Terzo Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corsi A-B

3 Settembre 2014

Soluzioni

Esercizio 1 Si stabilisca se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+x)}dx.$$

Dimostrazione. La singolarità è nel punto $x = 0$. In un intorno di tale punto, $\log(1 + x) \sim x$, dunque l'integrale è asintoticamente equivalente a

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx,$$

che diverge. Ne consegue che anche l'integrale di partenza diverge. □

Esercizio 2 Si determinino i numeri complessi z tali che $z^2 = -8 + 6i$.

Dimostrazione. Sia $\bar{z} = -8 + 6i$. In notazione esponenziale, è facile verificare che

$$\bar{z} = 10e^{i\bar{\theta}}, \qquad \bar{\theta} = \arctan\left(\frac{3}{4}\right).$$

Le radici quadrate di $\bar{z}$ sono $\rho e^{i\theta_1}, \rho e^{i\theta_2}$, dove

$$\rho = \sqrt{10}, \qquad \theta_1 = \frac{\bar{\theta}}{2},\ \theta_2 = \frac{\bar{\theta}}{2} + \pi.$$

□

Esercizio 3 Sia

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)(e^{t^2} - 1)dt.$$

Determinare il numero degli zeri della funzione F.

Dimostrazione. Sia $f(t) = (t^2 - 1)(e^{t^2} - 1)$. Osserviamo preliminarmente che, poiché la funzione f è pari, la funzione F è dispari: $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_{-x}^0 f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt = -F(x)$. Pertanto possiamo limitarci a studiare gli zeri di F nella semiretta $x \geq 0$. Inoltre, f è continua e derivabile con derivata continua, dunque la funzione F è almeno di classe $\mathscr{C}^2$ (derivabile due volte con derivata seconda continua).

Detto questo, uno zero della funzione F è banalmente $x = 0$. Per capire se ve ne sono altri, studiamo il segno della derivata prima di F; dal teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$F'(x) = (x^2 - 1)(e^{x^2} - 1).$$

Il secondo fattore è sempre positivo, per cui il segno è determinato dal primo fattore:

$$\begin{array}{c|c|c}
 & -1 \qquad\qquad 1 & \\
\hline
+ & - & +
\end{array}$$

da cui evinciamo che la funzione F è crescente per $x > 1$, decrescente se $0 < x < 1$. Poiché $x = 0$ è uno zero di F, deduciamo che tra 0 e 1 la funzione deve avere segno costante, per cui eventuali zeri devono essere in modulo maggiori di 1. Stante la monotonia di F, i casi sono due:

- o $\lim_{x\to+\infty} F \geq 0$, da cui concluderemmo (per il teorema di esistenza degli zeri) che F ha un unico zero maggiore di 1;
- o $\lim_{x\to+\infty} F < 0$, da cui necessariamente F non può avere altri zeri.

Poiché $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, allora anche F tende a $+\infty$ e siamo nel primo caso. Possiamo quindi concludere che F ha in totale 3 zeri. □

Esercizio 4 Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 relativo a $x_0 = 0$. Si scriva la relativa formula di Taylor con resto di Lagrange. Dare una stima di $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ a meno di 1/100 usando tale formula.

Dimostrazione. Il polinomio di Taylor di ordine 3 di una generica funzione f nel punto $x_0 = 0$ è

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3,$$

mentre la formula di Taylor con resto di Lagrange è

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}x^4, \quad \xi \in (0, x).$$

Lo sviluppo in serie di Taylor di $\arcsin(x)$ attorno a $x_0 = 0$, troncato al terzo ordine, è:

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

e il relativo resto di Lagrange è

$$R_3(\xi) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}x^4.$$

Proviamo a stimare tale quantità: innanzitutto

$$|R_3(\xi)| \leq |f^{(iv)}(\xi)| \cdot \left|\frac{x^4}{24}\right| \leq \frac{1}{384} \cdot |f^{(iv)}(\xi)|,$$

dove siamo andati a sostituire 1/2 al posto di x. Si può calcolare

$$f^{(iv)}(x) = -3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} - 15x^3(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}.$$

Una stima brutale può essere data dallo sviluppo al primo ordine:

$$f^{(iv)}(x) \simeq -3x(1 - \frac{5}{2}x^2) - 15x^3(1 + \frac{7}{2}x^2),$$

da cui

$$|f^{(iv)}(\xi)| \leq \left|3\xi(1 + \frac{5}{2}\xi^2)\right| + \left|15\xi^3(1 + \frac{7}{2}\xi^2)\right| \leq \frac{381}{64},$$

dove abbiamo usato la monotonia dei singoli addendi per sostituire ξ con $1/2$. Concludiamo che il resto è maggiorato da $381/(64 \cdot 384) \simeq 0.01$, dunque una stima a meno di $1/100$ di $\arcsin(1/2)$ è

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = 0.52083.$$

Osserviamo, ad ulteriore verifica, che $\arcsin(1/2) = \pi/6 \simeq 0.52360$. □

Esercizio 5 Si consideri la seguente serie dipendente dal parametro $x \in (-1, +\infty)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log(1 + x^n).$$

1. Per quali $x \geq 0$ la serie è convergente?
2. Per quali $x \in (-1, 0)$ la serie è convergente?

Dimostrazione.

1. Osserviamo che se $x \geq 1$ il termine generale $\log(1+x^n)$ non è infinitesimo, quindi la serie non può convergere. Se $0 \leq x < 1$, allora la serie è a termini positivi e vale la maggiorazione
$$\log(1 + x^n) \leq x^n.$$
Per il criterio del confronto, la serie in esame è maggiorata da una serie geometrica di ragione $0 \leq x < 1$ e, pertanto, converge.

2. Se $x \in (-1, 0)$ la serie in oggetto non è a termini positivi, quindi non possiamo applicare il criterio del confronto. Verifichiamo se converge assolutamente, nel qual caso - per un ben noto teorema - potremmo concludere che converge. Osserviamo che
$$\sum_n |\log(1 + x^n)| = \sum_{n \text{ pari}} \log(1 + x^n) + \sum_{n \text{ dispari}} -\log(1 - y^n),$$
dove $y = -x$. Essendo quelle di destra entrambe serie a termini positivi, possiamo studiarne separatamente la convergenza. La prima converge perché coincide (a meno dei termini dispari) con una serie geometrica di ragione minore di 1. La seconda richiede un po' più di sforzo:
$$\sum_n -\log(1 - y^n) = \sum_n \log\left(\frac{1}{1 - y^n}\right) \sim \sum_n \frac{1}{1 - y^n} - 1 = \sum_n \frac{y^n}{1 - y^n}$$
e quest'ultima serie converge per il criterio della radice:
$$\sqrt[n]{\frac{y^n}{1 - y^n}} = \frac{|y|}{\sqrt[n]{1 - y^n}} = \frac{|y|}{e^{\frac{\log(1-y^n)}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} |y| < 1.$$
Possiamo concludere che la serie converge assolutamente per $-1 < x < 0$ e dunque converge puntualmente.

□