Secondo Compitino di Analisi Matematica[1]
Corso di laurea in Informatica, corso B

18 Dicembre 2013

Fila A

1. Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{y\to+\infty} y^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right)$.
2. Scrivere la definizione analitica del limite $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ e usarla per verificarne la validità.
3. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$.
4. Calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x)=\ln(1+x^2)\sqrt{\sin(x^3)}$ in $x_0=0$.
5. Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\frac{6\cdot 3^x-5^x+8x^8}{100\log_3 x-4^{x+1}}$.
6. Se f, g sono due funzioni infinitesime in x_0, diciamo che $f\sim g$ se
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell,$$
con ℓ un numero reale diverso da 0. Siano f_1, f_2, g_1, g_2 funzioni infinitesime in $x_0\in\mathbb{R}$ tali che $f_1\sim g_1$ e $f_2\sim g_2$. Dimostrare che $f_1f_2\sim g_1g_2$.
7. Calcolare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2-\cos x)}{1-e^{x^{\alpha+1}}}$.
8. Sia $\beta\in\mathbb{R}$. Considera la funzione data da
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\beta x)}{x} & x>0\\ 3x-2 & x\le 0.\end{cases}$$
   (i) Calcola $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.
   (ii) Per quale valore di β la funzione f è continua in $x=0$? (Suggerimento: affinché f sia continua in $x=0$, come devono essere i limiti calcolati al punto (i)?).
9. Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione e r una retta di equazione $y=mx+q$; diciamo che r è un asintoto obliquo per f a $+\infty$ se
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx-q]=0.$$
Determinare i valori di $a\in\mathbb{R}$ per cui la retta di equazione $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}$ è un asintoto obliquo per la funzione
$$f(x)=\frac{x^3+ax+x}{2x^2-ax+1}.$$

[1] La durata della prova è di 2 ore. Non è possibile utilizzare appunti, libri o dispositivi elettronici.

Secondo Compitino di Analisi Matematica[2]
Corso di laurea in Informatica, corso B

18 Dicembre 2013

Fila B

1. Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{y\to+\infty} y^2 \ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$.
2. Scrivere la definizione analitica del limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$ e usarla per verificarne la validità.
3. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.
4. Calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x) = \tan^4(x)(e^{\sqrt{x}}-1)$ in $x_0 = 0$.
5. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{3\log_5(x) - 5x^{100} + 5^{x+1}}{2\cdot 4^x - 6^x}$.
6. Se f, g sono due funzioni infinitesime in x_0, diciamo che $f \sim g$ se
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell,$$
con ℓ un numero reale diverso da 0. Siano f_1, f_2, g_1, g_2 funzioni infinitesime in x_0 tali che $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$. Dimostrare che $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$.
7. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{x^{\alpha-1}}}{\ln(2-\cos x)}$.
8. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Considera la funzione data da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(\beta x)}{x} & x > 0 \\ 5x+6 & x \leq 0. \end{cases}$$
   (i) Calcola $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.
   (ii) Per quale valore di β la funzione f è continua in $x = 0$? (Suggerimento: affinché f sia continua in $x = 0$, come devono essere i limiti calcolati al punto (i)?).
9. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e r una retta di equazione $y = mx + q$; diciamo che r è un asintoto obliquo per f a $+\infty$ se
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - q] = 0.$$
Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui la retta di equazione $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{14}$ è un asintoto obliquo per la funzione
$$f(x) = \frac{x^3 + ax + x}{4x^2 - ax + 1}.$$

[2]La durata della prova è di 2 ore. Non è possibile utilizzare appunti, libri o dispositivi elettronici.