Secondo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

18 Dicembre 2013

Fila A

Soluzioni

1. Ponendo $x := 1/y$, abbiamo che il limite si riscrive
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2},$$
e dunque il suo valore è $1/2$.

2. La definizione in questo caso è quella che riguarda limite infinito (con segno +) per x che tende ad un valore finito:
$$\forall\ M > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \ \text{ tale che }\ 0 < |x| < \delta \Longrightarrow \frac{1}{x^2} > M.$$
Risolvendo,
$$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{M}}\right),$$
dove abbiamo escluso 0 per evitare l'annullarsi del denominatore. La soluzione così trovata, a patto di chiamare $1/\sqrt{M} = \delta$, è proprio del tipo desiderato, cioè $0 < |x| < \delta$.

3. Il limite si può riscrivere (moltiplicando e dividendo l'esponente per 2)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \left(\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{3}},$$
perciò il limite vale $e^{2/3}$.

4. L'ordine di infinitesimo è $7/2$. Infatti,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)\sqrt{\sin(x^3)}}{x^{\frac{7}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{\sin(x^3)}}{\sqrt{x^3}} = 1,$$
applicando i limiti notevoli noti.

5. Possiamo eliminare gli infiniti di ordine inferiore, per cui:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6\cdot 3^x - 5^x + 8x^8}{100\log_3 x - 4^{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5^x}{-4^{x+1}} = +\infty$$
perché 5^x ha ordine superiore rispetto a 4^{x+1}:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{4^{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{5^x}{4^x} = \frac{1}{4} \cdot +\infty = +\infty.$$

6. Basta applicare la definizione, cioè dimostrare che

$$\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \neq 0;$$

sappiamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{g_1} = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_2}{g_2} = \ell_2,$$

con ℓ_1, ℓ_2 diversi da zero. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \ell_1 \cdot \ell_2 \neq 0.$$

7. Osserviamo che il limite può essere riscritto:

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\ln(1 + 1 - \cos x)}{1 - \cos x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{\frac{x^{\alpha+1}}{1 - e^{x^{\alpha+1}}}}_{\to -1} \cdot \frac{x^2}{x^{\alpha+1}}.$$

Il quarto fattore è $x^{2-(\alpha+1)}$, il cui limite è 1 se l'esponente è 0, 0 se l'esponente è positivo, $+\infty$ se l'esponente è negativo, cioè:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{2-(\alpha+1)} = \begin{cases} 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

Pertanto concludiamo che:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(2 - \cos x)}{1 - e^{x^{\alpha+1}}} = \begin{cases} -1/2 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha < 1 \\ -\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

8. (i) La funzione è definita separatamente su $(-\infty, 0]$ e su $(0, +\infty)$. Per calcolare i limiti richiesti occorre scegliere l'opportuna espressione analitica:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 3x - 2 = -2,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\beta x)}{x} = \beta.$$

(ii) I due limiti devono essere uguali affinché la funzione sia continua in 0. Pertanto $\beta = -2$.

9. Calcolando $f(x) - mx - q$, si ottiene:

$$\frac{x^3 + ax + x}{2x^2 - ax + 1} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{5} = \frac{(5a - 12)x^2 + (16a + 5)x - 6}{10(2x^2 - ax + 1)}.$$

Affinché il limite a $+\infty$ della precedente sia 0 è sufficiente che il grado del polinomio al denominatore sia maggiore del grado del polinomio al numeratore. Pertanto poniamo

$$5a - 12 = 0,$$

da cui $a = 12/5$.

Secondo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

18 Dicembre 2013

Fila B

Soluzioni

1. Ponendo $x := 1/y$, abbiamo che il limite si riscrive
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2},$$
e dunque il suo valore è 1.

2. La definizione in questo caso è quella che riguarda limite infinito (con segno +) per x che tende ad un valore finito:
$$\forall\ M > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \ \text{ tale che } \ 0 < |x| < \delta \Longrightarrow \frac{1}{x^4} > M.$$
Risolvendo,
$$\frac{1}{x^4} > M \iff x^4 < \frac{1}{M} \iff x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{M}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{M}}\right),$$
dove abbiamo escluso 0 per evitare l'annullarsi del denominatore. La soluzione così trovata, a patto di chiamare $1/\sqrt[4]{M} = \delta$, è proprio del tipo desiderato, cioè $0 < |x| < \delta$.

3. Il limite si può riscrivere (moltiplicando e dividendo l'esponente per 3)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \left(\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$
perciò il limite vale $e^{3/2}$.

4. L'ordine di infinitesimo è 9/2. Infatti,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^4 x(e^{\sqrt{x}} - 1)}{x^{\frac{9}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^4 x}{x^4} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} = 1,$$
applicando i limiti notevoli noti.

5. Possiamo eliminare gli infiniti di ordine inferiore, per cui:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\log_5(x) - 5x^{100} + 5^{x+1}}{2\cdot 4^x - 6^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x+1}}{-6^x} = 0$$
perché 6^x ha ordine superiore rispetto a 5^{x+1}:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x+1}}{6^x} = \lim_{x\to+\infty} 5 \cdot \frac{5^x}{6^x} = 5 \cdot 0 = 0.$$

6. Basta applicare la definizione, cioè dimostrare che

$$\frac{\frac{f_1}{f_2}}{\frac{g_1}{g_2}} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \neq 0;$$

sappiamo che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{g_1} = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f_2}{g_2} = \ell_2,$$

con ℓ_1, ℓ_2 diversi da zero. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f_1}{f_2}}{\frac{g_1}{g_2}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{g_2}{f_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \neq 0.$$

7. Osserviamo che il limite può essere riscritto:

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1-\cos x}{\ln(1+1-\cos x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{1-\cos x}}_{\to 2} \cdot \underbrace{\frac{1-e^{x^{\alpha-1}}}{x^{\alpha-1}}}_{\to -1} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{x^2}.$$

Il quarto fattore è $x^{\alpha-1-2}$, il cui limite è 1 se l'esponente è 0, 0 se l'esponente è positivo, $+\infty$ se l'esponente è negativo, cioè:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-3} = \begin{cases} 1 & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha > 3 \\ +\infty & \alpha < 3. \end{cases}$$

Pertanto concludiamo che:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{x^{\alpha-1}}}{\ln(2-\cos x)} = \begin{cases} -2 & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha > 3 \\ -\infty & \alpha < 3. \end{cases}$$

8. (i) La funzione è definita separatamente su $(-\infty, 0]$ e su $(0, +\infty)$. Per calcolare i limiti richiesti occorre scegliere l'opportuna espressione analitica:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 5x + 6 = 6,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(\beta x)}{x} = \beta.$$

(ii) I due limiti devono essere uguali affinché la funzione sia continua in 0. Pertanto $\beta = 6$.

9. Calcolando $f(x) - mx - q$, si ottiene:

$$\frac{x^3 + ax + x}{4x^2 - ax + 1} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{14} = \frac{(7a-40)x^2 + (38a+21)x - 10}{28(4x^2 - ax + 1)}.$$

Affinché il limite a $+\infty$ della precedente sia 0 è sufficiente che il grado del polinomio al denominatore sia maggiore del grado del polinomio al numeratore. Pertanto poniamo

$$7a - 40 = 0,$$

da cui $a = 40/7$.