_m=\sum_{j=1}^m\xi_j\omega_j\in V_m$$

che soddisfi

$$\nu\int\nabla u_m\nabla v_m\,dx+\int u_m\nabla u_m v_m\,dx=\langle f,v_m\rangle \qquad \forall\ v_m\in V_m.$$

Sia

$$v_m=\sum_{j=1}^m\eta_j\omega_j$$

e ora sfrutteremo il lemma appena introdotto. Si ha

$$(p(\xi),\eta)=\nu\int\nabla u_m\nabla v_m\,dx+\int(u_m\nabla)u_m v_m-\langle f,v_m\rangle\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(p(\xi),\xi)=\nu\int|\nabla u_m|^2dx-\langle f,u_m\rangle=(\square).$$

Notiamo che un' integrazione per parti ci da

$$\int (u_m \nabla) u_m v_m dx = 0$$

perchè $u_m \in V_m$. Inoltre adesso si ha

$$-\langle f, v_m \rangle \geq \|f\|_{V'} \|\nabla u_m\|$$

e di conseguenza

$$(\square) \geq \nu \|u_m\|^2 - \|f\|_{V'} \|\nabla u_m\| \Longrightarrow (p(\xi), \xi) \geq 0.$$

Per il lemma appena visto esiste ξ tale che $p(\xi) = 0$ e questo significa che esiste almeno un u_m che soddisfa il sistema.
Non è finita...ora bisogna passare al limite per $m \to +\infty$; il fatto che

$$\|\nabla u_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}$$

ci assicura che esiste una costante C uniforme in m tale che $\|u_m\|_V \leq C$. Allora possiamo affermare che, a meno di sottosuccessioni, poichè V è riflessivo esiste u tale che

$$u_m \overset{V}{\rightharpoonup} u \in V.$$

Inoltre poichè $H_0^1 \Subset L^2$ e $V \Subset H$ possiamo dire che $u_m \xrightarrow{H} u$ per immersione compatta.
Ma u è effettivamente soluzione del problema? Si ha che

$$\nu \int \nabla u_m \nabla \omega_j dx \rightharpoonup \nu \int \nabla u \nabla \omega dx$$

mentre per per l'altro termine bisogna essere più delicati dato che il prodotto di cose che convergono debolmente non è detto che converga debolmente. Vediamo di fare qualcosa:

$$\int u_m \nabla u_m \omega j dx = -\int (u_m \nabla) \omega_j u_m dx$$

che ha componenti $u_m^k \partial_k \omega_j^i u_m^i$; ossiamo supporre che sia u_m^i che u_m^j siano il L^6 e quindi che $u_m^i u_m^j \in L^3$. Allora esisterà una χ_{ij} tale che

$$u_m^i u_m^j \overset{L^3}{\rightharpoonup} \chi_{ij}$$

e quindi bisogna vedere se $\chi_{ij} = u^i u^j$. Ma la convergenza debole è q.o. e quindi c'è convergenza ossia

$$\int u_m^k \underbrace{\partial_k \omega_j^i}_{\in L^{3/2}} u_m^i dx \longrightarrow -\int \chi_{ij} \partial_k \omega_j dx = -\int (u\nabla) \omega_j u dx = \int (u \nabla) u \omega_j dx.$$

Notiamo che il fatto di aver dovuto considerare delle sottosuccessioni non ci permette di controllare l'unicità della soluzione.

Osservazione 9.2 (**Sull'unicità**). *Supponiamo di avere due soluzioni u_1 e u_2 e vediamo cosa possiamo dire:*

$$-\nu \int [\Delta(u_1 - u_2)](u_1 - u_2) dx + \int (u_1 \nabla u_1 - u_1 \nabla u_2 + u_2 \nabla u_1 - u_2 \nabla u_2)(u_1 - u_2) dx = 0$$

che ponendo $U = u_1 - u_2$ diventa

$$\nu \int |\nabla U|^2 dx + \int (u_1 \nabla) U U dx + \int (\underbrace{U}_{\in L^4} \nabla) \underbrace{u_2}_{\in L^2} \underbrace{U}_{\in L^4} dx = 0.$$

Sfruttando Hölder come visto in precedenza otteniamo la seguente stima:

$$\|\nabla U\|_{L^2}^2 \lesssim \|\nabla u_2\|_{L^2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 \lesssim \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'} \|\nabla U\|_{L^2}^2$$

e quindi

$$\left(\nu - \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}\right) \|\nabla U\|_{L^2}^2 \leq 0. \tag{71}$$

Proposizione 9.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Vale la seguente disuguaglianza:*

ladyzhen_1

$$\|v\|_{L^4} \leq 2^{1/4} \|v\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2}^{1/2} \qquad \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{72}$$

Dimostrazione. Sia $v \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. Si ha

$$|v(x)|^2 = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 |v|^2 d\xi_1 = 2\int_{-\infty}^{x_1} v(\xi_1, x_2)\partial_1 v(\xi_1, x_2) d\xi_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |v(x)|^2 \le 2v_1(x_2)$$

ed automaticamente vale anche

$$|v(x)|^2 \le 2v_2(x_1).$$

Allora

$$\begin{aligned} \int |v|^4 dx &= \int |v|^2|v|^2 dx \le 4\iint_{\mathbb{R}^2} v_1(x_2)v_2(x_1)dx_1dx_2 = \\ &= 4\int_{\mathbb{R}} v_1(x_2)dx_2 \int_{\mathbb{R}} v_2(x_1)dx_1 \le \\ &\le \left(\iint |v(x)||\partial_2 v(x)|dx\right)\left(\iint |v(x)||\partial_1 v(x)|dx\right) \le \qquad (73) \\ &\le 4\|v\|_{L^2}^2 \underbrace{\|\partial_2 v\|_{L^2}}_{a}\underbrace{\|\partial_1 v\|_{L^2}}_{b} \le \left(ab \le \frac{a^2+b^2}{2}\right) \le 2\|v\|_{L^2}^2\|\nabla v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato che $\|v\|_{L^4}^4 \le 2\|v\|_{L^2}^2\|\nabla v\|_{L^2}^2$ e questo conclude. □

10. 2.5.2013 - Introduzione agli spazi di Bochner, formulazione del problema di Stokes evolutivo e teorema di esistenza per soluzioni deboli

E' il momento di cominciare a vedere il problema di Stokes evolutivo ossia

sse

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = f & \Omega \times [0,T] \\ \nabla \cdot u = 0 & \Omega \times [0,T] \\ u = 0 & \Omega \times \{0\} \end{cases} \qquad (74)$$

con $u(t,x) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$; lo spazio naturale in cui pensare la u sarà

$$V = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \nabla \cdot u = 0\right\}.$$

Osservazione 10.1. *Ricordiamo due cose. Si ha che $u \in \mathscr{C}([0,T],X)$ se dato t_0, si ha $\forall\ \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0$ tale che $\|u(t) - u(t_0)\|_X < \varepsilon$ per ogni $t \in [0,T]$ e $|t - t_0| < \delta$ e che questo è più che dire che $\|u(t)\|_X \longrightarrow \|u(t_0)\|_X$. Inoltre*

$$\|u\|_{\mathscr{C}([0,T],X)} := \sup_{t\in[0,T]} \|u\|_X.$$

Inoltre u è debolmente continua ossia $u \in \mathscr{C}_W([0,T],X)$ se

$$\langle u(t).u(t_0), \varphi\rangle \xrightarrow{X,X^*} 0 \qquad \forall\ \varphi \in X^*.$$

Se prendiamo la (74) e la moltiplichiamo per u arriviamo alla seguente identità:

dat_in

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 dt = \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int fu dx dt \qquad (75)$$

e per questo dobbiamo parlare dell'integrale di Bochner.
Sia $u : [0,T] \longrightarrow X$. Dobbiamo definire

$$\int_a^b u(t)dt \in X \qquad [a,b] \subset [0,T]$$

ossia estendere l'integrazione a spazi di Banach di dimensione infinita. Come facciamo?
Prendiamo $f : [0,T] \longrightarrow X$ funzioni semplici e $B_i \subset [0,T]$ siano misurabili; $i = 1, \ldots, n$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \ne j$. Poniano

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{B_i}.$$

Definizione 10.1 (**Funzione fortemente misurabile**). *Una funzione f è fortemente misurabile se esiste una successione di funzioni semplici $\{f_n\}$ tali che*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0.$$

Lemma 10.1. *Se f è una funzione fortemente misurabile allora la funzione tale che $t \longmapsto \|f(t)\|_X$ è misurabile.*

Definizione 10.2 (Integrabilità secondo Bochner). *Una funzione f è Bochner-integrabile se esiste una successione di funzioni semplici $\{f_n\}$ tale che*

$$\int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_X \, dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e quindi

$$\int_0^T f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T f_n(t)\,dt.$$

Teorema 10.1 (di Bochner). *Sia $f : [0,T] \longrightarrow X$ fortemente misurabile. Allora f è Bochner-integrabile se e solo se*

$$\int_0^t \|f(t)\|_X \, dt < +\infty.$$

Osservazione 10.2. *Osserviamo che*

(1)
$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\|_X \le \int_a^b \|f(t)\|_X \, dt;$$

(2)
$$\int_a^b \langle f, \varphi \rangle \, dt = \left\langle \int_a^b f\,dt, \varphi \right\rangle \qquad \forall\ \varphi \in X^*.$$

Osservazione 10.3. *Che differenza c'è tra l'integrale di Bochner e quello classico?*
Prendiamo $f \in L^1(0,T;X)$ e

$$u(t) = \xi + \int_0^t f(t)\,dt \qquad \xi \in X.$$

Se la dimensione di X fosse finita allora $u \in \mathscr{AC}(0,T;X)$ mentre se fosse infinita, la scrittura potrebbe non avere senso.

E' importante ricordare una cosa che da qui in poi cominceremo a usare spesso. Sia $u \in L^p(0,T;X)$ con norma relativa

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Allora per $1 < p < +\infty$ si ha che

dual_1

$$\boxed{\left(L^p(0,T;X)\right)^* = L^{p'}(0,T;X^*) \qquad 1/p + 1/p' = 1.} \tag{76}$$

Definizione 10.3 (Differenziabilità). *Sia $f : [0,T) \longrightarrow X$. Essa è differenziabile in $t_0 \in [0,T)$ se esiste $\omega \in X$ tale che*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} - \omega \right\|_X = 0.$$

Osservazione 10.4. *Sia $u \in L^1(0,T;X)$ e $t_0 \in (0,T)$ e $\xi \in X$. Se consideriamo*

$$v(t) = \xi + \int_0^t u(s)\,ds$$

allora $v(t)$ è tale che

(1) *$v \in \mathscr{C}(0,T;X)$;*
(2) *esiste v' quasi ovunque.*

Definizione 10.4 (Derivata generalizzata). *Sia $f \in L^1(0,T;X)$; f possiede derivata generalizzata se esiste $g \in L^1(0,T;X)$ tale che*

$$\int_0^T f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)\,dt \qquad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(0,T). \tag{77}$$

Proposizione 10.1. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1)
$$u(t) = \xi + \int_0^T g(s)\,ds$$
con $g \in L^1(0,T;X)$ *e q.o.* $t \in [0,T]$*;*

(2)
$$\int_0^T u\varphi'\,dt = -\int_0^T g\varphi\,dt \qquad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(0,T);$$

(3)
$$\frac{d}{dt}\langle u,\eta\rangle_{X,X^*} = \langle g,\eta\rangle_{X,X^*} \qquad \forall\ \eta \in X^*.$$

Definizione 10.5 (**Funzione di Carhatheodory**)**.** *E' detta tale una funzione* $f(x,y)$ *continua in* y *per* x *fissato e misurabile in* x *per* y *fissato.*

Teorema 10.2 (**di Caratheodory**)**.** *Sia* $f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *di Caratheodory. Sia*

carat (78)
$$\begin{cases} y' = f(x,y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $x \in J$*. Supponiamo che esista* $h \in L^1(J)$ *tale che*
$$|f(x,b)| \le h(x).$$
Allora $y \in \mathscr{C}(J)$ *e*
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s,y(s))\,ds.$$

Proposizione 10.2. *In aggiunta al teorema precedente se esiste* $\ell \in L^1(J)$ *tale che*
$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \le \ell(x)|y - \bar{y}|$$
allora la soluzione di (78) è unica.

Adesso siamo pronti per il prossimo risultato d'esistenza che riguarda il problema di Stokes evolutivo.

Proposizione 10.3. *Sia il problema (74). Se* $f \in L^2(0,T;V^*)$ *e*
$$u_0 \in H = \left\{u \in L^2, \nabla u = 0, un = 0\right\}$$
allora $u \in L^2(0,T;V)$.[3]

Dimostrazione. Dobbiamo scrivere il problema in forma variazionale ossia
$$\langle \partial_t u, \varphi\rangle + \langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d}{dt}\langle u,\varphi\rangle + (\nabla u, \nabla\varphi) = \langle f,\varphi\rangle \qquad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}'(0,T)$$
$$\Downarrow$$
$$-\int_0^T \langle u,\varphi\rangle \psi'(t)\,dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla \varphi)\psi(t)\,dt = \int_0^T \langle f,\varphi\rangle\psi(t)\,dt.$$
Utilizzando l'operatore $A = \mathbb{P}(-\Delta)$ possiamo ancora riscrivere tutto come
$$\frac{d}{dt}\langle u,\varphi\rangle + \langle Au,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \Longrightarrow \langle u_t,\varphi\rangle = \langle f - Au,\varphi\rangle_{X,X^*}$$
e otteniamo che $Au \in L^2(0,T;V^*)$ e $u_t \in L^2(0,T,V^*)$. Adesso vogliamo costruire la soluzione col metodo di Faedo-Galerkin: sia V separabile e $\{\omega_j\}$ una successione totale ossia tale che $\forall\ \varepsilon > 0\, \exists\ N$ tale che, preso $v \in X$, si ha
$$\left\| v - \sum_{i=1}^N c_i\omega_i \right\|_V < \varepsilon.$$

[3] In effetti vedremo anche che u sta anche in $\mathscr{C}(0,T;V^*)$ e in $L^\infty(0,T;H)$.

Sia $V_m = \langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$; cerchiamo una $u_m : [0,T] \longrightarrow V_m$ che approssimi la soluzione del problema e sia del tipo

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j.$$

Adesso abbiamo

$$(u_m', \omega_k) + (\nabla u_m, \nabla \omega_k) = \langle f, \omega_k \rangle \qquad \forall\ k = 1, \dots, m \tag{79}$$

ossia un sistema di m EDO in m incognite. Per poter applicare il teorema di Cauchy per risolvere un problema di Cauchy del tipo carat (78) dovremmo sapere che $f(t,y)$ sia continua in t e lipschitziana in y, mentre noi sappiamo solo che $f \in L^2$. Ora si ha

$$\int u_m' \omega_k dx = \int \sum_{j=1}^{m} \dot{g}_{jm}(t)\omega_j \omega_k dx = \sum_{j=1}^{m} \int \dot{g}_{jm}(t)\omega_j \omega_k dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \dot{g}_{jm} \int_\Omega \omega_j \omega_k dx$$

e se chiamiamo $A_{jk} = \int \omega_j(x)\omega_m(x)dx$ essa avrà $\det A_{jk} \neq 0$ e potremo scrivere il primo termine come

$$\int u_m' \omega_k dx = \sum_{j=1}^{m} \dot{g}_{jm} A_{jk}.$$

Poi abbiamo

$$\sum_{j=1}^{m} \nabla(g_{jm}\omega_j)\nabla\omega_k = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} \int \nabla\omega_j \nabla_k dx = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} B_{jk}$$

e questo ci porta alla seguente equazione

$$\dot{g}_{jm} A_{jk} + g_{jm} B_{jk} = f_k \in L^2(0,T). \tag{80}$$

con dato iniziale

$$u_m(0,x) = \frac{1}{\|\omega_j\|_{L^2}^2} \int (u_0(x), \omega_j)\omega_k dx.$$

A questo punto vogliamo ottenere una stima a priori; moltiplichiamo a destra e a sinistra per g_{km} quindi abbiamo

$$\int u_m' g_{km} \omega_k dx + \int \nabla u_m g_{km} \omega_k dx = \langle f, g_{km}\omega_k \rangle_{V,V^*}$$

e

$$\sum_{k=1}^{m} g_{km}\omega_k = u_m$$

e andando a sostituire troviamo

$$\int u_m' u_m dx + \int \nabla u_m \nabla u_m dx = \langle f, u_m \rangle \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \leq \text{(Pincarè)} \leq \|f\|_{V^*}\|\nabla u_m\|_{L^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{V^*}.$$

Integrando in t otteniamo che

$$\|u_m\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 ds \leq \|u_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|f\|_{V^*}^2 ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|f\|_{V^*}^2 ds < +\infty$$

dove non c'è più dipendenza da m.
Questo ci è servito a poter dire che

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq cost \qquad \|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq cost. \tag{81}$$

A questo punto possiamo trovare una successione limitata in uno spazio riflessivo tale che $u_m \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;V)$ ossia tale che

$$\int_0^T (\nabla u_m - \nabla u, \varphi)ds \longrightarrow 0 \qquad \forall\ \varphi \in L^2(0,T;V).$$

Adesso però sorge un problema: sappiamo che $(L^\infty)^* \neq L^1$ e quindi bisognerà cercare una $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ ossia tale che

$$\int_0^T (u_m - u, \varphi)\, ds \longrightarrow 0 \qquad \forall\ \varphi \in L^1(0,T;H).$$

Inoltre si avrà anche $u'_m \rightharpoonup u' \in L^2(0,T;V^*)$.
Trovate queste successioni resta da vedere se esse soddisfano l'equazione ossia se

$$\frac{d}{dt}(u,\varphi) + \int \nabla u \nabla \varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall\ \varphi \in V.$$

Il termine $\langle f, \varphi\rangle$ non è problematico dato che abbiamo $\langle f, \omega_k\rangle$ con ω_k densi in V. Invece, preso $\omega_k \in V_m \subset V$; sia

$$\int_0^T (\nabla u_m, \nabla \omega_k)\psi(t)\, dt$$

che convergerà a

$$\int_0^T (\nabla u, \nabla \omega_k)\psi(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T \nabla u \nabla \varphi\, dx$$

nel senso delle distribuzioni. □

11. 9.5.2013 - Regolarità per le soluzioni del problema di Stokes evolutivo; tripla di Gelfand e stime pesate

Coninuiamo a parlare del problema (74). L'ultima volta avevamo visto che se $f \in L^2(0,T;V^*)$ allora $u \in L^2(0,T;V)$ e $u_t \in L^2(0,T;V^*)$. Inoltre, ricordando che $V \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, che

$$\begin{cases} u \in \mathscr{C}(0,T;V^*) \\ u \in L^\infty(0,T;H) \end{cases} \Longrightarrow u \in \mathscr{C}_W(0,T;H).$$

Lemma 11.1. *Sia $X \hookrightarrow Y$ un'immersione continua con Y spazio di Banach e X denso in Y. Se $\phi \in L^\infty(0,T;X)$ e $\phi \in \mathscr{C}_W(0,T;Y)$ allora $\phi \in \mathscr{C}_W(0,T;X)$.*

Dimostrazione. Prendiamo $\phi(t) \in X\ \forall\ t \in [0,T]$; tronchiamola con

$$\tilde{\phi} = \begin{cases} \phi & [0,T] \\ 0 & \mathbb{R} \setminus [0,T] \end{cases}$$

e regolarizziamola con $\rho \in \mathscr{C}_0^\infty(-1,1)$, la quale sia normalizzata a 1. Quindi definiamo il nucleo di convoluzione $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\rho(x/\varepsilon)$. Sia la regolarizzata $\phi_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{\phi} \in \mathscr{C}^\infty$. A questo punto

$$\|\phi_\varepsilon(t)\|_X \leq \|\phi(t)\|_{L^\infty(0,T;X)}$$

e per convergenza debole si ha che

$$\langle \phi_\varepsilon, \eta\rangle \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \langle \phi, \eta\rangle \qquad \forall\ \eta \in X^*$$

e

$$|\langle \phi_\varepsilon \eta\rangle| \leq \|\phi\|_{L^\infty}\|\eta\|_{X^*} \qquad \phi := \lim_{\varepsilon\to 0}\phi_\varepsilon(t).$$

Per ipotesi $X \hookrightarrow Y$ e quindi $Y^* \hookrightarrow X^*$ e poichè $\eta \in X^*$, si ha che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta_\varepsilon \in Y^*$ tale che

$$\|\eta - \eta_\varepsilon\|_{X^*} < \varepsilon$$

e quindi

$$\langle \phi(t) - \phi(t_0), \eta\rangle_{X,X^*} \overset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$$

ma

$$\underbrace{\langle \phi(t) - \phi(t_0),}_{=0,\,t\to 0} \eta_\varepsilon\rangle + \langle \phi(t) - \phi(t_0), \eta - \eta_\varepsilon\rangle \leq 2\|\phi\|_X \|\eta - \eta_\varepsilon\|_{X^*} \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\,\|\phi\|_{L^\infty(0,T;X)}$$

e di conseguenza

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}\left|\langle \phi(t) - \phi(t_0), \eta\rangle\right| \leq C\varepsilon$$

e da qui la continuità debole. □

Lemma 11.2. *Sia $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V$; sia $u \in L^2(0,T;V)$ e $u_t \in L^2(0,T;V^*)$. Allora*

$$u \in \mathscr{C}(0,T;H) \qquad e \qquad \frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = 2\langle u, u_t\rangle_{V,V^*}. \tag{82}$$

Dimostrazione. Si ha che l'applicazione tale che $t \longmapsto \langle u, u_t\rangle_{V,V^*}$ è in $L^1(0,T)$ nel senso delle distribuzioni ed anche quella tale che $t \longmapsto \|u\|_H^2$ lo è. Ancora qui consideriamo $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{u} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, V)$ e per essa si ha che per $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \longrightarrow u$ in $L^2_{loc}(0,T;V)$ e quindi anche $(u_\varepsilon)_t \longrightarrow u_t$ in $L^2_{loc}(0,T;V)$.
Presa u_ε si ha

$$\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon\|_H^2 = 2\int u_\varepsilon u_\varepsilon' dx = 2\langle u_\varepsilon, u_\varepsilon'\rangle_{V,V^*}$$

quindi

$$\|u_\varepsilon(t)\|^2 - \|u_\varepsilon(0)\|^2 = 2\int_0^t \langle u_\varepsilon, u_\varepsilon'\rangle ds$$
$$\|u(t)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2 = 2\int_0^t \langle u, u'\rangle ds$$

e di conseguenza

$$\|u(t)\|_H^2 \le \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^t |\langle u, u_t\rangle| ds = C.$$

Questo significa che $u \in L^\infty(0,T;H)$ e per il lemma precedente $u \in \mathscr{C}_W(0,T;H)$. □

Adesso perliamo un pò di unicità per il problema (74).
Siano

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta u_1 + \nabla p_1 = f \\ u_1(x,0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t u_2 - \Delta u_2 + \nabla p_2 = f \\ u_2(x,0) = u_0 \end{cases}$$

e da questi due problemi ricaviamo

$$\begin{cases} \partial_t(u_1-u_2) - \Delta(u_1-u_2) + \nabla(u_1-u_2) = 0 & \Omega \\ (u_1-u_2)(x,0) = 0 & \Omega \\ \nabla(u_1-u_2) = 0 & \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{83}$$

che a sua volta, ponendo $\omega = u_1 - u_2$ e $p = p_1 - p_2$, diventa

$$\begin{cases} \partial_t \omega + A\omega = 0 \\ \omega(x,0) = 0 \end{cases} .$$

Al solito la formulazione variazionale sarà

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \underbrace{\omega(x,t)}_{\in L^2(0,T;V)^*} \underbrace{v(x)}_{\in L^2(0,T;V)} dx + \int_\Omega \nabla\omega\nabla v = 0 \qquad \text{in } \mathscr{D}(0,T) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega \langle \omega(x,t), v(x)\rangle_{V^*,V} dx + \int_\Omega \nabla\omega\nabla v = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \int_\Omega \langle \omega_t(x,t), v(x)\rangle_{V^*,V} dx = \frac{1}{2}\|\omega(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|\omega(0)\|_H^2.$$

A questo punto osserviamo che

$$0 \longleftarrow \|u(t) - u(t_0)\|_H^2 = \|u(t)\|_H^2 + \|u(t_0)\|_H^2 - 2\langle u(t), u(t_0)\rangle$$

ma noi sappiamo anche che

$$\|u(t)\|^2 - \|u(t_0)\|^2 = 2\int_0^T \langle u, u_t\rangle ds$$

con quest'ultima quantità che si annulla per $\|u(t)\| \longrightarrow \|u(t_0)\|$. Ecco quindi perchè

$$\|u(t) - u(t_0)\|^2 \longrightarrow 2\|u(t_0)\|^2 - 2\langle u(t_0), u(t_0)\rangle = 0.$$

Allora per questo tipo di soluzioni abbiamo unicità.
Vediamo cosa si pu ò dire per p: siano

$$U(t) = \int_0^T u(s,x) dx \in \mathscr{C}(0;T;V) \qquad F(T) = \int_0^T f(s,x) dx \in \mathscr{C}(0;T;V^*).$$

Allora

$$\frac{d}{dt}\int uv\,dx + \int \nabla u \nabla v\,dx = \langle f, v\rangle \qquad \forall\ v \in V$$

ma

$$\int u(t)v\,dx - \int u_0 v\,dx + \int \langle \nabla u, \nabla v\rangle dx = \int_0^t \langle f, v\rangle dx = \langle \int_0^t f\,dx, v\rangle = \langle F, v\rangle$$

con il terzo termine scritto che è anche uguale ad

$$\langle \int \nabla u\,dx, \nabla v\rangle = \langle \nabla U, \nabla v\rangle.$$

Questo ci porta a scrivere

$$\langle u(t) - u_0, v\rangle + \langle \nabla U, \nabla v\rangle = \langle F, v\rangle \iff$$
$$\iff \langle u(t) - u_0 - \Delta U - F, v\rangle = 0 \qquad \forall\ v \in V.$$

Per De Rham esiste $P \in \mathscr{D}^*(0, T \times \Omega)$ tale che

$$\nabla P = \underbrace{u(t)}_{\in H^{-1}} - u_0 - \underbrace{\Delta u}_{\in \mathscr{C}(0,T;H^{-1})} - \underbrace{F}_{\in \mathscr{C}(0,T;H^{-1})}$$

con la proprietà che per ogni t $\|\nabla P\|_{H^{-1}} \le C$. Si ha

$$\inf_{C\in\mathbb{R}} \|P - C\|_{L^2} \le C_\Omega \|\nabla P\|_{H^{-1}} \Longrightarrow P \in \mathscr{C}(0, T; L^2).$$

12. 10.5.2013 - Formulazione di Navier-Stokes evolutivo, metodo di Galerkin con base spettrale e stime a priori

Ricapitoliamo quanto visto la volta precedente.

(1) Ricordiamo che

$$H = \left\{u \in L^2, \nabla\cdot u = 0, u \cdot n = 0\right\} \qquad V = \left\{u \in H^1_0, \nabla \cdot u = 0\right\}.$$

Si aveva che

$$\begin{cases} f \in L^2(0, T; V^*) \\ u_0 \in H \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \\ u_t \in L^2(0, T; V^*) \\ u \in \mathscr{C}_W(0, T; H) \cap \mathscr{C}(0, T; V^*) \end{cases}$$

e la mappa che mandava $u_0 \longrightarrow u(t)$ è continua rispetto alla topologia dello spazio del dato iniziale. Inoltre avevamo visto che

$$\int_0^T \langle u_t, u\rangle_{V^*,V}\,dt = \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}.$$

(2) Se si prendono dati più regolari allora la soluzione sarà più regolare ossia

$$\begin{cases} u_0 \in V \\ f \in L^2(0, T; H) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u \in L^2(0, T; D(A)) \\ u \in \mathscr{C}(0, T; V) \\ u_t \in L^2(0, T; V) \end{cases}.$$

Parliamo ora del metodo del Bootstrap con il quale, iterandolo guadagneremo stime a priori e regolarità per le nostre soluzioni.
Moltiplichiamo l'equazione $\partial_t u - \Delta u + \nabla p = f$ per u_t così da arrivare a

$$\|u_t\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2} = 0 \Longrightarrow u_t \in L^2(0, T; L^2)\,!$$

Ma $\forall\ \eta > 0\ \exists\ 0 < t_0 < \eta$ tale che $u(t) \in V$ e questo ci permette di trovare, integrando, che

eq_der0 (84)
$$\int_0^T \|u_t\|^2_{L^2}\,dt + \frac{1}{2}\|\nabla u(T)\|^2_{L^2} = \frac{1}{2}\|\nabla u(t_0)\|^2_{L^2}.$$

A questo punto la stessa equazione di prima la deriviamo in t:

eq_der1 (85)
$$u_{tt} - \Delta u_t + \nabla p_t = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \int u_{tt}u_t - \Delta u_t u_t + \nabla p_t u_t\,dx = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\|u_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 = 0$$

e integrando ancora una volta otteniamo:

eq_der2
$$\frac{1}{2}\|u_t(T)\|_{L^2}^2+\int_{t_0}^{t}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 ds=\frac{1}{2}\|u_t(t_0)\|_{L^2}^2. \tag{86}$$

Dalla (84) e dalla (86) concludiamo che $\forall\ \varepsilon>0$

$$\begin{cases} u_t\in L^2(\varepsilon,T;L^2)\\ u_t\in L^\infty(\varepsilon,T;L^2)\\ u_t\in L^2(\varepsilon,T;H_0^1)\end{cases}.$$

Non abbiamo finito: moltiplichiamo la (85) per u_{tt} e troviamo

$$\|u_{tt}^2-\int\Delta u_t u_{tt}dx+\int\nabla u_t\nabla u_{yy}dx=\underbrace{\|u_{tt}\|_{L^2}^2+\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2}_{(\square)}=0$$

ossia $u_{tt}\in L^2(\varepsilon,T;L^2)$; inoltre integrando $(\square)$ otteniamo $\nabla u_t\in L^\infty(\varepsilon,T;L^2)$.
Adesso

$$-\Delta u_t+\nabla p_t=-u_{tt}\in L^2(\varepsilon,T;L^2)\Longrightarrow\Delta u_t\in H^2\Longrightarrow u_t\in L^2(\varepsilon,T;H^2).$$

Iterando questo tipo di passaggi si arriva a concludere che

$$D_t^k u\in L^2(\varepsilon,T;H^2)\qquad\forall\ k. \tag{87}$$

Osservazione 12.1. *Nel momento in cui abbiamo una soluzione debole si ha*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla u\|_{L^2}^2dt=\frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\langle f,u\rangle dt.$$

Poniamo ora l'attenzione sull'equazione di Navier-Stokes nel caso evolutivo ossia

nsev
$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f & \Omega\\ \nabla\cdot u=0 & \Omega\\ u(x,0)=u_0(x) & \\ u=0 & \partial\Omega\end{cases} \tag{88}$$

Si ha che la stima dell'energia resta invariata anche in presenza del termine convettivo e questo perchè

$$\int_\Omega u\nabla u u dx=\int_\Omega u\nabla\frac{|u|^2}{2}dx=-\int_\Omega\underbrace{(\nabla\cdot u)}_{=0}\frac{|u|^2}{2}=0.$$

Cerchiamo ora di arrivare alla formulazione variazionale del problema. Sia la forma trilineare

$$b(u,v,w):=\int_\Omega(u\nabla)vwdx$$

con $u\in V$ e $B:V\longrightarrow V^*$. Ora poniamo

$$\langle B(u),w\rangle=\int_\Omega(u\nabla)uwdx.$$

Moltiplicando per una funzione a divergenza nulla otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega uvdx+\int_\Omega\nabla u\nabla vdx+\int_\Omega u\nabla uvdx=\langle f,v\rangle\qquad\forall\ v\in V \tag{89}$$

il tutto nel senso di $\mathcal{D}(0,T)$.

Osservazione 12.2. *Moltiplicando per u ci aspettiamo che $u\in L^2(0,T;V)$ ma su u_t cosa potremmo dire? Se sapessimo $u_t\in L^1(0,T;V^*)$ allora ne dedurremmo $u\in\mathscr{C}(0,T;V^*)$, ma apriori non possiamo dirlo.*

Passiamo ora ad analizzare le **soluzioni deboli nel senso di Leray-Hopf** che definiremo in modo più dettagliato in seguito. Osserviamo che i prossimi calcoli[4] sono da considerarsi nel caso $n=3$. Sia l'equazione

ler1
$$\partial_t u-\Delta u+(u_\varepsilon\nabla)u+\nabla p=f \tag{90}$$

[4] Leray, 1934.

dove $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$. Stiamo regolarizzando il termine di trasporto e successivamente si effettua il limite $u_\varepsilon \to u$ per $\varepsilon \to 0$.Il funzionamento di questo approccio è basato sul fatto che è ancora vero che

$$\int (u_\varepsilon \cdot \nabla) u u = 0.$$

Prima di procede diamo qui un risultato del tutto generale che ci sarà utile in seguito.

Lemma 12.1 (Aubin-Lions). *Siano*

$$X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$$

dove la prima immersione è compatta e la seconda è continua; siano X_0 ed X_1 spazi di Banach riflessivi. Sia

$$Y := \{u \in L^{\alpha_0}(0,T;X_0),\, u' \in L^{\alpha_1}(0,T;X_1)\}$$

con

$$\|u\|_Y := \|u\|_{L^{\alpha_0}(X_0)} + \|u\|_{L^{\alpha_1}(X_1)}.$$

Se $1 < \alpha_0 \le \alpha_1 < +\infty$ *e* $0 < T < +\infty$ *allora si ha l'immersione compatta*

$$Y \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\alpha_0}(0,T;X).$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che per ogni $\eta > 0$ si ha $\|v\|_X \le \eta \|v\|_{X_0} + C\eta \|v\|_{X_1}$ per ogni $v \in X_0$. Per assurdo esista $\bar\eta > 0$ tale che per ogni $C \in \mathbb{R}\ \exists\ v \in X_0$ tale che

$$\|v\|_{X_1} > \bar\eta \|v\|_{X_0} + C\|v\|_{X_1}.$$

Consideriamo una $\{v_m\}$ tale che $\|v_m\|_X \ge \bar\eta \|v_m\|_{X_0} + m\|v_m\|_{X_1}$ e poniamo

$$w_m = \frac{v_m}{\|v_m\|_{X_0}} \qquad \text{così} \qquad \|w_m\|_{X_0} = 1.$$

Adesso si ha che

a_u (91) $$\|w_m\|_X > \bar\eta + m\|w_m\|_{X_1}$$

e la norma $\|\cdot\|_X$ è limitata da una costante; quindi possiamo estrarre una sottosuccessione convergente debolmente $w_m \rightharpoonup w$ in X_0.
Possiamo affermare anche che

$$\|w_m\|_X \le \|w\|_{X_0} \le 1$$

e che quindi

$$\|w_m\|_{X_1} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ma adesso ci ricordiamo che, per ipotesi, $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X$ e quindi possiamo estrarre una successione che converge fortemente $w_m \longrightarrow w$ in X e in particolare tale che $w_m \longrightarrow 0$ in X. Ma questo è assurdo perchè contrasta con la (a_u 91).
Adesso la parte centrale della dimostrazione. Sia $\{u_n\}$ tale che $\|u_n\| \le C$ ossia sia uniformemente limitata. Vogliamo trovare una sottosuccessione che converga fortemente ossia $u_{n_k} \longrightarrow u$.
Possiamo dire che, a meno di sottosuccessioni, possiamo trovare (grazie alla riflessività)

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \in L^{\alpha_0}(0,T;X_0) \\ u_n' \rightharpoonup u' \in L^{\alpha_1}(0,T;X_1) \end{cases}.$$

Poniamo ora $v_n = u_n - u$ e vediamo se $v_n \longrightarrow 0$ in $L^{\alpha_0}(0,T;X)$. Abbiamo

$$\|v_n\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X)} \le \eta \|v_n\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_0)} + C\eta \|v_n\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_1)}$$

e chiamiamo rispettivamente C il termine a sinistra, B quello centrale ed A quello di destra in questa stima. Poichè B è limitato, posso rendere la costante C piccola a piacere. Quello che ora resta da vedere è che

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|v_n\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X)} \le C\eta \qquad \forall\, \eta > 0.$$

Osserviamo che $Y \hookrightarrow \mathscr{C}(0,T;X_1)$ e che

$$\|v_n\|_{X_1} \le C \qquad \forall\, t, \forall\, m.$$

Dobbiamo dimostrare che per ogni t

$$\int_0^T \|v_n(t)\|_{X_1}^{\alpha_0} dt \longrightarrow 0.$$

Useremo il teorema di Lebesgue sul termine integrando: si ha

$$v_n(0) = v_n(t) - \int_0^t v_n'(\tau)d\tau \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{s}\int_0^s v_n(0)dt}_{=v_n(0)} = \frac{1}{s}\int_0^s v_n(t)dt - \underbrace{\frac{1}{s}\int_0^s\int_0^t v_n'(\tau)d\tau}_{(\square)}$$

e qui possiamo scegliere s in modo da avere $v_n(0) < \varepsilon\ \forall\ \varepsilon$. Ma noi sappiamo che $v_n \rightharpoonup 0$ in $L^{\alpha_0}(0,T;X_0)$ e poichè $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X_1$ allora

$$\int_0^s v_n(\tau)d\tau \xrightarrow{X_1} 0$$

e questo continua a valere quando dividiamo per s. Per quanto riguarda $(\square)$ si arriva a

$$-\frac{1}{s}\int_0^s v_n'(\tau)d\tau \int_t^s dr$$

e per gli integrali di Bochner possiamo ottenere

$$\frac{1}{s}\left\|\int_0^s (s-\tau)v_n'(r)dr\right\|_{X_1} \le \frac{1}{s}\int_0^s \|s-t\|v_n'(r)dr \le \int_0^s \|v_n'(r)\|dr$$

e una volta scelto ε, fissiamo s così da avere l'ultimo integrale minore di $\varepsilon/2$. $\square$

Adesso utilizziamo il metodo di Galerkin con uso della base spettrale per vedere che tipo di soluzioni possiamo ottenere per questa equazione. Utilizzando il solito operatore $A = -\mathbb{P}\Delta$ abbiamo che $A\omega_j = \lambda_j\omega_j$ e tramite questa base spettrale cerchiamo delle

$$u_m = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\omega_j(x) \in V_m$$

che siano soluzioni per

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\int u_m v_k dx + \int \nabla u_m \nabla v_k dx + \int u_m \nabla u_m v_k dx = \langle f, v_k\rangle \quad \forall\ v \in V \\ u_m(0) = u_{m_0} = P_m(u_0) \end{cases}. \tag{92}$$

Da questa troviamo

$$g_{jm}'\int \omega_j\omega_k dx - \lambda_j g_{jm}\int \omega_j\omega_k dx + \int u_m\nabla u_m\omega_k dx = \langle f, \omega_k\rangle$$

che è un'equazione del tipo

$$\dot{Y} + Y + Y^2 = F$$

cioè di Riccati. Allora esiste $0 < T_m < T$ e $g_{jm} \in \mathscr{AC}([0,T_m),\mathbb{R})$ per ongi m fissato. Quindi arriviamo ad

ler_dis1

$$\frac{1}{2}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 dt = \frac{1}{2}\|u_m\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f, u_m\rangle dt \le \frac{1}{2}\|u_m\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|f\|_{V^*}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2. \tag{93}$$

Troviamo che $\forall\, t \in [0,T_m)$ si ha $u_m \in L^\infty(0,T_m;L^2)$ e $g_{jm} \in L^\infty(0,T_m)$.
Se T_m è massimale allora $|g_{jm}(t)| \longrightarrow +\infty$ per $t \to T_m^-$, ma la stima non dipende da m e quindi T_m non è massimale e quindi la soluzione può essere estesa.
A questo punto cosa abbiamo? Abbiamo

$$u_m \in L^\infty(0,T;L^2) \qquad \nabla u_m \in L^2(0,T;L^2)$$

inoltre

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty(0,T;L^2) \qquad u_m \rightharpoonup u \text{ in } L^2(0,T;H^1)$$

dove le ultime convergenze sono dovute al fatto, come abbiamo già visto in precedenza, che se si ha

$$L^p(0,T;X) \qquad L^{p'}(0,T;X^*) = H$$

allora se X è riflessivo e $1 < p < +\infty$ allora $H^* = L^p(0,T;X)$.
Adesso cerchiamo una stima per u_t in V^*. Ricordiamo che per definizione

$$\|f\|_{V^*} := \sup_{\substack{\phi\in V\\ \phi\neq 0}} \frac{\langle f,\phi\rangle_{V^*,V}}{\|\nabla\phi\|_{L^2}}.$$

Adesso

$$\langle u_t m', \phi\rangle = -\langle \nabla u_m \nabla\phi\rangle - \langle u_m\nabla u_m, \phi\rangle + \langle f, \phi\rangle$$

e dividendo tutto per $\|\nabla\phi\|_{L^2}$ stimiamo tutto con

$$\frac{\|\nabla u_m\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2}}{\|\nabla\phi\|_{L^2}}+\frac{\|f\|_{V^*}\|\nabla\phi\|_{L^2}}{\|\nabla\phi\|_{L^2}}.$$

Arriviamo a

$$-\int_\Omega (u_m\nabla)u_m\phi dx=\int_\Omega (\underbrace{u_m}_{L^4}\underbrace{\nabla)\phi}_{L^2}\underbrace{u_m}_{L^4}dx\le\|\nabla\phi\|_{L^2}\|u_m\|^2_{L^4}\le$$

$$\le\begin{cases}\|\nabla\phi\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} & n=2\\ \|\nabla\phi\|_{L^2}\|u\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u\|^{3/2}_{L^2} & n=3\end{cases}\tag{94}$$

dove queste ultime disuguaglianze sono dovute al fatto che

$$\begin{cases}\|u\|_{L^4}\le 2^{1/2}\|u\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^2} & n=2\\ \|u\|_{L^4}\le 2^{1/4}\|u\|^{1/4}_{L^2}\|\nabla u\|^{3/4}_{L^2} & n=3\end{cases}.$$

Quindi si ha, per $n=3$, che

$$\|u'_m\|_{V^*}\le\|\nabla u_m\|_{L^2}+\underbrace{\|u\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u\|^{3/2}_{L^2}}_{\in L^{4/3}(0,T)}+\underbrace{\|f\|_{V^*}}_{\in L^2(0,T)}$$

con il primo termine a destra della disuguaglianza stimabile con

$$\|\nabla u_m\|_{L^2}\le\underbrace{\int_0^T\|\nabla u_m\|_{L^2}dt}_{\in L^2(0,T)}.$$

Di conseguenza

$$\begin{cases}u'_m\in L^{4/3}(0,T;V^*) & n=3\\ u'_m\in L^2(0,T;V^*) & n=2\end{cases}$$

ed

$$u'_m\rightharpoonup u'\in L^{4/3}(0,T;V^*)$$

in $n=3$.

Adesso nel passaggio al limite sorgerà un problema; vediamo di cosa si tratta. Si ha

$$(u_m(T),\phi)+\int_0^T\nabla u_m\nabla\phi dx+\int_0^T u_m\nabla u_m\phi dx=(u_{m0},\phi)+\int_0^t\langle f,\phi\rangle dt$$

dove la convergenza di tutti i termini non è problematica tranne nel terzo. Il punto è che u_m converge debolmente e ∇u_m ha convergenza $*$-debole e il loro prodotto non è detto che converga ossia, a priori,

$$\int_0^t u_m\nabla u_m\phi dx\not\rightarrow\int_0^t u\nabla u\phi dx.$$

Qui entrerà in gioco il lemma di Aubin-Lions: noi sappiamo che $u\in L^2(0,T;V)$ e $u_t\in L^{4/3}(0,T;V^*)$ e inoltre $V\hookrightarrow\hookrightarrow H\hookrightarrow V^*$. Allora u_m è limitata uniformemente in m e $u_m\longrightarrow u$ in $L^2(0,T;H)$. Come sfruttiamo questa informazione? sia $\phi\in\mathscr{C}^\infty$. Allora

$$\int u_m\nabla u_m\phi dx=-\int_0^T u_m\nabla\phi u_m dx\overset{L^2(L^2)}{\longrightarrow}-\int_0^T(u,\nabla\phi u)dx=\int_0^T((u\nabla)u,\phi)dx$$

e questo è possibile anche perchè $\overline{\mathscr{C}^\infty}=V$. Non abbiamo ancora finito: vediamo ora cosa succede alle stime dell'energia quando ci sono di mezzo le soluzioni deboli. Dovremo essere attenti perchè $u_t\in L^{4/3}(0,T;V^*)$ il quale non è il duale di $L^2(0,T;V)\ni u$. Dalla (93) sappiamo che

$$\frac12\|u_m(t)\|^2_{L^2}+\int_0^T\|\nabla u_m\|^2_{L^2}dt=\frac12\|u_m\|^2_{L^2}+\int_0^t\langle f,u_m\rangle dt.$$

Si ha che $\langle u_m,f\rangle\longrightarrow\langle u,f\rangle$ e questa convergenza è dovuta al fatto che u_m è debole ed f è fissata. Inoltre

$$\frac12\|u_{m0}\|^2_{L^2}\longrightarrow\frac12\|u_0\|^2_{L^2}.$$

Siano ora

$$a_m\frac12\|u_m(T)\|^2_{L^2}\qquad b_m=\int_0^T\|\nabla u_m\|^2_{L^2}dt$$

e per essi possiamo dire che

ler_dis2
$$\limsup_m a_m + \liminf_m b_m \le \limsup_m (a_m + b_m) \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2} + \int_0^T \langle f, u\rangle dt. \tag{95}$$

Abbiamo usato il $\liminf$ perchè

$$x_m \overset{X}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow \|x\|_X \le \liminf \|x_m\|_X$$

e nel nostro caso $\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u$ in $L^2(L^2)$. Quindi dalla (95) otteniamo

ener_dis
$$\boxed{\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} dt \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2} + \int_0^T \langle f, u\rangle dt.} \tag{96}$$

Questo significa che in presenza di soluzioni deboli, l'energia totale può diminuire!

Definizione 12.1 (**Soluzioni deboli di Leray-Hopf**). *Sono delle soluzioni deboli nel senso di Leray-Hopf le u tali che*

(1) $u \in L^2(0,T;V)$, $u_t \in L^{4/3}(0,T;V^*)$, $u \in \mathscr{C}_W(0,T;H)$;
(2) *soddisfano*

$$\frac{d}{dt}(u,v) + (\nabla u, \nabla v) + (u\nabla u, v) = \langle f, v\rangle \qquad u(0) = u_0;$$

(3) *per ogni* $t \ge T$ *vale la* (96).

13. 16.5.2013 - Teorema di esistenza per soluzioni deboli di Leray-Hopf, la disuguaglianza dell'energia e il problema dell'unicità

Teorema 13.1 (**di esistenza globale per soluzioni deboli di L-H**). *Sia* $u_0 \in H$ *ed* $f \in L^2(0,T;V^*)$. *Si ha che esiste u soluzione debole di Leray-Hopf nell'intervallo* $[0,T]$ *con* $T > 0$.[5]

Dimostrazione. Vogliamo vedere se è vero che

$$\int_0^T \langle u_t \phi\rangle_{V^*,V} dt \le \|\nabla\phi\|_{L^q(0,T)}$$

e se così fosse, allora $u_t \in L^{q'}(0,T;V^*)$. Ma

$$\langle u_t, \phi\rangle = \langle \Delta u, \phi\rangle - \langle (u\nabla)u, \phi\rangle + \langle f, \phi\rangle = \int \nabla u \nabla\phi dx + \langle \underbrace{(u\nabla)}_{L^4} \underbrace{u}_{L^2}, \underbrace{\phi}_{L^4}\rangle + \langle f, \phi\rangle \le$$
$$\le \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2} + \|f\|_{V^*}\|\nabla\phi\|_{L^2} + (\square)$$

dove

$$(\square) = \int_0^T \int u\nabla u\phi dx \le \int_0^T \|u\|^2_{L^4}\|\nabla\phi\|_{L^2} dt.$$

L'ultima quantità scritta si stima in due modi diversi, a seconda che ci si trovi in $n = 2$ oppure $n = 3$.

$$n=3 \qquad \le \int_0^T \|u\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u\|^{3/2}_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2} dt \le \left(\int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} dt\right)^{3/4}\left(\int_0^T \|\nabla\phi\|^4_{L^2} dt\right)^{1/4} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow q = 4.$$

Invece

$$n=2 \qquad \le \int_0^T \|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2} dt \le \left(\int_0^T \|\nabla u\|_{L^2} dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \|\nabla\phi\|_{L^2} dt\right)^{1/2}.$$

Sia ora $n = 2$ e consideriamo due soluzioni u_1, u_2 di Leray-Hopf corrispondenti ad u_0 ed f fissati. Posto $\omega = u_1 - u_2$ si ha

$$\begin{cases} \partial_t\omega - \Delta\omega + \nabla p + u_1\nabla u_1 - u_2\nabla u_2 = 0 & \Omega \\ \nabla\cdot\omega = 0 & \Omega \\ \omega = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

[5] Quindi per u vale la (96) ed $u \in \mathscr{C}_W(0,T;H)$.

ma $\partial_t u_1, \partial_t u_2 \in L^2(0,T;V^*)$ e quindi ha senso il seguente integrale

$$\int_0^T \langle \partial_t \omega, \omega \rangle_{V^*,V} dt = \frac{1}{2}\|\omega(T)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\omega(0)\|_{L^2}^2$$

perchè stiamo moltiplicando un un oggetto con un altro che appartiene al duale del primo. Adesso, moltiplicando per ω si ha

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \big((u_1\nabla)u_1 - (u_2\nabla)u_2\big)(u_1-u_2)\,dx \equiv 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int (u_1\nabla)u_1 - (u_2\nabla)u_1 + (u_2\nabla)u_1 - (u_2\nabla)u_2 = \int (\omega\nabla)u_1 + (u_2\nabla)\omega$$

e di conseguenza

$$\int (\omega\nabla)u_1\omega\,dx + \int (u_2\nabla)\omega\omega\,dx = 0.$$

Stimiamo ora quel che è rimasto:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega\|_{L^2}^2 = -\int \omega\nabla u_1\omega\,dx \le \|\omega\|_{L^4}^2\|\nabla u_1\|_{L^2} \le \|\omega\|_{L^2}\|\nabla\omega\|_{L^2}\|\nabla u_1\| \le$$

$$\le 1\frac{1}{2}\left(\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2\|\omega\|_{L^2}\right).$$

Adesso portando i termini in $\nabla\omega$ a sinistra troviamo

$$\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2 + \underbrace{\|\nabla\omega\|_{L^2}^2}_{\ge 0} \le \|\nabla u_1\|_{L^2}^2\|\omega\|_{L^2}^2$$

che, posto $Y = \|\omega\|_{L^2}^2$ diventa una disequazione differenziale del tipo

$$Y'(t) \le G(t)Y(t)$$

e per essa l'idea è di utilizzare il lemma di Gronwall. Quindi

$$T(t) \le Y(0)e^{\int_0^T G(s)ds}$$

con G che deve essere integrabile. Ma $G(0) = 0$ e quindi $Y \equiv 0$: quindi in dimensione $n = 2$ riusciamo ad ottenere l'unicità per le soluzioni deboli.
Passiamo ora al caso $n = 3$: i passi sono gli stessi che abbiamo appena fatto ma cambiano un pò le stime. Si ha

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega\|_{L^2}^2 \le \|\omega\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla\omega\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla u_1\|_{L^2} \le (\text{ alla } 4, 4/3) \le C\|\nabla u_1\|_{L^2}^4\|\omega\|_{L^2}^2$$

e portando a sinistra troviamo

$$\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega\|_{L^2}^2 \le \|\nabla u_1\|_{L^2}^4\|\omega\|_{L^2}^2$$

e quindi

$$\|\omega(t)\|_{L^2}^2 \le \|\omega(0)\|_{L^2}^2 e^{\int_0^t \|\nabla u_1\|_{L^2}^4 ds}.$$

Questa scrittura è un problema perchè, a priori, non sappiamo se l'integrale diverge o meno. Per saperlo dovremmo avere informazioni su $\|\nabla u_1\|_{L^2}^4$. In definitiva, se sapessimo che

$$\int_0^T \|\nabla u_1\|_{L^2}^4 ds < +\infty$$

allora avremmo l'unicità della soluzione in $\mathscr{C}_W$. Vediamo se riusciamo trovare informazioni sull'ultima quantità scritta.
Ora proviamo ad utilizzare le successioni approssimanti del metodo di Faedo-Galerkin: prendiamo $u_0 \in V$ ed $f \in L^2(0,T;H)$ (consideriamo f identicamente nulla per semplicità). Siano $A\omega_j = \lambda_j\omega_j$ ed

$$u_m = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\omega_j(x).$$

Sappiamo che le u_m soddisfano

$$(u_m', \omega_k) - (\Delta u_m, \omega_k) + ((u_m\nabla)u_m, \omega_k) = 0.$$

Ora moltiplicare per $A = -\mathbb{P}(\Delta)$ è come moltiplicare per $\lambda_j g_{km}(t)$ i ω_k e quindi, dato anche che A non deriva i termini in t troviamo

$$(u'_m, Au_m) + \|Au_m\|^2_{L^2} + (u_m \nabla u_m, Au_m) = 0$$

e integrando per parti si ha

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2_{L^2} + \|Au_m\|^2_{L^2} \leq \int_\Omega \underbrace{(u_m}_{L^6} \nabla) \underbrace{u_m}_{L^3} \underbrace{Au_m}_{L^2} \, dx \leq \|Au_m\|_{L^2}\|u_m\|_{L^6}\|\nabla u_m\|_{L^3}.$$

A questo punto ci ricordiamo di due cose:

(1) per le immersioni di Sobolev per $n = 3$ si ha $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$;
(2) se $f \in L^p \cap L^q$ con $p < q$ allora $f \in L^r$ con $p < r < q$ e

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|^\vartheta_{L^p}\|f\|^{1-\vartheta}_{L^q} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{p} + \frac{1-\vartheta}{q}.$$

Mettendo insieme queste due cose risuciamo a dire che

$$\|u_m\|_{L^6} \leq C(\Omega)\|\nabla u_m\|_{L^2}$$

e che

$$\|\nabla u_m\|_{L^3} \leq \|\nabla u_m\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u_m\|^{1/2}_{L^6} \qquad \frac{1}{3} = \frac{\vartheta}{2} + \frac{1-\vartheta}{6}.$$

Questo ci permette di continuare a stimare con

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2_{L^2} + \|Au_m\|^2_{L^2} \leq \|Au_m\|_{L^2}\|\nabla u_m\|_{L^2}\|\nabla u_m\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u_m\|^{1/2}_{L^6}$$

ma ora bisogna fare attenzione perchè

$$\|\nabla u_m\|_{L^6} \leq \|\nabla u_m\|_{L^2}$$

ma $\nabla u_m \notin H^1_0$ mentre la stima che risulta vera è

$$\|\nabla u_m\|_{L^6} \leq \|u_m\|_{H^2}$$

perchè $W^{2,2} \hookrightarrow W^{1,6}$; quindi siamo arrivati ad avere

$$\|Au_m\|_{L^2}\|\nabla u_m\|^{3/2}_{L^2}\|u_m\|^{1/2}_{H^2}.$$

A questo punto, se prendiamo $\phi \in D(A) = H^2 \cap H^1_0 \cap H$ sappiamo che per ϕ vale

$$\|\phi\|_{H^2} \simeq \|A\phi\|_{L^2}$$

dato che in $\Delta\phi + \nabla p = f$ se $f \in L^2$ allora $\phi \in H^2$. Usando questo riusciamo a maggiorare tutto con

$$\|\nabla u_m\|^{4/3}_{L^2}\|Au_m\|^{3/2}_{L^2}$$

ed elevando il primo fattore alla 4 e il secondo alla $4/3$ arriviamo ad

$$\frac{1}{2}\|Au_m\|^2_{L^2}\|\nabla u_m\|^6_{L^2}.$$

A questo punto poniamo ancora $Y(t) = \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2}$ così da trovarci la EDO

$$Y' \leq Y^3$$

che sicuramente ammette una soluzione locale, ma dove? Si ha

$$Y^{-3}dY = dt \Longrightarrow \frac{1}{1-3}Y^{1-3} - \frac{1}{1-3}Y_0^{1-3} = t \Longrightarrow Y^{-2} = Y_0^{-2} - 2t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Y(t) = \frac{Y_0}{\sqrt{1 - CtY_o^2}}.$$

Questo significa che esiste un tempo T^* tale che $Y(t^*) = +\infty$ e che $Y \leq C$ in $[0, t^*)$ dove

$$1 - 2Ct^* Y_0 = 0.$$

Quindi se consideriamo una $u_0 \in V$ ed $u_{0m} = \mathbb{P}_m u_0$, si ha $\|\nabla u_{0m}\| \leq \|\nabla u_0\|$. □

Quindi cosa abbiamo scoperto?
Le approssimanti di Galerkin sono limitate uniformemente in m, in $[0, t^*)$ e soddisfano

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \|Au_m\|_{L^2}^2 \leq C\|\nabla u_m\|_{L^2}^6.$$

Quando $T < t^*$ le quantità sono finite e integrandole otteniamo

$$\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|Au_m\|_{L^2}^2 dt \leq C\|\nabla u_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u_m\|_{L^2}^6 dt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u_m \in L^\infty(0,T;H^*) \cap L^2(0,T;H^2) \qquad \forall\ T < t^*.$$

Questo significa che abbiamo guadagnato regolarità a discapito del tempo di vita. In seguito arriveremo a dimostrare che $u \in L^\infty(0,T;H^*) \cap L^2(0,T;H^1)$ per ogni $T < t^*$ ossia che la soluzione debole u è anche forte.
Infine notiamo che

$$t^* \simeq \frac{1}{\|\nabla u_0\|_{L^2}^4}$$

quindi più il dato iniziale è grande e più il tempo di vita è tale che $t^* \longrightarrow 0$.

Osservazione 13.1. *Sia*

$$u_t - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f.$$

Com'è influenzato il tempo di vita dalla viscosità? Si ha

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \nu\|Au_m\|_{L^2}^2 \leq \frac{\nu}{2}\|Au_m\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu^3}\|\nabla u_m\|_{L^2}^6$$

e la EDO a cui arriviamo ora è

$$\frac{d}{dt}y(t) \leq \frac{C}{\nu^3}y(t)^3$$

e di conseguenza

$$t^* \simeq \frac{\nu^3}{\|\nabla u_0\|_{L^2}^4}$$

e questo ci dice che,data la dipendenza di t^* da ν, per le soluzioni forti il tempo di vita è troppo breve.

Osservazione 13.2. *Cosa possiamo dire sulla regolarità di u_t nel caso delle soluzioni forti? Sempre partendo dall'equazione otteniamo*

$$\|u_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \int u\nabla u u\,dx.$$

Per u sappiamo che $u \in L^\infty(0,T;H^*) \cap L^2(0,T;H^2)$ e inoltre $H^2 \hookrightarrow L^\infty$ per cui l'ultima quantità possiamo stimarla con

$$\begin{aligned}\|u_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty} &\leq \|u_t\|_{L^2}\|Au\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2}^2 + C\|Au\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

e integrando si ha

$$\int_0^T \|u_t\|_{L^2}^2 dt \leq \int_0^T \|Au\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2 dt + \frac{1}{2}\|\nabla u(0)\|_{L^2}^2$$

e queste sono tutte quantità finite per cui

$$u_t \in L^2(0,T;L^2).$$

14. 17.5.2013 - Esistenza locale di soluzioni forti ed esistenza globale per dati piccoli, stime sul tempo di vita

Ricapitoliamo quanto visto fin qui. Abbiamo visto che la stima dell'energia

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}\,ds \le \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2$$

implica il fatto che $u \in L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H_0^1)$ e questo ci bastava, nel caso lineare, per poter passare al limite con le approssimanti di Galerkin; al contrario nel caso non lineare era necessario avere informazioni anche su u_t. Sfruttando le

disduetre

$$\begin{cases} \|u\|_{L^4} \le 2^{1/2}\|u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2} & n=2 \\ \|u\|_{L^4} \le 2^{1/4}\|u\|_{L^2}^{1/4}\|\nabla u\|_{L^2}^{3/4} & n=3 \end{cases} \tag{97}$$

abbiamo visto che

$$u_t \in \begin{matrix} L^2(0,T;V^*) & n=2 \\ L^{4/3}(0,T;V^*) & n=3 \end{matrix}\ .$$

A questo punto se $u_0 \in H$ ed $f \in L^2(0,T;V^*)$ sappiamo esistere le soluzioni deboli in $[0,T]$ per le quali in $n=2$ si ha l'unicità.
Invece se $n=3$ non sappiamo dire ancora nulla sull'unicità, ne tantomeno se $u \in \mathscr{C}(0,T;H)$. Quello che al momento possiamo dire è che

$$u \in \mathscr{C}_W(0,T;H) \cap \mathscr{C}(0,T;V^*).$$

Passiamo ora a dimostrare la disduetre (97) per il caso $n=3$.

Proposizione 14.1. *Si ha che*

$$\|u\|_{L^4} \le \|u\|_{L^2}^{1/4}\|\nabla u\|_{L^2}^{3/4} \qquad \forall\ u \in H_0^1(\Omega).$$

Dimostrazione. Prendiamo una $u \in \mathscr{C}_0^\infty$. Indichiamo la disequazione per $n=2$ delle due appena riviste come ($\square$). Si ha

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^4}^4 &= \int_{\mathbb{R}^3}|u|^4 dx = \int_{\mathbb{R}} dx_3 \int_{\mathbb{R}^2}|u|^4 dx_1 dx_2 \le (\square) \le \int_{\mathbb{R}} dx_3 2\|u(x_3)\|_{L^2}^2\|\nabla u(x_3)\|_{L^2}^2 \le \\ &\le 2\max_{x_3}\|u(x_3)\|_{L^2}^2\|\nabla u(x_3)\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Adesso

$$|u(x_3)|^2 = \int_{-\infty}^{x_3} 2v(x_1,x_2,\xi_3)\,\partial_3\, u(x_1,x_2,\xi_3)\,d\xi_3 \le 2\int_{\mathbb{R}} |u(x_1,x_2,\xi_3)||\partial_3\, u(x_1,x_2\xi_3)|\,d\xi_3$$

e sostituendo nel massimo troviamo

$$\|u\|_{L^4}^4 \le 4\int_{\mathbb{R}} \|u\|_{L^2}\|\partial_3\, u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 d\xi \le 4\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3.$$

$\square$

Tornando alla stima di quale fosse il tempo di vita massimo t^*, consideriamo ora il caso di $n=3$, $u_0 \in V$ e $f \in L^2(0,T;H)$. Avevamo visto che esiste $t^* > 0$ tale che $u \in L^\infty(0,t^*;V) \cap L^2(0,t^*;D(A))$. Per capire da chi dipendesse questo tempo di vita siam dovuti passare da $y = \|\nabla u\|_{L^2}^2$ per la quale vi era la disequazione

$$y' \le \frac{C}{v^3}y^3.$$

Le soluzioni di ques'ultima sono maggiorate da quelle di

$$Y' = \frac{C}{v^3}.$$

Infine trovavamo

$$t^* \simeq \frac{v^3}{\|\nabla u_0\|_{L^2}^4} \Longrightarrow t^* \ge \frac{Cv^3}{\|\nabla u_0\|_{L^2}^4}.$$

Adesso vediamo un teorema di esistenza locale; in seguito vedremo anche un risultato di esistenza globale per dati piccoli.

Teorema 14.1 (**di dipendenza locale dai dati iniziali**). *Si ha che*

(98)
$$\|\nabla u_0\|_{L^2} \longrightarrow 0 \Longrightarrow t^* \longrightarrow +\infty.$$

Dimostrazione. Partiamo da una soluzione forte $u \in L^\infty(0,t^*,V) \cap L^2(0,t^*;D(A))$ e moltiplichiamo l'equazione per $-\mathbb{P}\Delta u$. Vediamo cosa succede ai singoli pezzi.

$$\int u_t(-\mathbb{P}\Delta u)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \qquad \int -\Delta u(-\mathbb{P}\Delta u)\,dx = \|Au\|_{L^2}^2$$

$$\int (u\cdot\nabla u)(-\mathbb{P}\Delta u)\,dx \le \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|Au\|_{L^2} \le \frac{\nu}{2}\|Au\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu^3}\|\nabla u\|_{L^2}^6$$

e queste stime a priori le avevamo già incontrate in precedenza. Adesso però proviamo a stimare l'ultimo integrale in modo leggermente diverso:

$$\int (u\cdot\nabla u)(-\mathbb{P}\Delta u)\,dx \le \|u\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}\|Au\|_{L^2} \le \|u\|_{H^2}\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{L^6}^{1/2}\|Au\|_{L^2}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\|\nabla u\|_{L^6} \le \|u\|_{H^2}$ ed $\|u\|_{L^3} \le \|u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{L^6}^{1/2}$. Adesso, poichè se $u \in D(A) = H^2 \cap V$ allora $\|Au\|_{L^2} \simeq \|u\|_{L^2}$, possiamo ulteriormente stimare tutto con

$$\|Au\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|u_0\|_{L^2}^{1/2}.$$

Portando tutto a sinistra troviamo

dis_esist (99)
$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \left(\nu - C\|u_0\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\right)\|Au\|_{L^2}^2 \le 0}$$

che ci porta ad affermare che se esiste un t per il quale

$$\|u_0\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2} \le \nu \qquad \text{allora} \qquad \frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \le 0$$

e quindi $\|\nabla u\|_{L^2}^2$ è decrescente e quindi se si parte con un dato iniziale minore di ν, poichè l'energia decresce, la soluzione riuscirà ad esistere sempre. Questo significa che esiste un $\varepsilon_0 > 0$ tale che

(100)
$$\|\nabla u_0\|_{L^2} < \varepsilon_0 \Longrightarrow u \in L^\infty(0,+\infty;V) \cap L^2(0,+\infty;D(A)).$$

Se per assurdo così non fosse, avremmo $\|\nabla u_0(t)\| \ge \varepsilon_0$ per ogni $t > 0$; ma noi sappiamo che deve valere la disduguaglianza dell'energia

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^T \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2\,ds \le \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2$$

per ogni $T > 0$ e per ogni u soluzione debole di Leray-Hopf. A questo punto avremo che l'integrale supera $\nu\varepsilon_0 T$ e per un certo T abbastanza grande avremo

$$\nu\varepsilon_0 T > \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

Questo è assurdo iil che significa che deve esistere un $\tilde{T}$ tale che $\|\nabla u(\tilde{T})\|_{L^2} < \varepsilon_0$. □

Osservazione 14.1. *A questo punto sappiamo molto delle soluzioni negli intervalli* $[0,t^*)$ *e* $[\tilde{T},+\infty)$, *ma non si sa nulla su cosa accada in* $(t^*,\tilde{T})$.

Definizione 14.1 (**Epoca di singolarità**). *il tempo* T^* *è detto epoca di singolarità se* u *è soluzione forte in* $[0,T^*)$ *e non può essere prolungata ad una soluzione forte in* $[T^*,T^*+\delta)$ $\forall\,\delta > 0$*; è il tempo massimale in cui* ∇u *è limitato in norma* L^2.

Diamo ora un criterio utile per capire se ci si trova in un'epoca di singolarità. Sappiamo per il teorema di esistenza per soluzioni forti che, fissato $t_0 > 0$, la soluzione può essere estesa fino a $t_0 + \delta$ dove

$$\delta \ge \frac{C\nu^3}{\|\nabla u\|_{L^2}^4}.$$

Vediamo cosa accade ora.

Proposizione 14.2. *Se* T^* *è un'epoca di singolarità allora*

epo_sin (101)
$$\liminf_{t\to T^{*-}}\|\nabla u(t)\|_{L^2} = +\infty$$

Dimostrazione. Sia per assurdo una successione $\{t_k\}$ tale che $t_k \nearrow T^*$ e che $\|\nabla u(t_k)\|_{L^2} \leq \hat{C}$ per ogni $t < T^*$. Allora possiamo spostarci a destra con i tempi di

$$\delta \geq \frac{C\nu^3}{\hat{C}} = \delta_0$$

e iterando questa procedura si arriva a superare T^*: questo significale che T^* non è massimale e questo è assurdo. □

Vediamo ora qual'è la situazione rispettivamente in $n = 2$ e $n = 3$.
Nel caso bidimensionale sappiamo che la soluzione esiste localmente. Moltiplicando l'equazione per $-\mathbb{P}\Delta u$ otteniamo

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2} + \nu\|Au\|^2_{L^2} \leq \int u\nabla u \mathbb{P}\Delta u dx$$

e la stima che facevamo in $\mathbb{R}^3$ veniva fatta con esponenti 6,3 e 2 rispettivamente per il primo, il secondo e il terzo fattore sotto integrale. Ma ora siano in $n = 2$ e $H^1_0 \hookrightarrow L^q$ per $q < +\infty$ e quindi la stima continua con

$$\|u\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^2}\underbrace{\|Au\|^{3/2}_{L^2}}_{4/3} \leq \frac{\nu}{2}\|Au\|^2_{L^2} + \frac{1}{\nu}\|\nabla u\|^4_{L^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2} \leq \frac{C}{\nu^3}\|\nabla u\|^4_{L^2}$$

e ripetendo le procedure già viste arriviamo alla disequazione differenziale

$$y' \leq \frac{C}{\nu^3}y^2.$$

A questo punto sembra che abbiamo in mano le stesse cose del caso $n = 3$; ma in effetti

$$\|\nabla u\|^4_{L^2} = \|\nabla u\|^2_{L^2}\|\nabla u\|^2_{L^2} \Longrightarrow y' \leq \frac{C}{\nu^3}f(t)y$$

con $f \in L^1(0,T)$. Adesso

$$y \leq y_0 e^{\frac{C}{\nu^3}\int_0^t f(s)ds} \leq y_0 e^{\frac{C}{\nu^4}\frac{\|u_0\|^2_{L^2}}{2}} < +\infty \qquad \forall\ t.$$

Questo significa che se $u_0 \in V$ allora u è soluzione forte per ogni $t > 0$; osserviamo infine che non vi sono esponenti migliori su cui poter lavorare nel caso bidimensionale.
Nel caso $n = 3$ le cose sono meno chiare. Sappiamo che

$$\begin{array}{lcl} u_0 \in L^2 & \Longrightarrow & \text{soluzioni deboli globali} \\ u_0 \in H^1_0 & \Longrightarrow & \text{soluzioni forti locali} \end{array}$$

ma tra uno spazio e l'altro ce ne sono tantissimi altri e bisogna capire cosa accade in questi.
Quando siamo in T^* perdiamo l'unicità e $\|\nabla u\|_{L^2} \longrightarrow +\infty$. Ma questa è una condizione necessaria affinchè venga meno l'unicità? Nei prossimi teoremi vedremo che entra in gioco l'invarianza per riscalamenti parabolici.
Consideriamo una $u(x,t)$ soluzione delle equazioni di Navier-Stokes; affinchè lo sia anche una $u_\lambda = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ in un opportuno $L^s(L^r)$ si dovrà avere

cond_inv

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1 \tag{102}$$

e in questo caso stiamo lavorando con $n = 3$. Il problema è che il nostro controllo riusciamo ad averlo non per 1 ma per 3/2 (come mostra il prossimo teorema) e quindi siamo nel caso supercritico.

Teorema 14.2. *Sia $v \in L^8(L^4)$; allora v è una soluzione debole ed $u \equiv v$.*

Dimostrazione. Se v è una soluzione debole in $L^8(L^4)$ allora $v \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) \cap L^2(L^6)$; di conseguenza per $2 < r < 6$ si ha

$$\|v\|_{L^r} \lesssim \|v\|^{\vartheta}_{L^2}\|v\|^{1-\vartheta}_{L^6} \qquad 1/r = \vartheta/2 + (1-\vartheta)/6$$

e l'esponente massimo è tale che

$$\int_0^T \|v\|^q_{L^r} dt \lesssim \int_0^T \|v\|^{q\vartheta}_{L^2}\|v\|^{(1-\vartheta)q}_{L^6} dt$$

cone $(1-\vartheta)q = 2$. Adesso in fatto che $v \in L^\infty(L^2)$ insieme al fatto che richiediamo invarianza per riscalamenti parabolici ci conduce a

$$\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{2}{\infty} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Se invece avessimo $v \in L^\infty(L^4)$ allora troveremmo

$$\frac{2}{8} + \frac{3}{4} = 1 < \frac{3}{2}$$

e questo ci darebbe l'unicità. Quindi si avrebbe

$$\|v\|_{L^4} \lesssim \|v\|_{L^2}^{\vartheta}\|v\|_{L^4}^{1-\vartheta} \qquad \frac{1}{4} = \frac{3\vartheta}{6} + \frac{1-\vartheta}{6}$$

da cui $\vartheta = 1/4$ ed $1-\vartheta = 3/4$. Infine

$$\frac{3}{4}q = 2 \Longrightarrow q = \frac{8}{3}$$

e quindi guadagneremmo che la soluzione debole v sta anche in $L^{8/3}(L^4)$.
Consideriamo ora $v \in L^8(L^4)$; si ha

$$\partial_t(u-v) - \Delta(u-v) + \int(u\nabla u - v\nabla v)\,dx + \nabla q = 0$$

e moltiplicando tutto per $\omega = u - v$ e invertendo i segni si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega\|_{L^2}^2 &\le \left|\int \underbrace{(\omega\nabla)}_{L^4}\underbrace{\omega}_{L^2}\underbrace{v}_{L^4}\,dx\right| \le \\ &\le \|\omega\|_{L^2}^{1/4}\underbrace{\|\nabla\omega\|_{L^2}^{3/4}\|\nabla\omega\|_{L^2}^{7/4}}_{L^{8/7}}\|v\|_{L^4} \le \\ &\le \frac{1}{2}\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 + C\|v\|_{L^4}^8\|\omega\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

ma c'è un problema che dobbiamo necessariamente considerare: $\omega \in L^2(V)$ e $\partial_t\omega \in L^{4/3}(V^*)$ e quindi il loro prodotto non ha senso! Cosa possiamo fare?
Si prende $\rho \in \mathscr{C}_0^\infty(-1,1)$ tale che $\int_{\mathbb{R}}\rho\,dx = 1$; si considera

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & [0,T] \\ 0 & \mathbb{R}\setminus[0,T]\end{cases}$$

e si definisce

$$u_\varepsilon = (\tilde{u} * \rho_\varepsilon) * \rho_\varepsilon \qquad v_\varepsilon = (\tilde{v} * \rho_\varepsilon) * \rho_\varepsilon$$

ed ora acquista senso il prodotto $\partial_t u_\varepsilon v$ ed $\partial_t v u_\varepsilon$. □

15. Disuguaglianza forte dell'energia e unicità debole-forte, Gronwall generalizzato

Si ha la seguente disuguaglianza forte dell'energia

dis_for_en (103)
$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2\,ds \le \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 \qquad \forall\ t \in [0,T]$$

la quale ci permette di affermare che se se $u \in \mathscr{C}_W(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ debole soddisfa (103) allora

dis_for_en

$$u(t) \stackrel{t\to 0^+}{\longrightarrow} u_0$$

e la convergenza è forte nella topologia di L^2.
Per la continuità debole si ha che

$$\|u_0\|_{L^2} \le \liminf_{t\to 0^+}\|u(t)\|_{L^2}$$

e per la disuguaglianza forte dell'energia

$$\limsup_{t\to 0^+}\|u(t)\|_{L^2} \le \|u_0\|_{L^2}.$$

Questo significa che $\|u(t)\|_{L^2} \longrightarrow \|u_0\|_{L^2}$; va detto che il fatto che $u \in \mathscr{C}_W(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ indica anche che

$$\|u(t) - u_0\|_{L^2} \overset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Adesso ritorniamo all'ultimo teorema visto: la sua utilità sta nel fatto che in presenza di una v della quale si conosce la regolarità, ma non l'esistenza e di una u di cui è certa l'esistenza allora le due soluzioni coincidono sotto determinate ipotesi.

Teorema 15.1. *Siano u, v soluzioni deboli di Leray-Hopf e supponiamo che $v \in L^8(0,T;L^4)$ e $u \in L^{8/3}(0,T;L^4)$; infine si abbia $u(0) = v(0)$. Allora $u \equiv v$.*

Dimostrazione. (*Prima parte*)
Vediamo la regolarità di v_t: si ha

$$\langle v_t, \phi\rangle = -\int \nabla v \nabla \phi dx + \langle (v\nabla)v, \phi\rangle \leq \|\nabla v\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2} + \|\nabla v\|^2_{L^4}\|\nabla\phi\|_{L^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|v_t\|_V = \frac{\langle v_t, \phi\rangle}{\|\nabla\phi\|_{L^2}} \leq \|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|^2_{L^4}.$$

Troviamo che $v_t \in L^2(0,T;V^*)$ e quindi ha senso moltiplicare v e v_t dato che una è nel duale dell'altra. Ora abbiamo

$$\int_0^T \langle v_t, v\rangle dt = \frac{1}{2}\|v(T)\|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\|v(0)\|^2_{L^2};$$

moltiplicando per v l'equazione

$$v_t + (v\nabla)v - \Delta v + \nabla q = 0$$

tramite i soliti passaggi arriviamo a giustificare l'uguaglianza dell'energia. Ma osserviamo che la regolarità utilizzata non è $L^8(0,T;L^4)$ ma solo $L^4(0,T;L^4)$: scopriamo che per avere l'uguaglianza dell'energia basta questa regolarità; di contro per l'unicità bisogna necessariamente lavorare il $L^8(0,T;L^4)$.
Notiamo una cosa: sappiamo che u è forte se è debole secondo Leray-Hopf ed $u \in L^\infty(0,T;V)$ ossia quando

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\nabla u\|_{L^2} \leq C.$$

Ma $V \hookrightarrow H^1_0 \hookrightarrow L^6 \hookrightarrow L^4$ (dove l'ultima immersione vale per Ω limitato) e quindi

$$u \in L^\infty(0,T;L^4) \Longrightarrow u \in L^8(0,T;L^4);$$

questo significa che la validità del teorema con u e v come da ipotesi si ha anche nel caso in cui una sia debole ed una forte.
Torniamo ai conti e vediamo cosa si può dire sull'unicità; sia

$$\partial_t(u-v) - \Delta(u-v) + (u\nabla)u - (v\nabla)v + \nabla(p-q) = 0$$

e moltiplicando per $u - v$ e integrando su Ω si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-v\|^2_{L^2} + \|\nabla(u-v)\|^2_{L^2} + \int [(u\nabla)u - (v\nabla)v](u-v) = 0.$$

L'ultimo integrale scritto è uguale ad

$$\int \underbrace{(u-v)}_{L^4}\underbrace{\nabla(u-v)}_{L^2}\underbrace{v}_{L^4} \leq \|u-v\|_{L^4}\|\nabla(u-v)\|_{L^2}\|v\|_{L^4} \leq \|u-v\|^{1/4}_{L^2}\|\nabla(u-v)\|_{L^2}\|v\|_{L^4} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\nabla(u-v)\|^2_{L^2} + \|v\|^8_{L^4}\|u-v\|^2_{L^2}.$$

Da qui deriva il fatto che si richiede $\|v\|^8_{L^4} \in L^1(0,T)$ affinchè si possa usare Gronwall e arrivare ad una disequazione del tipo

$$\frac{d}{dt}Y \leq GY.$$

Resta il problema che non possiamo moltiplicare per $(u-v)$ perchè $(u,v) \in L^2(0,T;V)$ e $\partial_t(u-v) \in L^{4/3}(0,T;V^*)$. Il prossimo lemma ci verrà in aiuto. $\square$

Lemma 15.1. *Siano u, v come nelle ipotesi del teorema e $t \in [0, T]$. Allora*

$$\int_0^T uv\,dt + 2\int_0^T \nabla u \nabla v\,dt = \|u_0\|_{L^2}^2 - \int (u-v)\nabla(u-v)v\,dx. \tag{104}$$

Dimostrazione. Al solito sia $\rho \in \mathscr{C}_0^\infty(-1,1)$ tale che

$$\rho \geq 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} \rho\,dx = 1 \qquad \rho(x) = \rho(-x)$$

e poniamo

$$\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\rho(t/\varepsilon) \qquad f_\varepsilon = \tilde{f} * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon.$$

Abbiamo a che fare con $u' = -Au - Bu$ dove

$$\langle Bu, \phi\rangle = \int (u\nabla)u\phi\,dx \qquad Bu = \mathbb{P}((u\nabla)u) \qquad Au = \mathbb{P}(-\Delta).$$

Adesso abbiamo

$$\frac{d}{dt}u_\varepsilon = (-B\tilde{u} - a\tilde{u}) * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$$

e lo stesso vale per v; si ha

$$\frac{d}{dt}\int v u_\varepsilon\,dx = \langle v', u_\varepsilon\rangle + \langle v, u_\varepsilon'\rangle = \langle -Av - Bv, u_\varepsilon\rangle + \langle v, -A\tilde{u} - B\tilde{v} * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon\rangle =$$
$$= \langle -Av - Bv, u_\varepsilon\rangle + \langle v_\varepsilon, -Au - Bu\rangle.$$

Integrando quanto abbiamo trovato tra t ed s per $\varepsilon < s < t < T - \varepsilon$ otteniamo

$$\underbrace{\int_\Omega v(t)u_\varepsilon(t)\,dx}_{I} - \underbrace{\int_\Omega v(s)u_\varepsilon(s)\,dx}_{II} + \underbrace{\int_s^t\int_\Omega \nabla v \nabla u_\varepsilon\,dx\,dt}_{III} + \underbrace{\int_s^t\int_\Omega \nabla v_\varepsilon \nabla u\,dx\,dt}_{IV} =$$
$$= \underbrace{-\int_s^t\int_\Omega (v\nabla)vu_\varepsilon\,dx\,dt}_{V} - \underbrace{\int_s^t\int_\Omega (u\nabla)uv_\varepsilon\,dx\,dt}_{VI}.$$

Cosa succede se passiamo al limite?
Possiamo dire che c'è convergenza forte di $u_\varepsilon \longrightarrow u \in L^2_{loc}(0,T;V) \cap L^{8/3}_{loc}(0,T;L^4)$; v_ε è più regolare e si ha convergenza forte $v_\varepsilon \longrightarrow v \in L^2_{loc}(0,T;V) \cap L^8(0,T;L^4)$. Questo ci consente di dire che

$$I) \longrightarrow \int v(t)u(t)\,dx \quad \text{fortemente}$$

$$II) \longrightarrow \int v(s)u(s)\,dx \quad \text{fortemente};$$

per III) si ha che per ∇v fissato, se moltiplicato con un oggetto in L^2_{loc} allora converge q.o. in t; stesso discorso vale per IV). Adesso mostriamo che V)$\longrightarrow 0$:

$$\int_s^t\int_\Omega \underbrace{v}_{L^4}\underbrace{(\nabla v)}_{L^2}\underbrace{(u_\varepsilon - u)}_{L^4}\,dx\,dt \leq \int_s^t \|v\|_{L^4}\|\nabla v\|_{L^2}\|u_\varepsilon - u\|_{L^4}\,dt \leq (\text{ Hölder }) \leq$$
$$\leq \left(\int_s^t \|\nabla v\|_{L^2}^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_s^t \|u_\varepsilon - u\|_{L^2}^{8/3}\,dt\right)^{3/8}\left(\int_s^t \|v\|_{L^4}^8\,dt\right)^{1/8}$$

dove

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}.$$

Infine il primo e il terzo integrale sono finiti per ipotesi mentre il secondo va a 0. Passando al limite troviamo che questo vale per $s > \varepsilon$, ma poichè per ipotesi $u \in \mathscr{C}_W$ allora la cosa vale anche per $s > 0$. □

Dimostrazione. (Seconda parte)
Abbiamo la disuguaglianza dell'energia (A), l'uguaglianza forte (B) e l'ultima vista (C); posto $w = u - v$ si ha

$$A + B - 2C = \|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w\|_{L^2}^2\,dt \leq -\int_0^t w\nabla wv\,dt$$

ossia abbiamo la (C) integrata in t; ancora

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \int_0^t \|w(t)\|_{L^4}^8 \|w(t)\|_{L^2}^2 dt$$

e quindi abbiamo tra le mani una disuguaglianza differenziale del tipo

$$Y(t) \leq \int_0^t G(s)Y(s)ds$$

e per Gronwall deduciamo che $Y \equiv 0$. □

Vediamo ora un meccanismo che, se iterato, ci permette di ottenere soluzioni con regolarità arbitraria (bootstrap). Al momento sappiamo costruire $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ con $u_0 \in H$. Al fine di ottenere infomazioni sull'unicità abbiamo bisogno di stime per ∇u: si ha

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \nu\|Au\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\nu^3}\|\nabla u\|_{L^2}^6$$

ossia una disequazione del tipo

$$\frac{dY}{dt} \leq \frac{C}{\nu^3}Y^3.$$

Riusciamo ad ottenere, se $u_0 \in V$, che $u \in L^\infty(0,T_1;V) \cap L^2(0,T_1;D(A))$ con $T_1 := T_1(\|\nabla u_0\|_{L^2},\nu) > 0$. Notiamo che l'unicità in $[0,T_1]$ non solo è forte ma è anche debole perchè $u_0 \in V \hookrightarrow H$ quindi presa $\tilde{u}$ debole in $[0,T_1)$ si ha che $u = \tilde{u}$ in $[0,T_1)$ e quindi si ha unicità forte-debole.
Cos'altro si può dire? Moltiplichiamo l'equazione

$$u_t - \Delta u + u\nabla u + \nabla p = 0$$

per u_t così da trovare che

$$\|u_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2} \leq \underbrace{u}_{L^\infty}\underbrace{\nabla u}_{L^2}\underbrace{u_t}_{L^2} \leq \|u_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}$$

e poichè $H^2 \hookrightarrow W^{1,6} \hookrightarrow L^\infty$ riusciamo a stimare tutto con

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2}^2 + C\|Au\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Allora nell'intervallo $[0,T_1)$, per Gronwall, si ha

$$\int_0^{T_1}\|u_t\|_{L^2}^2 dt \leq C\|\nabla u(0)\|_{L^2}^2 e^{\int_0^t \|Au\|_{L^2}^2 ds} \Longrightarrow u_t \in L^2(0,T_1;L^2).$$

Quindi ritroviamo una regolarità superiore a quella che avevamo supposto in partenza.
Se adesso ripaertiamo dall'equazione di prima derivando in t e moltiplicando per u otteniamo

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 = -\int (u_t\nabla)uu_t dt - \int (u\nabla)u_t u_t dt.$$

Per l'ultimo integrale si ha

$$-\int (u\nabla)u_t u_t dt = \int u\nabla\frac{|u_t|^2}{2}dt = 0;$$

poi si ha

$$\begin{aligned}
-\int \underbrace{u_t}_{L^2}\underbrace{\nabla u}_{L^3}\underbrace{u_t}_{L^6} &\leq \|u_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^3}\|u_t\|_{L^6} \leq \\
&\leq \|u_t\|_{L^2}\underbrace{\|\nabla u_t\|_{L^2}}_{W_0^{1,2}\hookrightarrow L^6}\underbrace{\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}}_{L^3=[L^2,L^6]_{1/2}}\|Au\|_{L^2}^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}\|Au\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Questo significa che se $u_t \in L^\infty(0,T;L^2)$ per $t < T$ con u forte, allora $\nabla u_t \in L^2(0,T;L^2)$. ripetendo k volte questo tipo di stime, e quindi questo processo, si arriva a scoprire che se $f \equiv 0$ e $\partial\Omega \in \mathscr{C}^\infty$ allora

$$u \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega} \times (0,T_1)).$$

16. 24.5.2013 - Il teorema di struttura di Leray ed altre stime a priori

Teorema 16.1 (**Teorema di struttura**). *Sia Ω limitato e regolare, $f = 0$ e $u_0 \in H$. Allora esiste*

$$\mathscr{T} = \bigcup_{i \in I} (s_i, t_i) \qquad (s_i, t_i) \cap (s_j, t_j) = \emptyset \quad per\ i \neq j$$

tale che

(1) $u \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega} \times \mathscr{T})$;
(2) *data la misura di Lebesgue μ si ha $\mu\{(0, +\infty) \setminus \mathscr{T}\} = 0$;*
(3) $u_0 \in V \Longrightarrow (0, T_1) \subset \mathscr{T}$.

Dimostrazione. Per ipotesi $u_0 \in H$ e di conseguenza si ha anche $u_0 \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ e inoltre soddisferà la disuguaglianza dell'energia. A questo punto

$$\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 dt < +\infty \Longrightarrow A := \{t : \|\nabla u\|_{L^2} = +\infty\}$$

è tale che $m(A) = 0$. Prendiamo ora $t_0 \in A^{\complement}$ e quindi $\|\nabla u(t_0)\|_{L^2} < +\infty$; questo significa che esiste un $T_0 := T_0(\|\nabla u\|_{L^2}, \nu) > 0$ tale che esiste unica $\tilde{u}$ soluzione forte in $[T_0, T_0 + t_0)$. Sappiamo che all'interno di quest'ultimo intervallo si ha $\tilde{u} = u$ e che $\tilde{u} \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega} \times [T_0, T_0 + t_0))$.
Se diciamo che

$$\mathscr{T} = \bigcup_{t_0 \neq A} (t_0, t_0 + T_0(t_0))$$

allora per ogni t_0 fissato possiamo spostarci a destra e trovare una soluzione regolare. □

Torniamo per un momento alle equazioni di Navier-Stokes ossia

$$u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0.$$

Se potessimo affermare che $\|u\|_{L^\infty} < +\infty$ riusciremmo a controllare bene le cose ma la forma dellle equazioni è problematica.
Vediamo qualche analogia e le differenze tra le (NSE) e le seguenti equazioni dette di Burgers:

burgers

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla) u = f & \Omega \\ u(x, 0) = 0 & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} . \tag{105}$$

Si tratta di un problema semilineare in cui non si ha $\nabla \cdot u = 0$ e di conseguenza si ha $\int (u\nabla) u dx \neq 0$.
Si può dimostrare che se $u_0 \in L^\infty$ ed $f \in L^\infty$ allora sono ammesse soluzioni regolari $\forall\ T > 0$.
Perchè tutto questo non funziona con le (NSE)?
E' un problema di principio di massimo...
Moltiplichiamo le (105) per il termine $e^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0$. Si ottiene

$$u_t e^{-\alpha t} - \Delta u e^{-\alpha t} + (u\nabla) u e^{-\alpha t} = f e^{-\alpha t}$$

e considerando che $u_t e^{-\alpha t} = \partial_t (u e^{-\alpha t}) + \alpha u e^{-\alpha t}$, ponendo $v := u e^{-\alpha t}$ si ha

$$\partial_t v - \Delta v + (u\nabla) v + \alpha v = f e^{-\alpha t};$$

adesso moltiplichiamo per v così da ottenere

$$\partial_t \frac{|v|^2}{2} - \Delta v v + u\nabla \frac{|v|^2}{2} + \alpha |v|^2 = f v e^{-\alpha t}.$$

A questo punto notiamo che

$$\Delta |v|^2 = \Delta(v, v) = 2 \Delta v v + 2 |\nabla v|^2 \Longrightarrow -\Delta v v = |\nabla v|^2 - \Delta \frac{|v|^2}{2}.$$

Considerando un cilindro che abbia come base il dominio Ω e per altezza l'intervallo dei tempi, il massimo dovrà cadere o all'interno o in cima al cilindro. Se fosse all'interno, avremmo un punto $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \Omega \times (0, T)$ per il quale $|v(\tilde{x}, \tilde{t})|^2 \geq |v(x, t)|^2\ \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Dato che si tratta di un massimo, in quel punto il gradiente si dovrà annullare e nell'equazione si avrebbe

$$|v(\tilde{x}, \tilde{t})|^2 \leq \frac{1}{\alpha} |f| |v| e^{-\alpha t}$$

quindi possiamo scrivere

$$|v(\tilde{x}, \tilde{t})| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^\infty} e^{-\alpha t}.$$

Il definitiva abbiamo il controllo dato che

$$|v(\tilde{x},\tilde{t})| \leq \left\{ \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^\infty} e^{-\alpha t} + \|u_0\|_{L^\infty} \right\}$$

mentre, al contrario, per le (NSE), dato che è presente il termine ∇p, non abbiamo alcun modo per dire che $\nabla p e^{-\alpha t} \geq 0$.

Definizione 16.1 (Epoca di Regolarità). *Si dice che u è irregolare in t_1 se*

(1) $0 < t_1 < +\infty$;
(2) $u \in \mathscr{C}^\infty\big(\overline{\Omega} \times (t_0, t_1)\big)$ *per qualche* $t_0 < t_1$;
(3) *u non si può estendere ad una soluzione regolare in* (t_0, t') *con* $t' > t_1$.

Ricordiamo le seguenti tre stime a priori che avevamo ricavato

(1)
$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \nu\|Au\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\nu^3}\|\nabla u\|_{L^2}^6;$$
(2)
$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \left(\nu - C\|u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\right) \leq 0;$$
(3)
$$\frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

Se t_1 è un'epoca di regolarità allora $\lim_{t\to t_1}\|\nabla u\|_{L^2} = +\infty$ e avevamo già visto che questo significa avere

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq Y(t) < +\infty \qquad 0 \leq t < \bar{t}$$

dove

$$\bar{t} > \frac{\nu^2}{\|\nabla u_0\|_{L^2}^4}.$$

Se così non fosse potremmo estendere nel tempo la nostra u.
Consideriamo ora $t_0 < t < \tau < t_1$; in (t,τ) abbiamo

$$\frac{dY}{Y^3} = \frac{C}{\nu^3}dt \Longrightarrow \frac{1}{1-3}\Big[Y^{1-3}(t)\Big]_t^\tau = \frac{C}{\nu^3}(t-\tau) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{Y^2(t)} - \frac{1}{Y^2(\tau)} = \frac{C}{\nu^3}(t-\tau) \Longrightarrow \frac{1}{\|\nabla u(t)\|_{L^2}^4} - \frac{1}{\|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^4} \leq \frac{C}{\nu^3}(t-\tau).$$

Ora per $\tau \to t_1$ si trova che

$$\lim_{\tau\to t_1^-}\frac{1}{\|\nabla u\|_{L^2}^4} = 0$$

quindi

$$\frac{1}{\|\nabla u(t)\|_{L^2}^4} \leq \frac{C}{\nu^3}(t_1 - t) \Longrightarrow \|\nabla u(t)\|_{L^2} \geq C\nu^{3/4}(t_1-t)^{1/4}$$

e questo significa che non solo $\|\nabla u\|_{L^2} = +\infty$ ma la velocità minima di esplosione deve essere di questo ordine.
Passiamo ora a capire dov'è la prima epoca di singolarità. Per la stima dell'energia si ha che

$$C\nu\nu^{3/2}\int_0^{t_1}\frac{1}{\sqrt{t_1 - s}}dt \leq \nu\int_0^{t_1}\|\nabla u\|_{L^2}^2 dt \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2$$

e integrando si ottiene

$$T^* := C\nu^5\|\nabla u_0\|_{L^2}^4 \geq t_1.$$

Adesso possiamo scrivere

$$\mathscr{T} = \bigcup_{i\in I}(\tau_i, s_i) \cup (T^*, +\infty)$$

dove le s_i sono epoche di regolarità; notiamo che quest'ultime si possono prendere in modo da avere $(\tau_i, s_i) \cap (\tau_j, s_j) = \varnothing$ se $i \neq j$. Adesso nella disuguaglianza dell'energia si ha

$$\int_{\tau_i}^{s_i}\frac{C}{\sqrt{s_i - \tau}} \leq \int_{\tau_i}^{s_i}\|\nabla u\|_{L^2}^2 dt \leq \frac{1}{2}\|u(t_i)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2$$

e questo significa che, per un singolo intervallo, si ha

$$(\tau_i - s_i)^{1/2} \le \nu \int_{\tau_i}^{s_i} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \, dt \le \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

Sommando su tutti gli intervalli si trova

$$\sum_{i\in I} (\tau_i - s_i)^{1/2} \le C \|u_0\|_{L^2}^2 < +\infty.$$

Ma cosa significa tutto questo?

Definizione 16.2 (Dimensione di Hausdorff)**.** *Sia $S \subset \mathbb{R}^n$. La dimensione di Hausdorff di S è definita come*

(106)
$$\mathcal{H}^m(S) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}_\delta^m(S) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_\delta^m(S)$$

con

$$\mathcal{H}_\delta^m(S) := \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} B_i}{2}\right)^m$$

dove $\{B_i\}$ è un ricoprimento di S fatto con le palle chiuse B_i tali che $\operatorname{diam} B_i < \delta$.

Qual'è la dimensione di Hausdorff di $\mathcal{T}$? Fissato $\delta > 0$ esiste I_δ parte finita dell'insieme degli indici I tale che

$$\sum_{i\notin I_\delta} (\tau_i - s_i) < \delta \qquad \text{ed} \qquad \sum_{i\notin I_\delta} (\tau_i - s_i)^{1/2} < \delta.$$

Si ha che

$$\bigcup (\tau_i, s_i) \subset [0, T^*] \Longrightarrow [0, T^*] \setminus \bigcap_{i\in I_\delta} (\tau_i, s_i) = \bigcup_{j=1}^N B_j$$

con i b_j intervalli chiusi; posto $I(u)$ l'insieme dei punti irregolari per u si ha che

$$I(u) \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$$

perchè abbiamo tolto gli s_i che sono epoche di regolarità.
A questo punto osserviamo che preso (τ_i, s_i) con $i \notin I_\delta$ esiste unico j tale che $(\tau_j, s_j) \subset B_j$. Adesso sia

$$I_j := \Big\{ i : (\tau_i, s_i) \subset B_j \Big\}$$

e definiamo

$$I = I_\delta \cup \left(\bigcup_{j=1}^N I_j \right).$$

Quindi ora

haus (107)
$$B_j := \bigcup_{i\in I_j} (\tau_i, s_i) \cup \Big(B_j \cap I(u) \Big)$$

ma noi già sappiamo che $\mu\{I(u)\} = 0$ e quindi possiamo scrivere

$$\operatorname{diam} B_j = \sum_{i\in I_j} (\tau_i - s_i)$$

ed inoltre

$$\operatorname{diam} B_j \ne \sum_{i\notin I_\delta} (\tau_i - s_i) < \delta.$$

Adesso usando la (107) possiamo affermare che

$$\sum_{j=1}^N (\operatorname{diam} B_j)^{1/2} \le \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i\in I_j} (\tau_i - s_i) \right)^{1/2} \le \sum_{i\notin I_\delta} (\tau_i - s_i)^{1/2} < \delta$$

per ogni $\delta > 0$ fissato. Quindi la dimensione di Hausdorff di $\mathcal{T}$ è $1/2$.

17. Lemma di Gronwall generalizzato e stime uniformi in L^2 ed H^1

In generale, per le EDO, se si ha un'equazione del tipo

$$y' + y = f$$

con f periodica, non è detto che la soluzione sia periodica; anche nel caso in cui si abbia $y' = f(t, s(t))$ periodica negli argomenti, non è detto che y sia periodica. Più in generale, se si ha f periodica ed $u : [0, T] \longrightarrow X$ e l'equazione

$$\frac{d}{dt} u + Au = f$$

si può provare a definire $L := \frac{d}{dt}$ con dominio

$$D(L) = \left\{ u \in W^{1,1}(0, T; X);\ u(0) = u(T) \right\}$$

. Il problema è che questa procedura non sempre è fattibile dato che se $u \in V$, serve che $u_t \in V^*$ e non è sempre così. Per esempio abbiamo visto che

$$n = 2 \Longrightarrow u \in L^2(0, T; V) \qquad u_t \in L^2(0, T; V^*)$$
$$n = 3 \Longrightarrow u \in L^2(0, T; V) \qquad u_t \in L^{4/3}(0, t; V^*).$$

Si può provare anche con il metodo di Faedo-Galerkin e lavorare con le approssimanti

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\phi_j(x)$$

per il problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi_j + \nabla p_j = \lambda_j \phi_j & \Omega \\ \nabla \cdot \phi_j = 0 & \Omega \\ \phi_j = 0 & \partial\Omega \end{cases}.$$

Vediamo ora un teorema.

Teorema 17.1. *Sia $f \in L^2(0, T; V^*)$ e tale che $f(0) = f(T)$. Allora*

$$\exists R \in \mathbb{R}^+ \ : \|u_0\|_{L^2} < R \Longrightarrow \exists\, u_m$$

soluzione del problema di Galerkin e tale che $\|u_m(T)\|_{L^2} \le R$.

Dimostrazione. Sappiamo che u_m risolve

$$\frac{d}{dt}(u_m, \phi_j) + \nu(\nabla u_m, \nabla\phi_j) + ((u_m\nabla)u_m, \phi_j) = \langle f, \phi_j\rangle \tag{108}$$

e che $u_m(0) = \mathbb{P}u_0$. Con i soliti conti si trova che

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{V^*}\|\nabla u_m\|_{L^2} \le \frac{1}{2\nu}\|f\|_{V^*}^2 + \nu\|\nabla u_m\|_{L^2}^2$$

e quindi che

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}.$$

Adesso se moltiplichiamo l'equazione del problema di Galerkin per ϕ_j si ottiene

$$-\int \Delta\phi_j\phi_j\,dx + \underbrace{\int \nabla p\phi_j\,dx}_{=0} = \lambda_j \underbrace{\int \phi_j\phi_j\,dx}_{=\delta_{ij}}$$

allora

$$\|\nabla\phi_j\|_{L^2}^2 = \lambda_j\|\phi_j\|_{L^2}^2 \ge \lambda_1\|\phi\|_{L^2}^2$$

e questo si ha perchè $A = \mathbb{P}(-\Delta)$ con $-\Delta$ che ha spettro $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$. Allora

$$\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 = \int \sum_{j=1}^{m} g_{jm}\nabla\phi_j \cdot \sum_{k=1}^{m} g_{km}\nabla\phi_k = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^2\|\nabla\phi_j\|_{L^2}^2 \ge \lambda_1 \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^2\|\phi_j\|_{L^2}^2.$$

Questo ci serve a ricavare che

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \nu\lambda_1\|u_m\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*};$$

moltiplicando a destra e a sinistra per $e^{\nu\lambda_1 t}$ adesso otteniamo

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2_{L^2}e^{\nu\lambda_1 t} \leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}e^{\nu\lambda_1 t}$$

che integrata da

$$\|u_m(T)\|^2_{L^2}e^{\nu\lambda_1 T} - \|u_m(0)\|^2_{L^2} \leq \int_0^T \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V^*}e^{\nu\lambda_1 t}dt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|u_m(T)\|^2_{L^2} \leq \|u_m(0)\|^2_{L^2}e^{-\nu\lambda_1 T} + \int_0^T \frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}e^{\nu\lambda_1(t-T)}dt \leq (t=T) \leq$$

$$\leq \|u_m(0)\|^2_{L^2}e^{-\nu\lambda_1 T} + \int_0^T \frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}dt.$$

Date le nostre ipotesi possiamo stimare ulteriormente tutto con

$$R^2e^{-\nu\lambda_1 T} + C_1$$

e l'obiettivo è riuscire a stimare l'ultima quantità scritta con R^2 ossia che

$$R^2(1-e^{-\nu\lambda_1 T}) > C_1$$

e in effetti possiamo trovare un R tale che questo valga; quindi possiamo applicare il teorema del punto fisso di Brower per il quale esiste una $u_{m_0} \in V_m$ tale che $u_m(T) = u_{m_0}$ ed $\|u_{m_0}\|_{L^2} \leq R^2$ qualsiasi sia m. Infine potremo estrarre una sottosuccessione debolmente convergente tale che $u_{m_0'} \rightharpoonup u_0 \in L^2$. $\square$

Osservazione 17.1. *E se avessimo semplificato le ipotesi? Supponiamo che la $f \in V^*$ sia costante. Ripetendo gli stessi calcoli arriveremmo ad avere*

$$\limsup_{t\to+\infty}\|u(t)\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda_1\nu^2}\|f\|^2_{V^*}$$

e questo ci fa capire che anche in presenza del termine convettivo, l'energia non cresce eccessivamente anche nel caso in cui la forza sia costante.

Osservazione 17.2 (Sul metodo). *Consideriamo il caso $n=2$ dove sappiamo che se $u \in L^2(0,T;V)$ ed $u_t \in L^2(0,T;V^*)$ allora $u \in \mathscr{C}(0,T;H)$. Cosa abbiamo fatto fino ad ora? Abbiamo cercato stime sul comportamento asintotico delle soluzioni; in particolare abbiamo cercato delle stime a priori...perchè?*
Perchè in generale vogliamo arrivare ad avere qualcosa del tipo

$$\frac{d}{dt}y \leq gy + h \tag{109}$$

dove $y = \|\cdot\|^2$, $y \in W^{1,1}_{loc}(0,+\infty)$ ed $g, h \in L^1_{loc}(0,+\infty)$. Questo ci permette di usare Gronwall ed avere

$$\frac{d}{dt}ye^{-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau} \leq h(t)e^{-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau} \Longrightarrow y(t)e^{-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau} - y(t_0) \leq \int_{t_0}^t h(s)e^{-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau}ds \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(t) \leq y(t_0)e^{\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^t h(s)e^{-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau}ds$$

dove con $t \geq t_0$ e $t < +\infty$ tutto va bene. Si hanno dei problemi quando $t \longrightarrow +\infty$.

Lemma 17.1 (di Gronwall uniforme - Foias, Prodi; '67). *Presa $g \in L^1_{uloc}$ supponiamo che esistono a_1, a_2, a_3 tali che*

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leq a_1 \qquad \int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2 \qquad \int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3.$$

Allora

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)e^{a_1}. \tag{110}$$

Dimostrazione. Abbiamo $y'(s) \leq g(s)y(s) + h(s)$; moltiplichiamo per $\exp\{-\int_t^s g(\tau)d\tau\}$ così da ottenere

$$\frac{d}{dt} y(s) e^{-\int_t^s g(\tau)d\tau} \leq h(s) e^{-\int_t^s g(\tau)d\tau}$$

e a questo punto integriamo tra t e $t+s$;

$$[y(t+r) - y(t)] e^{-\int_t^{t+r} g(\tau)d\tau} \leq \int_t^{t+r} h(s)ds \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(t+r) \leq y)t) = e^{\int_t^{t+r} g(\tau)d\tau} + e^{\int_t^{t+r} g(\tau)d\tau} \int_t^{t+r} h(s)ds.$$

Integrando in ds si ha

$$y(t+r) \leq y(t)e^{a_1} + a_2 e^{a_1} \Longrightarrow r y(t+r) \leq \int_t^{t+r} y(t)e^{a_1} + a_2 e^{a_1} r \leq a_3 e^{a_1} + r a_2 e^{a_1}$$

e dividendo per r si ha la tesi. □

Facciamo ora dei calcoli nei quali ci sarà utile il lemma appena dimostrato.
Sia $f \in H$ ed $n = 2$; consideriamo l'equazione

$$\partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f;$$

moltiplicando tutto per u troviamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq |f||u| \leq \|f\|_{L^2} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}}{\sqrt{\lambda_1}} \leq \frac{1}{2\nu\lambda_1}\|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{\nu}{2}.$$

Poniamo

$$A = \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \nu\lambda_1\|\nabla u\|_{L^2}^2 \qquad B = \frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\|_{L^2}^2 \qquad C = \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

e si ha $A \leq C \leq B$ e di conseguenza

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2}^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}\|f\|^2\left(1 - e^{-\nu\lambda_1 t}\right).$$

Adesso prendiamo $B \subset H$: sappiamo che esiste un R tale che $B \subset B(0,R)$ e se scegliamo

$$\rho_0 = \frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\|,$$

preso $\rho_0' > \rho_0$ troviamo

$$t > \frac{1}{\nu\lambda_1}\log\left(\frac{R^2}{\rho_0' - \rho_0}\right).$$

Questo ci garantisce che nulla esce dalla palla grazie al fatto che $A \leq B$. A questo punto

$$\|u(t+r)\|_{L^2}^2 + \nu\int_t^{t+r}\|\nabla u\|_{L^2}^2 ds \leq \int_t^{t+r}\frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\| + \|u(t)\|_{L^2}^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_t^{t+r}\|\nabla u\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{r}{\nu\lambda_1}\|f\|^2 + \frac{1}{\nu}\|u(t)\|_{L^2}^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \limsup_{t\to+\infty}\int_t^{t+r}\|\nabla u\|_{L^2}^2 ds \leq \limsup_{t\to+\infty}\frac{r\|f\|^2}{\nu\lambda_1} + \frac{\|u(t)\|_{L^2}^2}{\nu} \leq \frac{r\|f\|^2}{\nu\lambda_1} + \frac{\|f\|^2}{\nu^3\lambda_1^2}.$$

Questo significa che se scegliamo un t_0 abbastanza grande e tale che $\|\cdot\|_{L^2} < \rho_0'$ allor l'integrale tra $t+r$ e t è piccolo.
Adesso invece moltiplichiamo l'equazione per $Au = \mathbb{P}(-\Delta)$ e troviamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \nu\|Au\|_{L^2}^2 \leq \|f\|\|Au\| + \left|\int \underbrace{(u\nabla)}_{L^4}\underbrace{u}_{L^4}\underbrace{Au}_{L^2}dx\right| \leq \frac{\nu}{4}\|Au\|_{L^2}^2 + \frac{\|f\|^2}{2\nu} +$$

$$+ \|u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|D^2 u\|_{L^2}^{1/2}\|Au\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \frac{\nu}{4}\|Au\|_{L^2}^2 + \frac{\|f\|^2}{2\nu} + \|u\|_{L^2}^{1/2}\underbrace{\|\nabla u\|}_{L^4}\underbrace{\|Au\|^{3/2}}_{L^{4/3}} \leq \frac{\nu}{4}\|Au\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^4$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2} + \nu\|Au\|^2_{L^2} \leq \frac{C}{\nu}\|f\|^2_{L^2} + \frac{C}{\nu}\|u\|^2_{L^2}\|\nabla u\|^4_{L^2}.$$

Se poniamo $Y = \|\nabla u\|^2_{L^2}$ si ottiene la disuguaglianza differenziale

$$\frac{dY}{dt} \leq \frac{\|f\|^2_{L^2}}{\nu} + Y^2.$$

I soliti calcoli ci permetttono di dire che esiste una costante C tale che $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C$ per ogni $t \geq t_0$.

18. 31.5.2013 - Modi determinanti di Foias e Prodi

INSERIRE ENUNCIATO

Sia $n = 2$, Ω limitato ed $f \in H$. Allora esiste una costante C tale che $\|u\|_{L^2} \leq C$ e $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C$ per ogni $t \geq t_0$.

Dimostrazione. Consideriamo le autofunzioni dell'operatore di Stokes ossia le funzioni che soddisfano

$$(*)\begin{cases} -\Delta\phi_j + \nabla p_j = \lambda_j\phi_j & \Omega \\ \nabla\cdot\phi_j = 0 & \Omega \\ \phi_j = 0 & \partial\Omega \end{cases}, \qquad \int \phi_i\phi_j\,dx = \delta_{ij} \tag{111}$$

dove $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ e $P_n u = \sum_i (u_i\phi_i)\phi_i$. Adesso consideriamo lo spazio di dimensione finita $V_m = \langle\phi_1, \dots, \phi_m\rangle$ e l'operatore $Q_n = I - P_n$ del quale ci serviremo per lavorare solo con le frequenze alte.

Supponiamo due cose:

(1) esistono u_1, f_1, u_2, f_2 tali che

$$\partial_t(u_1 - u_2) - \Delta(u_1 - u_2) + (u_1\nabla)u_1 - (u_2\nabla)u_2 + \nabla p_1 - \nabla p_2 = f_1 - f_2;$$

(2) sappiamo controllare la quantità

$$\|P_n\omega\|_{L^2} = \|P_n(u_1 - u_2)\|_{L^2} \xrightarrow{t\to 0} 0$$

ossia abbiamo il controllo di un numero finito di modi iniziali che decadono a 0.

Se dimostriamo che $\|Q_n\omega\|_{L^2} \longrightarrow 0$ allora potremo affermare che $\|u_1 - u_2\|_{L^2} \longrightarrow 0$.

Possiamo decomporre $u = P_n u + Q_n u$ e osserviamo che valgono due identità:

$$\int P_n u Q_n u\,dx = 0 \qquad \int u Q_n u\,dx = \|Q_n u\|^2_{L^2};$$

adesso vogliamo arrivare ad una stima sui modi alti. Moltiplichiamo l'equazione della prima ipotesi per $Q_n(u_1 - u_2)$ e posto $\omega = u_1 - u_2$ e $F = f_1 - f_2$ si ha

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Q_n\omega\|^2_{L^2} + \nu\|\nabla Q_n\omega\|^2_{L^2} + \nabla p Q_n = \int F Q_n\omega\,dx + \int u_1\nabla\omega Q_n\omega\,dx + \int \omega\nabla u_2 Q_n\omega\,dx$$

dove il termine $\nabla p Q_n\omega$ è nullo, il secondo e il terzo integrale contengono termini nonlineare e li chiamiamo rispettivamente A e B. Adesso

$$A = u_1\nabla(I - Q_n\omega)Q_n\omega$$

perchè intgrando per parti si trova

$$\int (u_1\nabla)Q_n\omega Q_n\omega = 0;$$

$$\begin{aligned} A = \left(\int (u\nabla)v\omega\,dx = -\int (u\nabla)\omega v\,dx\right) &= -\int \underbrace{(u_1\cdot\nabla)}_{L^4}\underbrace{Q_n\omega}_{L^2}\underbrace{(i - Q_n)\omega}_{L^4}\,dx \leq \\ &\leq \|u_1\|_{L^4}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2}\|(I - Q_n)\omega\|_{L^4} \leq \\ &\leq \|u_1\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u_1\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2}\|(I - Q_n)\omega\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla(I - Q_n)\omega\|^{1/2}_{L^2} \end{aligned}$$

mentre per B si ha

$$B = \int \underbrace{(I - Q_n)\omega}_{L^4}\underbrace{\nabla Q_n\omega}_{L^2}\underbrace{u_2}_{L^4}\,dx + \int \underbrace{(Q_n\omega\nabla)}_{L^4}\underbrace{u_2}_{L^2}\underbrace{Q_n\omega}_{L^4}$$

e quindi possiamo stimare con

$$B \leq \|Q_n\omega\|_{L^2}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2}\|\nabla u_2\|_{L^2} + \|(I-Q_n)\omega\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(I-Q_n)\omega\|_{L^2}^{1/2}.$$

Mettendo tutto insieme si ottiene

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2}^2 \leq \\ &\leq \|F\|\|Q_n\omega\|_{L^2} + C\|(I-Q_n)\omega\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(I-Q_n)\omega\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2} + \|Q_n\omega\|_{L^2}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2} = \\ &= A+B+C.\end{aligned}$$

Adesso osserviamo che

$$\left\|\nabla\sum_{j>n}(\omega_j\phi_j)\phi_j\right\|_{L^2}^2 = \|\nabla Q_n\omega\|_{L^2}^2 \geq \lambda_{n+1}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2$$

$$\left\|\nabla\sum_{j\leq n}(\omega_j\phi_j)\phi_j\right\|_{L^2}^2 = \|\nabla P_n\omega\|_{L^2}^2 \leq \lambda_n\|P_n\omega\|_{L^2}^2.$$

Per (B) si ha

$$\|P_n\omega\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla P_n\omega\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2} \leq \|P_n\omega\|_{L^2}^{1/2}\lambda_n^{1/4}\|P_n\omega\|_{L^2}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2} \leq \frac{\nu}{4}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2}^2 + \frac{C\lambda_n}{\nu}\|P_n\omega\|_{L^2}^2$$

e questo ci consente di avere le prossime disuguaglianze:

$$\frac{d}{dt}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{4}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|F\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + C\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\nu}\|P_n\omega\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 \tag{112}$$

ma per quanto visto sopra

$$\frac{d}{dt}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{4}\|\nabla Q_n\omega\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\nu\lambda_{n+1}}{4}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 \tag{113}$$

che unite danno

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\nu\lambda_{n+1}}{4}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|F\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + C\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\nu}\|P_n\omega\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2. \tag{114}$$

Il nostro scopo è arrivare ad una disuguaglianza differenziale del tipo

$$\frac{d}{dt}Y + f(t)Y \leq G(t)$$

dove f deve essere positiva.
Raccogliendo i termini si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\nu\lambda_{n+1}}{4} - \frac{C}{\nu} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|F\|_{L^2}^2 + C\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\nu}\|P_n\omega\|_{L^2}^2$$

dove per per ν fissato ed n grande il termine fra parentesi si mantiene positivo. Questo significa che $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n > N$ vale

$$\frac{\nu\lambda_{n+1}}{4} - \frac{C}{\nu} - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\nu\lambda_{n+1}}{8} > 0. \tag{115}$$

A questo punto si ha che

$$\frac{d}{dt}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{4}\lambda_{n+1}\|Q_n\omega\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\|F\|_{L^2}^2 + C\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\nu}\|P_n\omega\|_{L^2}^2$$

e osserviamo che di tutti gli $n > N$ si considera il più piccolo e lo si fissa. Adesso se $\|F\|_{L^2} \longrightarrow 0$ per $t \to +\infty$ e $\|P_n\omega\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0$ per $t \to +\infty$ allora lo stesso varrà per $\|Q_n\omega\|_{L^2}^2$.
Abbiamo ora a che fare con una disuguaglianza del tipo

$$\frac{d}{dt}Y + \alpha Y \leq f(t)$$

con $\alpha > 0$ ed $f(t) \longrightarrow 0$ quando $t \to +\infty$ e ci chiediamo se vale la seguente implicazione:

$$Y \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^+) \Longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

Al momento sappiamo solo che la disuguaglianza vale per t grande. Moltiplichiamo tutto per $e^{\alpha T}$ e successivamente integriamo in $[s,t]$ così da avere

$$\frac{d}{dt}Ye^{\alpha t} \leq f(t)e^{\alpha t} \Longrightarrow Y(t)e^{\alpha t} - Y(s)e^{\alpha s} \leq \int_s^t e^{\alpha\tau}f(\tau)d\tau \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Y(t) \leq Y(s)e^{\alpha(s-t)} + \int_s^t f(\tau)e^{\alpha(\tau-s)}d\tau$$

ma ora possiamo considerare s fissato e $t \to +\infty$; possiamo scrivere l'integrale come

$$\int_s^{\bar{t}} f(\tau)e^{\alpha(\tau-t)}d\tau + \int_{\bar{t}}^t f(\tau)e^{\alpha(\tau-t)}d\tau = I + II.$$

Si ha che $I \longrightarrow 0$ perchè scelto $\bar{t}$ per $t \to +\infty$ l'integranda decade; invece per II possiamo dire che

$$II \leq \int_{\bar{t}}^t \varepsilon\, e^{\alpha(\tau-t)}d\tau = \varepsilon\, e^{-t}\int_{\bar{t}}^t e^{\alpha\tau}d\tau = \varepsilon\, e^{-\alpha t}\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - e^{\alpha\bar{t}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha(\bar{t}-t)}\right) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \longrightarrow 0.$$

Questo ci permette di concludere che $Y \longrightarrow 0$. □

Osservazione 18.1. *Una tesi equivalente a quella del teorema appena visto è che esiste un* $N = N(\Omega, \nu)$ *tale che se* $\|P_N\omega\|^2_{L^2} \longrightarrow 0$ *allora* $\|\omega\|_{L^2} \longrightarrow 0$.

INDICE

FINE[6]
md

[6]Le presenti sono frutto della pazienza e della voglia di riordinare i propri appunti di uno studente, il quale, non garantisce sulla bontà di ciò che vi è in esse scritto. Certamente non sono il migliore strumento di apprendimento presente in giro ma...magari possono tornare utili a qualcuno...