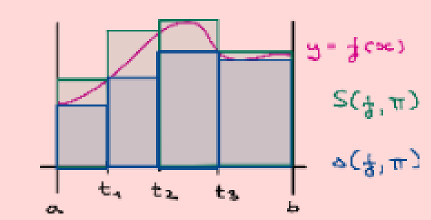
INTEGRALI

INTEGRALE DI RIEMANN

- SOMME SUPERIORI E INFERIORI
  - Data f:[a,b]→ℝ limitata e π una partizione di [a,b] chiamo somma superiore di f relativa a π la somma:
    $$S(f,\pi)=\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\sup_{(t_{k-1},t_k]} f=\sum_{k=1}^{n}|I_k|\cdot M_k$$
  - Data f:[a,b]→ℝ limitata e π una partizione di [a,b] chiamo somma inferiore di f relativa a π la somma:
    $$s(f,\pi)=\sum_{k=1}^{n}|I_k|\,m_k$$
  - Il valore dell'area del sottografico di f è compreso tra questi due valori

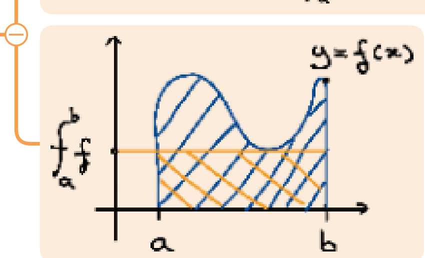
    

- INTEGRABILE SECONDO RIEMANN
  - f:[a,b]→ℝ limitata è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN ⟺ S(f)=s(f) e il valore comune lo indichiamo con: $\underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{\text{integrale di } f \text{ tra } a \text{ e } b}$
  - ℛ(I)={f:I→ℝ : f integrabile secondo Riemann}
    - ℛ(I) è uno spazio vettoriale e f→∫f è una funzione lineare su ℛ(I)
      - c·f∈ℛ ∀c∈ℝ ⇒ ∫c·f=c·∫f
      - f+g∈ℛ ⇒∫(f+g)=∫f+∫g
      - f,g∈ℛ, f≤g ⇒∫f≤∫g
      - f∈ℛ⇒|f|∈ℛ e |∫f|≤∫|f|
- FUNZIONI INTEGRABILI
  - f:[a,b]→ℝ monotona ⇒ è integrabile
  - f:[a,b]→ℝ L-Lip. ⇒ è integrabile
  - f:[a,b]→ℝ continua ⇒ è integrabile
    - Allo stesso modo si dimostra: f:(a,b)→ℝ continua e limitata ⇒ è integrabile
    - Più in generale: f:I→ℝ limitata con disc(f) finito o numerabile ⇒ f integrabile
  - f:I→ℝ limitata è integrabile ⟺ disc(f) è trascurabile (o di misura nulla) (TEOREMA DI VITALI-LEBESGUE)
    - E numerabile ⇒ E trascurabile ma non vale ⇐ (Cantor)

MEDIA INTEGRALE

- $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ cont.

  $\exists\ \bar{x}\in[a,b]$ t.c. $f(\bar{x})=-\!\!\!\!\!\!\int_a^b f(x)\,dx:=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$;

  cioè $(b-a)\,f(\bar{x})=\int_a^b f(x)\,dx$
- 

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

- $f: I\to\mathbb{R}$ continua, I int. chiuso, $x_0\in I$, sia $F_{x_0}(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\quad \forall x\in I$ allora F_{x_0} è una primitiva di f, cioè F_{x_0} è derivabile e $F'_{x_0}=f$.

INTEGRALI IMPROPRI

- DEFINIZIONE
  - $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, f integrabile su $[a,c]$ $\forall c<b$, si dice che f è integrabile (in senso improprio) su $[a,b)$ se $\exists \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\in\mathbb{R}$, lo stesso si può fare per $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ con $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ e f integrabile su $[c,b]$ $\forall c>a$.
    Più in generale $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, con $a,b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, è integrabile se, dato $x_0\in(a,b)$, f è integrabile su $(a,x_0]$ e $[x_0,b)$ e si pone: $\int_a^b f=\int_a^{x_0} f+\int_{x_0}^b f$. Oss: la def. non dipende dalla scelta di x_0.
- CRITERI DI CONVERGENZA
  - CONFRONTO
    - f,g:[x₀,+∞)→[0,+∞) f,g integrabili su [x₀,M] con M<+∞
      ✧f≤g e g integrabile su [x₀,+∞) ⇒ f integrabile su [x₀,+∞)
      ✧ f≤g e f non integrabile ⇒ g non integrabile
  - CONFRONTO ASINTOTICO
    - f,g definite positive per x→+∞, f~g ⇒ f integrabile su [x₀,+∞) ⟺ g integrabile su [x₀,+∞)
    - Vale anche in un intorno di zero se f~g per x→0
  - ASSOLUTA INTEGRABILITÀ
    - f assolutamente integrabile ⇒ f integrabile
  - CONFRONTO SERIE INTEGRALI
    - f≥0, f decrescente, allora ∑f(n)<+∞ ⟺ ∫f(x)<+∞

PRIMITIVE

- DEFINIZIONE
  - f:I→ℝ funzione integrabile, I⊆ℝ intervallo, F: I→ℝ funzione derivabile; se F'=f, F si dice PRIMITIVA di f
  - Uniche a meno di un'aggiunta di una costante c in ℝ
- FUNZIONI ELEMENTARI
  - PRIMITIVE

f	$\int f$	
0	c	
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+c$	$a\neq 1$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert+c$	
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}+c$	$a\neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+c$	

    Tabella delle primitive di funzioni elementari
  - Non sempre la primitiva di una "funzione elementare" è una "funzione elementare"
    - es: e^x/x, $\sin(x)/x$, e^{x^2},...
- REGOLE DI INTEGRAZIONE
  - LINEARITÀ
    - ∫(f±g)=∫f±∫g
  - PER PARTI
    - ∫F'·G=F·G-∫F·G'
  - PER SOSTITUZIONE
    - ∫f(ϕ(x))ϕ'(x)dx=F(ϕ(x))+c
  - INTEGRAZIONI DI FUNZIONI RAZIONALI
    - Sono 6 passaggi
  - SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI
    - Sostituzioni grazie alle quali otteniamo l'integrale di una funzione razionale
  - METODO DI HERMITE
    - $P,Q\in\mathbb{R}[x]$, $gr(P)<gr(Q)$, $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}+\frac{d}{dx}\left[\frac{\hat{P}(x)}{\hat{Q}(x)}\right]$, $\begin{cases} gr\,P^*<gr\,Q^* \\ gr\,\hat{P}<gr\,\hat{Q}\end{cases}$ (incognite)

      con $Q^*(x)$ con le stesse radici di Q ma tutte semplici

      $\hat{Q}(x)$ ha le stesse radici multiple di Q ma con molteplicità diminuita di 1
    - Esempio: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^4-x^3+2}{x^3(x-1)^2}$ $\quad gr(P^*)=1$, $gr(\hat{P})=2$

      $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P^*(x)}{x(x-1)}+\frac{d}{dx}\left[\frac{\hat{P}(x)}{x^2(x-1)}\right]=\left(\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x-1}\right)+\frac{d}{dx}\left[\frac{bx^2+cx+d}{x^2(x-1)}\right]$