Secondo Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

7 Luglio 2014

Soluzioni

Esercizio 1 Si consideri il seguente insieme:

$$A = (0,1) \cup \{2\}.$$

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta:

(a) l'elemento 2 è di accumulazione per A;

(b) A è chiuso;

(c) $\inf A = 0$.

Soluzione. (a) Falso. Basta considerare l'intorno U di centro 2 e raggio 1/2: U è un intorno di 2, ma non contiene altri elementi di A.

(b) Falso. Si verifica facilmente che l'insieme dei punti di accumulazione di A è $[0,1]$; poiché A non contiene tutti i suoi punti di accumulazione, allora non è chiuso.

(c) Vero. Infatti 0 soddisfa le proprietà di estremo inferiore:

- è un minorante: $0 \le x$ per ogni $x \in A$;
- è il massimo dei minoranti: infatti, per ogni $\epsilon > 0$ riusciamo a trovare $x \in A$ tale che $x < 0 + \epsilon$ (basta prendere $x = \epsilon/2$).

$\square$

Esercizio 2 Si calcoli una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 1}.$$

Soluzione. Risolviamo l'integrale indefinito $\int f(x)\mathrm{d}x$ per sostituzione: ponendo $e^x = t$, si ha $x = \log t$ e $\mathrm{d}x = 1/t\mathrm{d}t$. L'integrale allora diventa

$$\int \frac{1}{t(t^2-1)}\mathrm{d}t.$$

Spezziamo la frazione algebrica integranda in fratti semplici: cerchiamo, cioè, $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1}.$$

Omettendo alcuni passaggi, ciò è equivalente a risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 0 \\ -A = 1. \end{cases}$$

Si trova $A = -1, B = C = \frac{1}{2}$, perciò

$$\int \frac{1}{t(t^2-1)}\mathrm{d}t = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}\right)\mathrm{d}t = \log\left(\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right) + k.$$

Concludiamo che una primitiva di $f(x)$ è data da

$$F(x) = \log\left(\frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^x}\right).$$

$\square$

Esercizio 3 Si determinino estremo superiore ed inferiore, punti di massimo e minimo locali della funzione

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2-3}.$$

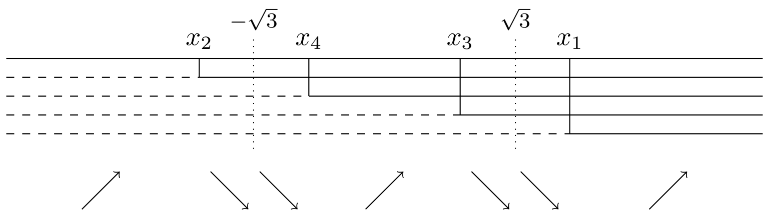
Soluzione. Calcolando i limiti per $x \to \pm\infty$ si verifica subito che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

mostrano che l'immagine è illimitata sia superiormente che inferiormente. Per individuare i punti di massimo e di minimo locale di f studiamo gli zeri e il segno della derivata prima:

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2+3}{(x^2-3)^2} = \frac{(x^2-6)(x^2-1)}{(x^2-3)^2},$$

che ha come zeri $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$ e $x_{3,4} = \pm 1$. Studiando il segno di f', giungiamo al seguente grafico dei segni:



da cui evinciamo che x_1 e x_4 sono punti di minimo locale e x_2, x_3 sono punti di massimo locale. $\square$

Esercizio 4 Si dica se il seguente integrale improprio converge:

$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Osserviamo anzitutto che il punto critico è l'estremo sinistro $x = 0$; attorno a questo punto possiamo considerare gli sviluppi in serie di Taylor di $\log(1+\sqrt{x})$ e di $\sin x$:

$$\begin{aligned} \log(1+\sqrt{x}) &= \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \\ \sin x &= x + o(x); \end{aligned}$$

sostituendo nell'integrale, abbiamo che

$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

e pertanto è convergente.

$\square$

Esercizio 5 Si dica se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n}}$$

è convergente.

Soluzione. Osserviamo che la serie è a termini positivi (per $n \geq 2$), quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Siano

$$a_n = \frac{\log n}{n\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{3}}}$$

e calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log n}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{3}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n}} \cdot n^{1+\frac{1}{3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\sqrt[6]{n}} = 0.$$

Poiché il limite è 0 e $\sum_n b_n$ è convergente, concludiamo che anche $\sum_n a_n$ è convergente. $\square$