Analisi Matematica

Raccolta di esercizi con elementi di teoria

Daniele Serra

21 Gennaio 2016

Indice

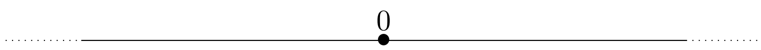
Capitolo 1

Topologia di $\mathbb{R}$

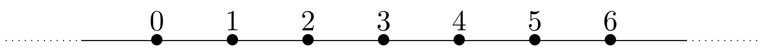
1.1 Introduzione

Lo studio dell'analisi matematica si basa sulla geometria dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali[1]. Molti degli oggetti che definiamo in questo primo periodo costituiranno i mattoni fondamentali per la definizione di nuovi strumenti, più complessi, che ci permetteranno di studiare le proprietà delle funzioni reali di variabile reale. Più specificatamente, ci occuperemo di studiare i *sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$ e le loro proprietà.

Prima di cominciare con la trattazione formale, è utile spendere due parole su come "visualizzare" correttamente un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, poiché l'intuizione geometrica può spesso aiutare a risolvere diversi problemi. È noto che l'insieme dei numeri reali può essere geometricamente interpretato come una retta e ogni numero reale come un punto su tale retta; ad esempio, se vogliamo rappresentare il numero 0, possiamo tracciare una retta e scegliere un punto su di essa:



Ne segue che tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ saranno (potenzialmente) rappresentabili su una retta. Ad esempio, consideriamo l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali: ovviamente $\mathbb{N}$ può essere visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e una sua rappresentazione è



1.2 Insiemi e proposizioni

Gli insiemi vengono indicati con lettere maiuscole dell'alfabeto latino, ad eccezione dei caratteri speciali utilizzati per gli insiemi numerici più comuni: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. I modi per descrivere un insieme sono sostanzialmente tre:

[1] In queste note assumiamo che il concetto di insieme di numeri reali sia noto, almeno intuitivamente.

metodo grafico si disegnano gli elementi dell'insieme su una retta e si utilizzano le etichette per indicarne i nomi; il limite di questa rappresentazione è costituito dal fatto che molti insiemi costituiti da un numero infinito di elementi non sono rappresentabili per intero (per ovvi motivi - vedi la rappresentazione di $\mathbb{N}$).

per elencazione si elencano gli elementi dell'insieme tra parentesi graffe (e.g., $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$); anche qui, il limite è nell'impossibilità di rappresentare per intero la maggior parte degli insiemi infiniti o con numero molto grande di elementi.

per caratteristica consiste nell'utilizzare proposizioni per descrivere le proprietà dell'insieme (e.g., per descrivere l'insieme A dei numeri reali maggiori di 13 basta scrivere $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 13\}$): un vantaggio è che in una riga si riesce a elencare un insieme costituito da un numero anche infinito di elementi, gli svantaggi sono che bisogna imparare a leggere (e a scrivere!) gli insiemi, e che il metodo fallisce se non esiste una proposizione semplice per descrivere l'insieme.

1.2.1 Esercizi

Esercizio 1.2.1. Dati i seguenti insiemi definiti per elencazione, rappresentali per caratteristica:

1. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
2. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
3. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
4. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
5. $A = \{5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots\}$
6. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$
7. $A = \left\{2, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \frac{37}{6}, \dots\right\}$

1.3 Cardinalità e limitatezza

Una proprietà importante degli insiemi è la sua cardinalità, cioè il numero di elementi che contiene. In particolare, diremo che un insieme è *finito* se il numero dei suoi elementi è finito, invece diremo che è *infinito* se ha un numero infinito di elementi. Non è scopo di questo corso investigare a fondo la cardinalità infinita degli insiemi (basti sapere che non tutti gli infiniti sono uguali, ad esempio l'insieme dei numeri naturali ha, in un senso definibile rigorosamente, meno elementi dell'insieme dei numeri reali), per cui ci limiteremo alla distinzione tra insieme finito e infinito.

Il fatto che l'insieme dei numeri reali sia dotato di una relazione d'ordine totale (cioè il fatto che possiamo sempre dire quale numero reale è il più grande tra due) ci permette di introdurre il concetto di limitatezza di un insieme.

Definizione 1.3.1. Diremo che un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è *limitato* se esistono $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tali che $m_1 < x < m_2$ per ogni $x \in A$.

Un insieme si dice *illimitato* se non è limitato. Potrebbe sembrare una tautologia, ma non lo è: la definizione in formule di un insieme illimitato si ottiene negando la proposizione che definisce un insieme limitato. Quindi:

Definizione 1.3.2. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è *illimitato* se non esiste $m_1 \in \mathbb{R}$ o $m_2 \in \mathbb{R}$ tali che $m_1 < x < m_2$ per ogni $x \in A$.

Un esempio di sottoinsieme illimitato è $\mathbb{N}$: esiste m_1 tale che $m_1 < n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (ad esempio basta prendere -1), ma non esiste alcun $m_2 \in \mathbb{R}$ tale che $m_2 > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1.3.1 Esercizi

Esercizio 1.3.3. Per ciascuno degli insiemi nell'esercizio 1.2.1, dire se l'insieme è finito o infinito, limitato o illimitato.

Esercizio 1.3.4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa giustificando la risposta.

1. Se un insieme è finito, allora è limitato.
2. Se un insieme è infinito, allora è illimitato.
3. Se un insieme è illimitato, allora è infinito.
4. Se un insieme è limitato, allora è finito.

1.4 Estremo superiore e estremo inferiore

Consideriamo il sottoinsieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\} \subseteq \mathbb{R}$. Ovviamente $A = \{1, \ldots, 10\}$, dunque A è finito. Inoltre, A è limitato: scegliendo $m_1 = 0$ e $m_2 = 11$, vediamo facilmente che la definizione di insieme limitato viene soddisfatta (infatti, ogni elemento di A è compreso tra 0 e 11)[2]. Spingendoci un po' oltre, possiamo anche dire che A ha un elemento massimo e un elemento minimo: si tratta rispettivamente di 10 e di 1; la definizione di massimo e di minimo è quella che ci si aspetta.

Definizione 1.4.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un elemento $a \in A$ si dice *massimo* di A se $a \geq x$ per ogni $x \in A$. Un elemento $b \in A$ si dice *minimo* di A se $b \leq x$ per ogni $x \in A$.

[2] Vale la pena osservare che le scelte possibili per m_1 e m_2 sono infinite.

Sottolineiamo che nella definizione è compresa la condizione *essenziale* che il minimo e il massimo siano elementi di A.

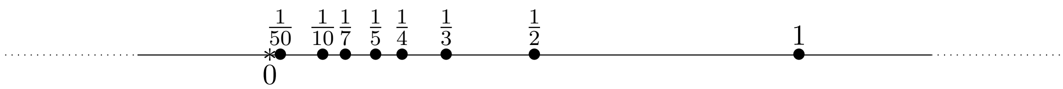
Osserviamo subito che il massimo e il minimo non esistono sempre per un insieme; si consideri, ad esempio, $A = \mathbb{N}$: tale insieme ammette un minimo (1), ma non ammette massimo (non esiste nessun numero naturale più grande di tutti gli altri). Un altro esempio è dato dall'insieme

$$B = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\};$$

tale insieme, infatti, ha un massimo (1), ma non ha un minimo perché non esiste un elemento di B più piccolo di tutti gli altri. Studiando attentamente l'insieme B, osserviamo che i suoi elementi si avvicinano sempre di più verso 0, ma 0 non è un elemento dell'insieme (se lo fosse, 0 dovrebbe essere della forma $1/n$, cioè dovrebbe esistere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{\bar{n}} = 0,$$

ma la precedente equazione è impossibile, dunque un tale $\bar{n}$ non esiste). Una rappresentazione di B è:



Vorremmo allora definire un nuovo oggetto, che abbia la proprietà di essere più piccolo di tutti gli elementi dell'insieme, e che non appartenga necessariamente all'insieme. Riferendoci al caso dell'insieme B, vorremmo che tale oggetto risulti essere proprio 0. Come lo definiamo? Se ci limitiamo a dire che deve essere un numero più piccolo di tutti gli elementi dell'insieme, allora anche -1 risponderebbe a tale definizione, e vorremmo escluderlo. Il problema si risolve se richiediamo che questo nuovo oggetto non solo sia più piccolo di tutti gli elementi di B, ma che non ce ne sia nessuno più grande che abbia la stessa proprietà. Vediamo la definizione rigorosa:

Definizione 1.4.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un numero reale $a \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se valgono entrambe le condizioni seguenti:

a) è un *minorante*: $a \leq x$ per ogni $x \in A$;

b) è il massimo dei minoranti: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in A$ tale che $\bar{x} < a + \epsilon$.

Osserviamo due cose: anzitutto, l'estremo inferiore non appartiene necessariamente a A; inoltre, la seconda proprietà ci dice che non appena aumentiamo l'estremo inferiore di una quantità ϵ piccola a piacere e positiva, riusciamo a trovare un elemento dell'insieme più piccolo; abbiamo, cioè, che un numero più grande di a che sia ancora un minorante non esiste: è il massimo dei minoranti. Allo stesso modo possiamo definire l'estremo superiore di un insieme:

Definizione 1.4.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un numero reale $b \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se valgono entrambe le condizioni seguenti:

a) è un *maggiorante*: $b \geq x$ per ogni $x \in A$;

b) è il minimo dei maggioranti: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in A$ tale che $\bar{x} > b - \epsilon$.

A differenza del massimo e del minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme esistono sempre. In particolare, se l'insieme è illimitato superiormente (cioè se non ammette un maggiorante reale), allora $\sup_A = +\infty$; se è illimitato inferiormente (cioè se non ammette un minorante reale), allora $\inf_A = -\infty$.

È ovvio che se l'estremo superiore/inferiore appartiene all'insieme, allora questo è anche il massimo/minimo.

Esercizio 1.4.4. Considera il seguente insieme:

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

1. Quali sono l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A?

2. Esistono il massimo e/o il minimo di A?

Soluzione. 1. Calcolando i primi elementi dell'insieme, vediamo che sono

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \ldots,$$

da cui siamo portati a credere che gli elementi dell'insieme si avvicinano sempre più a 1. Intuiamo quindi che 0 è l'estremo inferiore e 1 l'estremo superiore. Non resta che dimostrarlo verificando le due proprietà della definizione. Cominciamo con la verifica che $1 = \sup(A)$:

a) la prima proprietà da verificare è che $1 \geq x$ per ogni $x \in A$, cioè

$$\frac{n-1}{n} \leq 1 \text{ per ogni } n \geq 1;$$

risolvendo la disequazione, si trova

$$\frac{n-1-n}{n} \leq 0 \iff \frac{1}{n} \geq 0,$$

che è ovviamente soddisfatta per ogni $n \geq 1$.

b) la seconda proprietà è: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in A$ t.c. $1 - \epsilon \leq \bar{x}$; in altre parole, fissato $\epsilon > 0$, vogliamo trovare $\bar{n}$ tale che

$$1 - \epsilon \leq \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}};$$

risolvendo la disequazione, si trova

$$\frac{\bar{n} - 1 + \epsilon\bar{n} - \bar{n}}{\bar{n}} \geq 0 \iff \frac{\epsilon\bar{n} - 1}{\bar{n}} \geq 0,$$

che è soddisfatta non appena $\bar{n} \geq 1/\epsilon$, dunque uno qualsiasi di questi $\bar{n}$ soddisfa la seconda proprietà.

Concludiamo che $1 = \sup(A)$. La verifica che $0 = \inf(A)$ è lasciata a te.

2. Poiché $0 = \inf(A)$ e $0 \in A$ allora necessariamente $0 = \min(A)$. Per quanto riguarda il massimo, poiché $1 = \sup(A) \notin A$, allora A non può ammettere massimo.

□

Esercizio 1.4.5. Considera il seguente insieme:

$$A = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n - 1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}.$$

1. Indicare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A.
2. Esistono il massimo e/o il minimo di A?

Soluzione. Osserviamo che

$$\frac{n^2 - 1}{n - 1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n - 1} = n + 1,$$

dunque $A = \{n + 1 \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$. Gli elementi di A, al crescere di n, sono sempre più grandi, quindi (vedi esercizio 1.4.7) l'estremo inferiore è il primo di tutti, cioè 3, che è anche il minimo perché appartiene all'insieme. Dimostriamo che l'estremo superiore è $+\infty$: dobbiamo far vedere che (da definizione) scelto $M > 0$, troviamo $\bar{x} \in A$ tale che $\bar{x} > M$; nel nostro caso, vogliamo trovare $\bar{n}$ tale che $\bar{n} + 1 > M$. Ovviamente $\bar{n} = M - 1$ soddisfa tale proprietà, per cui $\sup(A) = +\infty$. Concludiamo che A non ammette massimo. □

1.4.1 Esercizi

Esercizio 1.4.6. Dimostra che se $A \subset \mathbb{R}$ ha massimo, allora questo è anche l'estremo superiore.

Esercizio 1.4.7. Sia $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dimostra che se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n, allora $a_0 = \min(A)$.

Esercizio 1.4.8. Determina estremo superiore, estremo inferiore e eventuali massimo e minimo degli insiemi seguenti:

1. $A = \{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$

2. $A = \{(-1)^n n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$
3. $A = \{\frac{2n-3}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$
4. $A = \{n^2 - 5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$
5. $A = \{\frac{1}{n} \sin(n\frac{\pi}{2}) \mid n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$

Esercizio 1.4.9. Sia A un insieme limitato superiormente. Definiamo $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Dimostra che $\inf(A) = -\sup(-A)$.

1.5 Intervalli e intorni

Esiste una particolare classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che è degna di nota: gli intervalli. Intuitivamente, un intervallo è l'insieme dei numeri reali compresi tra due numeri reali fissati. La definizione formale è la seguente:

Definizione 1.5.1. Siano $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; un *intervallo* di estremi a e b è un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$ tale che se $a < x < b$ allora $x \in I$.

Sottolineiamo che nella definizione di intervallo un estremo può essere anche infinito. Visivamente, un intervallo può essere rappresentato nel modo seguente:

Dato un intervallo di estremi a, b, possono verificarsi 4 casi:

- né a né b appartengono all'insieme: si indica con (a, b);
- a appartiene all'intervallo, ma b no: si indica con $[a, b)$;
- a non appartiene all'intervallo, ma b sì: si indica con $(a, b]$;
- sia a che b appartengono all'intervallo: si indica con $[a, b]$.

Ovviamente, nel caso in cui almeno uno degli estremi è infinito, questo non può appartenere all'intervallo.

Esercizio 1.5.2. Per ciascuno dei casi precedenti, indicare estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo dell'intervallo.

Gli intervalli ci permettono di definire un concetto importante: quello di intorno di un punto.

Definizione 1.5.3. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un numero reale. Chiamiamo *intorno di centro x_0 e raggio $\epsilon > 0$* l'intervallo $U_{x_0,\epsilon} = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

1.5.1 Esercizi

Esercizio 1.5.4. Dimostra che l'unione di due intervalli A, B tali che $A \cap B \neq \emptyset$ è un intervallo. Dimostra con un controesempio che ciò non è vero se $A \cap B = \emptyset$.

Esercizio 1.5.5. Dimostra che l'intersezione di due intervalli A, B tali che $A \cap B \neq \emptyset$ è un intervallo.

Esercizio 1.5.6. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Diciamo che A è *convesso* se per ogni $x, y \in A$ il numero $tx + (1-t)y \in A$ per ogni $t \in (0,1)$. Sia adesso $I \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Dimostra che:

1. se I è un intervallo, allora I è convesso;

2. se I è convesso, allora I è un intervallo.

Esercizio 1.5.7. Determinare estremo superiore, inferiore, massimo e minimo (se esistono) dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{n-3}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-1, 1).$$

Esercizio 1.5.8. Determinare estremo superiore, inferiore, massimo e minimo (se esistono) dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2| > x - 1\}.$$

1.6 Insiemi aperti e chiusi

Studiamo adesso le proprietà dei singoli punti di un insieme.

Definizione 1.6.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme e $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che:

- x è *interno* ad A se esiste un intorno $U_{x,\epsilon} \subset A$;

- x è *esterno* ad A se esiste un intorno $U_{x,\epsilon}$ tale che $U_{x,\epsilon} \cap A = \emptyset$;

- x è *di frontiera* per A se ogni intorno $U_{x,\epsilon}$ interseca sia A che il suo complementare;

- x è *isolato* se esiste un intorno $U_{x,\epsilon}$ tale che $U_{x,\epsilon} \cap A = \{x\}$.

Si faccia attenzione in particolare alla differenza tra un punto esterno e un punto isolato: il primo non appartiene a A, mentre il secondo sì. Inoltre, segue dalla definizione che un punto interno appartiene all'insieme, mentre i punti di frontiera non necessariamente.

Grazie alle definizioni precedenti, possiamo definire i concetti di insieme aperto e chiuso.

Definizione 1.6.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme. Diciamo che:

- A è *aperto* se tutti i suoi punti sono interni;
- A è *chiuso* se il suo complementare è aperto.

Un concetto fondamentale per le future costruzioni, è quello di punto di accumulazione. Vediamo la definizione:

Definizione 1.6.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice *di accumulazione* per A se ogni suo intorno contiene un elemento di A oltre se stesso.

Sottolineiamo che in questa definizione il punto non deve necessariamente appartenere all'insieme; inoltre, non basta controllare che esista un intorno che interseca A: tutti i suoi intorni devono intersecare A in almeno un punto.

Esiste una caratterizzazione degli insiemi chiusi in termini di punti di accumulazione, che non dimostriamo, ma è utile conoscere:

Teorema 1.6.4. *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

1.6.1 Esercizi

Esercizio 1.6.5. Sia $I = (a, b)$. Quali sono i punti di frontiera di I?

Esercizio 1.6.6. Sia $I = [a, b]$. Dimostra che I è chiuso.

Esercizio 1.6.7. Dire se $\{1\}$ è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 1.6.8. Dire se l'insieme $(1, 5) \cup (6, 7)$ è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 1.6.9. Dire se l'insieme $(-3, 3] \cup (4, 7)$ è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 1.6.10. Dire se l'insieme $(-3, 3] \cup (3, 10)$ è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 1.6.11. Sia A l'insieme dell'esercizio 1.4.4. Elencare i suoi punti di accumulazione e i suoi punti di frontiera.

Esercizio 1.6.12. Un punto interno può essere di frontiera?

Esercizio 1.6.13. Un punto esterno può essere di accumulazione?

Esercizio 1.6.14. Dare un esempio di insieme che contiene solo punti isolati.

Esercizio 1.6.15. Dimostrare che se un punto è di accumulazione per un insieme allora ogni suo intorno contiene infiniti punti dell'insieme.

Capitolo 2

Funzioni

2.1 Introduzione

È fondamentale conoscere i grafici delle funzioni elementari. Ad esempio, una buona trattazione è contenuta nel libro di Bertsch, Dal Passo, Giacomelli, da pagina 42 a pagina 46.

2.2 Dominio e codominio

Il calcolo del dominio di una funzione consiste nel calcolare il sottoinsieme dei numeri reali per cui la funzione è definita. Vediamo di seguito i casi più frequenti:

rapporto se una funzione si può scrivere come

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)},$$

allora essa non è definita nei punti $x \in \mathbb{R}$ che annullano il denominatore, dunque bisognerà escludere dal dominio le soluzioni di $g(x) = 0$.

radice se nella funzione compare una radice n-esima, ad esempio $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, si profilano due casi:

- se n è pari, bisogna accertarsi che $g(x) \geq 0$;
- se n è dispari, non bisogna imporre alcuna ulteriore restrizione.

logaritmo se una funzione è del tipo $f(x) = \log g(x)$, allora bisogna accertarsi che il dominio non comprenda i valori che rendono l'argomento non positivo, in altri termini bisognerà porre $g(x) > 0$.

Esercizio 2.2.1. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{-\ln x} + \sqrt{2x+1}}{\sin x}.$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda la funzione f, essendo un rapporto di due polinomi, bisogna escludere dal dominio i numeri reali che annullano il denominatore, cioè le soluzioni di

$$x^2 - x - 6 = 0;$$

risolvendo l'equazione di secondo grado, si trova $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$, dunque il dominio è

$$\mathscr{D}_1 = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty).$$

La funzione g, essendo radice di un rapporto di polinomi, avrà dominio coincidente con l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{x^2-1}{x} \geq 0;$$

risolvendo, si trova

$$\mathscr{D}_2 = [-1, 0) \cup [1, +\infty).$$

La funzione h contiene diverse radici, un logaritmo e un rapporto: ne segue che il dominio sarà l'intersezione degli insiemi ottenuti ponendo le condizioni opportune sui vari addendi. In pratica, bisogna risolvere il sistema composto dalle disequazioni relative ad ogni restrizione del dominio: poiché $-\ln x$ è sotto radice quadrata, bisognerà accertarsi che $-\ln x \geq 0$; inoltre la presenza stessa di $\ln x$ richiede che $x > 0$; ragionando così con l'altra radice e con $\sin x$ a denominatore, abbiamo che il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} -\ln x \geq 0 \\ x > 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Risolvendo, si vede che il dominio è

$$\mathscr{D}_3 = (0, 1].$$

□

Esercizio 2.2.2. Calcolare dominio e codominio delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x^2-9} - 3$$

$$g(x) = \frac{x}{2x-1}.$$

Dimostrazione. Il dominio di f è $\mathscr{D}_1 = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$. Per trovare il codominio, ragioniamo così: di sicuro $\sqrt{x^2 - 9} \geq 0$, perciò il suo codominio è contenuto in $[0, +\infty)$; poiché la nostra funzione ha anche un -3 a sottrarre, il codominio di f è contenuto in $[-3, +\infty)$. Per vedere se alcuni punti di tale insieme sono esclusi dal codominio, basta vedere per quali $k \geq -3$ esiste la soluzione di

$$\sqrt{x^2 - 9} - 3 = k.$$

Risolvendo, si ottiene $x = \pm\sqrt{(k+3)^2 + 9}$, che esiste sempre perché il radicando è sempre positivo. Concludiamo che $\mathrm{Im}(f) = [-3, +\infty)$.

Per quanto riguarda g, il dominio è $\mathscr{D}_2 = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. Lo stesso ragionamento di prima si applica adesso: vediamo per quali $k \in \mathbb{R}$ è possibile trovare una controimmagine di k, cioè una soluzione dell'equazione

$$\frac{x}{2x - 1} = k.$$

Risolvendo, si trova

$$x = \frac{k}{2k - 1},$$

che esiste se e solo se $k \neq 1/2$. Ne segue che il codominio è $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. $\square$

2.2.1 Esercizi

Esercizio 2.2.3. Dimostra che se una funzione si può scrivere come

$$f(x) = g(x)^{h(x)},$$

allora nella ricerca del dominio bisogna porre la condizione $g(x) > 0$.

Esercizio 2.2.4. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
2. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$
3. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{|1-x|}{x+2}}$
4. $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x+2}{x}}$
5. $f(x) = \log(6^{2x} - |4 \cdot 6^x - 1|)$
6. $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$
7. $f(x) = \arcsin(\frac{x+1}{x-1})$

2.3 Monotonia

Riprendiamo le definizioni fondamentali:

Definizione 2.3.1. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$; f si dice:

(i) decrescente in B se per ogni $x_1, x_2 \in B$ tali che $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$;

(ii) strettamente decrescente in B se per ogni $x_1, x_2 \in B$ tali che $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) > f(x_2)$;

(iii) crescente in B se per ogni $x_1, x_2 \in B$ tali che $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$;

(iv) strettamente crescente in B se per ogni $x_1, x_2 \in B$ tali che $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$.

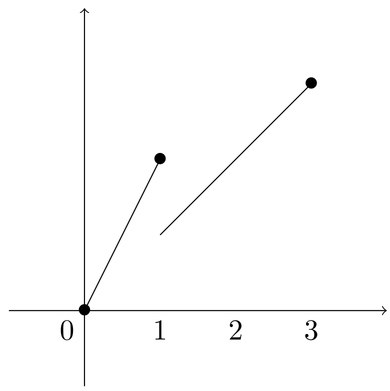
Esercizio 2.3.2. Specificare, per ogni funzione elementare, la monotonia nel proprio dominio.

Esercizio 2.3.3. Sia f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0,1] \\ x & \text{se } x \in (1,3]. \end{cases}$$

Dire se è (strettamente) (de)crescente in: $A = [0,3]$; $B = [0,1]$; $C = [0,1] \cup [2,3]$.

Dimostrazione. Il grafico della funzione f è



Innanzitutto osserviamo che tutti e tre gli insiemi A, B, C sono contenuti nel dominio di f, perciò la domanda è ben posta. In A è facile vedere che f non è monotona: basta prendere $x_1 = 1$, $x_2 = 3/2$ e $x_3 = 3$ e si vede che

$$f(x_1) > f(x_2), \quad f(x_2) < f(x_3);$$

visto che abbiamo individuato due punti su cui f è decrescente e altri due su cui è crescente, non può essere né una né l'altra.

In B la funzione coincide con la funzione $g(x) = 2x$, che è strettamente crescente, quindi è strettamente crescente.

In $C = [0,1] \cup [2,3]$ la funzione è crescente perché lo è separatamente sui due intervalli e inoltre se $x_1 \in [0,1]$ e $x_2 \in [2,3]$ si ha

$$f(x_1) = 2x_1 \leq x_2 = f(x_2);$$

poiché scegliendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ vale l'uguaglianza, concludiamo che f su C è crescente, ma non strettamente. □

Esercizio 2.3.4. Dire se la seguente funzione è (strettamente) (de)crescente in $A = (0, +\infty)$:

$$f(x) = 4^x + \log_3 x.$$

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che $\operatorname{dom}(f) = A$, quindi la domanda è ben posta. Inoltre, entrambe le funzioni $g = 4^x$ e $h = \log_3 x$ sono strettamente crescenti in A, ed è noto che *la somma di funzioni strettamente crescenti è strettamente crescente* (cercalo sul libro!). Concludiamo che f è strettamente crescente. □

2.4 Simmetrie

Ricordiamo le definizioni fondamentali di funzione pari e dispari:

Definizione 2.4.1. Sia $f \colon A \to \mathbb{R}$.

(i) La f si dice *pari* in A se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in A$;

(ii) La f si dice *dispari* in A se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in A$;

(iii) La f si dice *periodica* se esiste $T \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\begin{cases} x + T \in A & \forall x \in A \\ f(x+T) = f(x) & \forall x \in A. \end{cases}$$

Il numero T è detto *periodo* di f.

Esercizio 2.4.2. Stabilisci se le seguenti funzioni sono pari, dispari, né pari né dispari:

$$f(x) = \ln|x| + 1, \quad g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x}.$$

Esercizio 2.4.3. Stabilire quali delle seguenti funzioni sono periodiche nel loro dominio e determinarne l'eventuale periodo:

a) $f(x) = \sin^2 x$;

b) $f(x) = \sin(x^2)$;

c) $f(x) = \cos(3x)$;

d) $f(x) = \sin(x/3)$;

e) $f(x) = \sin(2x) - 2\cos(3x)$;

f) $f(x) = \sin(\tan(3x - 1))$;

Dimostrazione. Risolviamo i punti a) e b).

Poiché è noto che $\sin x$ è 2π-periodica, allora abbiamo che

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sin^2 x = \sin^2(x + 2\pi)\ \forall x \in \mathbb{R},$$

dunque $\sin^2 x$ è periodica, e il periodo è minore o uguale di 2π. In effetti, si vede che vale

$$\sin^2(x + \pi) = (\sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x)^2 = \sin^2 x\ \forall x \in \mathbb{R},$$

da cui evinciamo che $\sin^2 x$ è π-periodica. Potrebbe essere periodica con periodo $T < \pi$? Proviamo a vedere: imponiamo che f sia T-periodica:

$$\sin^2(x + T) = \sin^2(x) \iff \pm\sin(x + T) = \pm\sin(x);$$

l'ultima equazione non può essere verificata se $T < \pi$.

Dimostriamo che la funzione $\sin(x^2)$ non è periodica. Se lo fosse, esisterebbe $T > 0$ tale che

$$\sin((x + T)^2) = \sin(x^2)\ \forall x \in \mathbb{R};$$

ma questo significherebbe che $(x + T)^2 = x^2 + \pi$, cioè T soddisferebbe

$$T^2 + 2xT - \pi = 0,$$

la cui soluzione dipende da x e questo non può accadere (il periodo T deve essere lo stesso per ogni $x \in \mathbb{R}$). □

2.5 Composizione di funzioni

Rimandiamo la definizione di composizione di funzioni al testo di Bertsch, a pagina 51, in questa sede ci occupiamo prevalentemente di esercizi. A livello *formale*, per avere l'espressione di $g \circ f$, date f e g, bisogna sostituire l'espressione di f in ogni occorrenza della variabile indipendente in g.

Esercizio 2.5.1. Date $f = \sqrt[3]{x}$ e $g = x^2 - 1$, determinare l'espressione di $g \circ f$ e $f \circ g$.

Dimostrazione. Per calcolare $g \circ f$ bisogna sostituire $f = x^2 - 1$ dovunque compaia la x in g:

$$f \circ g = (\sqrt[3]{x})^2 - 1 = \sqrt[3]{x^2} - 1.$$

Per calcolare $f \circ g$ bisogna sostituire $g = \sqrt[3]{x}$ dovunque compaia la x in f:

$$g \circ f = \sqrt[3]{x^2 - 1}.$$

□

2.5.1 Esercizi

Esercizio 2.5.2. Siano

$$f(x) = x^2 + x - 2, \quad g(x) = \log_{10}(1 - 2x).$$

Determinare il dominio di $g \circ f$ e di $f \circ g$.

Esercizio 2.5.3. Considera le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \ln x + 1$. Dimostra che $f \circ g \neq g \circ f$.

Esercizio 2.5.4. Date le funzioni $f(x) = x+1$ e $g(x) = 2x-3$, trova $f(x+1)$ e $g(x-1)$ e trova gli zeri della funzione

$$h(x) = f(g(x)) - f(x+1) + g(x-1).$$

Esercizio 2.5.5. Dimostra che se f ha periodo T e $a > 0$, $f(ax)$ ha periodo $T_1 = \frac{T}{a}$.

2.6 Iniettività, surgettività, bigettività

Ricordiamo le definizioni principali:

Definizione 2.6.1. Sia $f\colon A \to B$ una funzione.

(i) f si dice *iniettiva* se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \neq x_2$, si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$;

(ii) f si dice *surgettiva* se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;

(iii) f si dice *bigettiva* se per ogni $y \in B$ esiste un unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Osservazione 2.6.2. Osserviamo che una funzione è sempre surgettiva se il codominio è coincidente con la sua immagine. Pertanto, il codominio di una funzione può essere sempre ristretto alla sua immagine e rendere così la funzione surgettiva. Ad esempio, per la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{codom}(f) = \mathbb{R}$, ma $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$. Come funzione a valori in $\mathbb{R}$ non è surgettiva, ma se restringiamo il codominio a $[0, +\infty)$ scrivendo $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, allora diventa surgettiva.

Esercizio 2.6.3. Per ognuna delle funzioni elementari, dire quali sono iniettive, quali surgettive e quali bigettive.

Esercizio 2.6.4. Dimostrare che se f è strettamente monotona allora è iniettiva. Mostrare, esibendo un controesempio, che il viceversa non è sempre vero.

Esercizio 2.6.5. Stabilire se le seguenti funzioni $f\colon X \to \mathbb{R}$ sono iniettive, surgettive, bigettive:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $X = [0, +\infty)$;

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

c) $f(x) = -x^4$, $X_1 = \mathbb{R}$, $X_2 = [1, +\infty)$, $X_3 = [-1, 0] \cup [2, +\infty)$.

Dimostrazione. Risolviamo il punto c).

Su $X_1 = \mathbb{R}$ la funzione non è iniettiva. Come da definizione, riusciamo ad individuare due numeri reali $x_1, x_2 \in X_1$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$: basta prendere $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Veniamo alla surgettività. Il codominio è assegnato (è $\mathbb{R}$), e rispetto a questo insieme non è surgettiva: infatti, riusciamo a trovare $y \in \mathbb{R}$ tale che non esiste alcun $x \in X_1$ tale che $f(x) = y$: basta prendere $y = 1$. Infatti, non è possibile risolvere $-x^4 = y$.
Non essendo surgettiva, la funzione non è neanche bigettiva.

Su $X_2 = [1, +\infty)$, la funzione è strettamente decrescente per proprietà delle potenze (Bertsch, pag.16, proprietà 8), quindi è anche iniettiva (esercizio 2.6.4).
La funzione, non essendo surgettiva in X_1, che contiene X_2, a maggior ragione non può esserlo in X_2. Ne segue che non può essere neanche bigettiva.

Su X_3 la funzione è iniettiva. Per dimostrarlo, facciamo vedere, come da definizione, che se $x_1 \neq x_2 \in X_3$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$. Nella scelta di x_1 e x_2 ci si presentano tre casi:

- $x_1, x_2 \in [-1, 0]$: poiché f è strettamente crescente in $[-1, 0]$, allora è iniettiva (sempre in $[-1, 0]$) e quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$;

- $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$: poiché f è strettamente decrescente in $[2, +\infty)$, allora è iniettiva (sempre in $[2, +\infty)$) e quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$;

- $x_1 \in [-1, 0]$ e $x_2 \in [2, +\infty)$: in questo caso la monotonia non ci aiuta poiché in un intervallo la funzione è crescente e nell'altro è decrescente; osserviamo però che se $-1 \leq x_1 \leq 0$, allora $-1 \leq f(x_1) \leq 0$, mentre se $x_2 \geq 2$, allora $f(x_2) \leq -16$, quindi $f(x_1)$ non può mai essere uguale a $f(x_2)$.

Poiché i tre casi presentati su esauriscono tutta la casistica possibile, allora concludiamo che $f(x_1) \neq f(x_2)$ per ogni scelta di $x_1 \neq x_2$, da cui l'iniettività.
Per ragioni analoghe a prima, f non è surgettiva neanche in questo caso, quindi neanche bigettiva.

Per concludere, rimarchiamo ancora una volta che, se invece di $\mathbb{R}$ scegliamo, in ciascuno dei tre casi, come codominio l'immagine di f, allora la funzione diventa surgettiva e quindi in X_2 e X_3 anche bigettiva. □

Esercizio 2.6.6. Dimostrare che se f e g sono iniettive, allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono iniettive.

2.7 Funzione inversa

Se una funzione $f\colon A \to B$ è bigettiva, allora esiste la funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$ che associa ad ogni elemento $y \in B$ l'elemento in A tale che $f(x) = y$.

Quindi, per sapere se esiste la funzione inversa di una data funzione f, bisogna controllare se è bigettiva. In alternativa, basta controllare che sia strettamente monotona:

Teorema 2.7.1. *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$; se f è strettamente monotona in A, allora è invertibile in A e f^{-1} è strettamente monotona in $f(A)$.*

Esercizio 2.7.2. Determina l'espressione della funzione inversa delle seguenti funzioni e il relativo dominio:

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}, \quad g(x) = 4\sin(2x), \quad h(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Dimostrazione. Risolviamo l'esercizio per le funzioni f e g. La funzione f ha dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ed è composizione di funzioni iniettive, quindi è iniettiva; nel suo dominio è pertanto bigettiva, quindi invertibile. Procediamo al calcolo della legge di f^{-1}:

$$y = e^{\frac{x-1}{x}} \iff \ln y = \frac{x-1}{x} \iff x - 1 = x \ln y \iff x = \frac{1}{1-\ln y},$$

da cui $\operatorname{dom} f^{-1} = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

La funzione g non è iniettiva nel suo dominio (che è $\mathbb{R}$), ma lo è, ad esempio, in $[-\pi/2, \pi/2]$ poiché g è periodica con periodo π. In questo intervallo è bigettiva (assumendo che il codominio sia la sua immagine, naturalmente) e pertanto possiamo procedere al calcolo della legge di g^{-1}:

$$y = 4\sin(2x) \iff \sin(2x) = \frac{y}{4} \iff 2x = \arcsin\frac{y}{4} \iff x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{4};$$

il dominio di g^{-1} è dato imponendo che $-1 \le \frac{y}{4} \le 1$ da cui $-1 \le y \le 1$, cioè

$$\operatorname{dom} g^{-1} = [-4, 4].$$

□

2.8 Trasformazioni geometriche

Gli esercizi di questa sezione si riferiscono alle pagine 61-68 del libro di Bertsch.

Elenchiamo le principali operazioni che si possono fare sulle funzioni, e le trasformazioni sul loro grafico.

modulo di f Il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$ si ottiene dal grafico di f "ribaltando" la parte negativa rispetto all'asse x e lasciando invariata la parte positiva.

modulo di x Il grafico della funzione $g(x) = f(|x|)$ si ottiene dal grafico di f "ribaltando" la parte corrispondente all'asse x rispetto all'asse y.

traslazioni di f Il grafico della funzione $g(x) = f(x) + k$ si ottiene dal grafico di f traslando ogni punto del vettore $(0, k)$.

traslazioni di x Il grafico della funzione $g(x) = f(x + k)$ si ottiene dal grafico di f traslando ogni punto del vettore $(-k, 0)$.

riflessione di f Il grafico della funzione $g(x) = -f(x)$ si ottiene dal grafico di f ribaltandolo rispetto all'asse x.

riflessione di x Il grafico della funzione $g(x) = f(-x)$ si ottiene dal grafico di f ribaltandolo rispetto all'asse y.

riscalamento di f Il grafico di $g(x) = Af(x)$ si ottiene dal grafico di f riscalandolo rispetto all'asse y.

riscalamento di x Il grafico di $g(x) = f(Ax)$ si ottiene dal grafico di f riscalandolo rispetto all'asse x.

Esercizio 2.8.1. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$f(x) = -\sin|x| + 1.$$

$$f(x) = |4 - x^2| + 2.$$

$$f(x) = 2^{|x|} - 1.$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{(partire dal grafico di } 1/x\text{)}.$$

$$f(x) = \left||x| - 1\right|.$$

$$f(x) = \arcsin(2x).$$

Capitolo 3

Limiti

3.1 Limiti: definizioni

Per trattare i limiti di funzioni reali, adottiamo un *escamotage* che ci permetterà di dare una definizione unica.

Definizione 3.1.1. La *retta reale estesa* è l'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Con la definizione precedente, adesso possiamo trattare $+\infty$ e $-\infty$ come se fossero dei punti di $\mathbb{R}$, al pari di ogni altro numero reale. Naturalmente abbiamo bisogno di sapere chi sono gli intorni di tali punti.

Definizione 3.1.2. Un *intorno di* $+\infty$ è un intervallo del tipo $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$; un intorno di $-\infty$ è un intervallo del tipo $(-\infty, b)$, con $b \in \mathbb{R}$.

Se $x \in \mathbb{R}$, ricordiamo che abbiamo definito un intorno di x del tipo (x, a) e del tipo (b, x) rispettivamente *intorno destro* e *intorno sinistro* di x. Perciò gli intorni di $+\infty$ sono solo intorni sinistri, e gli intorni di $-\infty$ sono solo intorni destri.

Possiamo dare la definizione di limite di una funzione reale.

Definizione 3.1.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to \mathbb{R}^*$ una funzione. Sia x_0 un punto di accumulazione per A. Un valore $\ell \in \mathbb{R}^*$ si dice *limite di f in x_0* se, per ogni intorno U di ℓ, esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) \in U$ per ogni $x \in V,\ x \neq x_0$.

In altre parole, ℓ è limite per f in x_0 se per ogni intorno U di ℓ riusciamo a trovare un intorno V di x_0 la cui immagine è tutta contenuta in U (ad eccezione di x_0, eventualmente). Geometricamente (e informalmente), questo corrisponde all'idea che il limite in x_0 è ℓ se punti vicini a ℓ sono immagini di punti vicini a x_0. *È essenziale che x_0 sia di accumulazione per l'insieme su cui è definita la funzione.* Quando non diversamente specificato, si intende che il punto x_0 sia di accumulazione.

Dalla definizione precedente, a seconda che ℓ e x_0 siano finiti o infiniti, possiamo derivare quattro definizioni di limite:

x_0 **finito,** ℓ **finito** : per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

x_0 finito, ℓ infinito : per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x)| > M$.

$x_0 = +\infty$ (risp. $x_0 = -\infty$), ℓ finito : per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ t.c. se $x > N$ (risp. $x < -N$), allora $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

$x_0 = +\infty$ (risp. $x_0 = -\infty$), ℓ infinito : per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ t.c. se $x > N$ (risp. $x < -N$), allora $|f(x)| > M$.

Osservazione 3.1.4. Si vede dalle definizioni precedenti che se troviamo un valore $\bar{\delta}$ valido per un certo valore $\bar{\epsilon}$, allora $\bar{\delta}$ è valido per tutti i valori maggiori di $\bar{\epsilon}$. Di conseguenza, quando si verificano i limiti, non serve dimostrare le proprietà precedenti per ogni valore di ϵ, ma basta dimostrarle per ϵ piccoli (o meglio, più piccoli di un valore arbitrario).

3.2 Esercizi di verifica dei limiti

Esercizio 3.2.1. Verificare, usando la definizione, che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-3}{x+1} = 1.$$

Dimostrazione. Siamo nel caso di limite finito all'infinito, quindi la definizione giusta da adoperare è la terza. Poiché $x_0 = -\infty$, allora la definizione è

Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ t.c. se $x < -N$, allora $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Per verificarla, partiamo fissando $\epsilon > 0$, e risolviamo la disequazione

$$|f(x) - \ell| < \epsilon,$$

che nel caso specifico è

$$\left| \frac{x-3}{x+1} - 1 \right| < \epsilon;$$

come soluzione vogliamo trovare $x < -N$, con N un numero dipendente da ϵ. Se non troviamo una tale soluzione, allora il limite non è verificato, e concludiamo che non è vero.

La disequazione è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x+1} - 1 < \epsilon \\ \frac{x-3}{x+1} - 1 > -\epsilon. \end{cases}$$

Risolviamole una alla volta.

Prima disequazione

$$\frac{x-3}{x+1} - 1 < \epsilon \iff \frac{x - 3 - x - 1 - \epsilon x - \epsilon}{x+1} < 0 \iff \frac{-\epsilon x - 4 - \epsilon}{x+1} < 0$$

Studiamo il segno della frazione:

$$\begin{array}{ll} \text{Numeratore} > 0 & -\epsilon x - 4 - \epsilon > 0 \iff x < -\dfrac{4+\epsilon}{\epsilon} \\ \text{Denominatore} > 0 & x+1>0 \iff x > -1 \\ \text{Soluzione} & x < -\dfrac{4+\epsilon}{\epsilon} \quad \text{o} \quad x > -1. \end{array}$$

Seconda disequazione

$$\frac{x-3}{x+1} - 1 > -\epsilon \iff \frac{x-3-x-1+\epsilon x+\epsilon}{x+1} > 0 \iff \frac{\epsilon x + \epsilon - 4}{x+1} > 0$$

Studiamo il segno della frazione:

$$\begin{array}{ll} \text{Numeratore} > 0 & \epsilon x - 4 + \epsilon > 0 \iff x > \dfrac{4-\epsilon}{\epsilon} \\ \text{Denominatore} > 0 & x+1>0 \iff x > -1 \\ \text{Soluzione} & x < -1 \quad \text{o} \quad x > \dfrac{4-\epsilon}{\epsilon}. \end{array}$$

La soluzione del sistema è dato prendendo le soluzioni comuni alle due disequazioni. Si vede che la soluzione è

$$x < -\frac{4+\epsilon}{\epsilon} \quad \text{o} \quad x > \frac{4-\epsilon}{\epsilon}.$$

Se chiamiamo $N := \frac{4+\epsilon}{\epsilon}$, allora vediamo che tale soluzione contiene la soluzione $x < -N$, quindi il limite è verificato. $\square$

Esercizio 3.2.2. Verificare, usando la definizione, che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2-x}{x} = +\infty.$$

Dimostrazione. Si tratta della verifica di un limite infinito in un punto finito, quindi la definizione che fa al caso nostro è la seconda:

Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x)| > M$.

Nel nostro caso, si riscrive

Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|x - 0| < \delta$, allora $\left|\frac{2-x}{x}\right| > M$,

che può essere semplificata così:

Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $0 < x < \delta$, allora $\frac{2-x}{x} > M$

perché il limite è a 0^+ (e quindi in $|x - x_0|$ si può togliere il modulo) e il suo valore è $+\infty$ (e quindi in $|f(x)|$ si può togliere il modulo[1]).

Come prima, fissiamo $M > 0$ e risolviamo

$$\frac{2-x}{x} > M;$$

affinché il limite sia verificato, dobbiamo trovare una soluzione del tipo $0 < x < \delta$, con δ dipendente da M.

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{2-x}{x} > M \iff \frac{2-x-Mx}{x} > M \iff \frac{2-(1+M)x}{x} > M;$$

studiamo il segno:

$$\begin{aligned}
&\text{Numeratore} > 0 \qquad 2-(1+M)x > 0 \iff x < \frac{2}{1+M} \\
&\text{Denominatore} > 0 \qquad x > 0; \\
&\text{Soluzione} \qquad 0 < x < \frac{2}{1+M}.
\end{aligned}$$

Se chiamiamo $\delta := \frac{2}{1+M}$, abbiamo che la soluzione è $0 < x < \delta$, come volevasi dimostrare.

□

3.3 Limiti delle funzioni elementari

I seguenti limiti sono fondamentali per svolgere esercizi di calcolo dei limiti.

Monomi in una variabile

Sia n un numero naturale positivo.

- $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ per ogni $n > 0$.
- $\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty$ per ogni $n > 0$.
- $\lim_{x\to -\infty} x^n = +\infty$ se n è pari, $-\infty$ se n è dispari.

Funzione esponenziale

Sia $a > 0$ un numero reale.

- Se $a > 1$, allora $\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x\to -\infty} a^x = 0$.
- Se $a < 1$, allora $\lim_{x\to +\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} a^x = +\infty$.

[1] Se avessimo avuto il limite a 0^- avremmo potuto togliere il modulo e cambiare di segno: $x_0 - \delta < x < 0$, mentre se il limite fosse stato $-\infty$ avremmo potuto togliere il modulo e cambiare di segno a $|f(x)|$, scrivendo $f(x) < -M$.

Funzione logaritmica

Sia $a > 0$ un numero reale.

- Per ogni $a > 0$, $\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$.
- Se $a > 1$, allora $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$.
- Se $a < 1$, allora $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$.

Funzioni trigonometriche

- $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \tan x$ non esistono.
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

3.4 Limiti di rapporto di polinomi

Siano $p(x), q(x)$ due polinomi. Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Supponiamo che $\deg p = m$ e $\deg q = n$, cioè possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p(x) &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Allora, osserviamo che possiamo raccogliere, sia a numeratore che a denominatore, i termini di grado massimo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m})}{x^n(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n})}.$$

A questo punto, ci si presentano tre casi (trattiamo il caso di limite):

$m < n$ - in questo caso il limite è

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-m}} \cdot \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} = 0$$

perché il primo fattore tende a zero e il secondo tende a a_m/b_n.

$m > n$ - in questo caso il limite è

$$\lim_{x\to+\infty} x^{m-n} \cdot \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} = \operatorname{sgn}\left(\frac{a_m}{b_n}\right)\infty$$

perché il primo fattore tende a infinito, il secondo a a_m/b_n, che dà il segno all'infinito.

$m = n$ - in questo caso il limite è

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n}.$$

3.4.1 Esercizi

Esercizio 3.4.1. Calcolare il limite per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2 + 3x - 5} \\
f(x) &= 5x + 4 \\
f(x) &= \frac{4x^3 + 7x + 1}{2x^3 - 1} \\
f(x) &= \frac{6x^5 + 5x^2 - 2}{3x^4 + x^5 + 2} \\
f(x) &= \frac{-8x^3 - 4x^2 + \pi x - 1}{6x^4 + x} \\
f(x) &= \frac{2x + 3x^2}{-4x + 1} \\
f(x) &= \frac{3 - x - 7x^4}{5x + 1 - 3x^2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.4.2. Siano p, q polinomi di gradi rispettivamente m, n. Si calcoli, al variare di m e n,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

3.5 Limiti notevoli

Un teorema *fondamentale* per risolvere gli esercizi è il seguente (Bertsch, Teorema 3.22, pagina 93):

Teorema 3.5.1. *Siano f, g funzioni per cui sia definita la composizione e x_0, ℓ punti di accumulazione. Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad e \quad \lim_{y\to\ell} g(y) = k,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = k.$$

Il precedente teorema si usa soprattutto quando $\lim_{y\to\ell} g(y)$ è un limite notevole.

Esercizio 3.5.2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}.$$

Dimostrazione. Noi conosciamo il limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

per cui sia $g(y) = \sin y/y$, $\ell = 0$ e $k = 1$. Di conseguenza prendiamo $f(x) = x - 1$ e $x_0 = 1$. Poiché $\lim_{x\to 1} x - 1$ fa proprio 0 (cioè il valore ℓ in cui calcoliamo il limite di g), allora possiamo concludere, grazie al teorema, che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1.$$

□

Esercizio 3.5.3. Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x}.$$

Dimostrazione. Se avessimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{4x},$$

allora potremmo immediatamente concludere che il limite vale 1 perché potremmo applicare il teorema precedente con $f(x) = 4x$, $g(y) = \sin y/y$, $x_0 = 0$, $\ell = 0$, $k = 1$. Per ottenere tale situazione, possiamo moltiplicare e dividere per il numero 4, ottenendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \cdot 4;$$

il limite del primo fattore è 1 per quanto detto prima, quindi il limite di tutta la funzione è 4. □

Esercizio 3.5.4. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Esercizio 3.5.5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\ln(1+\sin^4 x)}$$

Soluzione. Ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

possiamo "ricostruirli" nel limite in questione moltiplicando e dividendo per fattori opportuni:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 \cdot x^4}{\dfrac{\ln(1+\sin^4 x)}{\sin^4 x} \cdot \sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)^2}{\dfrac{\ln(1+\sin^4 x)}{\sin^4 x}} \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x}.$$

A numeratore c'è
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
a denominatore c'è
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^4 x)}{\sin^4 x}:$$
poiché $\lim_{x\to 0}\sin^4 x = 0$, allora il limite è uguale a
$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$
Infine, c'è anche a moltiplicare il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sin^4 x};$$
poiché $\lim_{x\to 0}\sin^4 x = 0$ allora il limite è uguale a
$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}} = 1.$$
Concludiamo che
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\ln(1+\sin^4 x)} = \frac{\frac{1}{4}}{1}\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

□

3.5.1 Esercizi

Si calcolino i seguenti limiti.

Esercizio 3.5.6.
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 x)^{\tan^2 x}.$$

Esercizio 3.5.7.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Esercizio 3.5.8.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\tan^4 x+1)}{e^{2\sin^4 x}-1}.$$

Esercizio 3.5.9.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}.$$

Capitolo 4

Funzioni continue

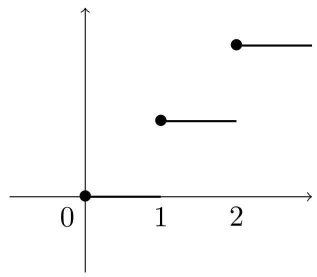
4.1 Continuità in un punto

Ricordiamo la definizione di continuità di una funzione f in un punto di accumulazione x_0 del suo dominio:

Definizione 4.1.1. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in A$ di accumulazione se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esempio 4.1.2. La funzione parte intera $f(x) = [x]$ non è continua in alcun punto $x \in \mathbb{Z}$. Infatti, per ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$ abbiamo che $f(x_0)$ è diverso da $\lim_{x \to x_0} f(x)$: $f(x_0) = x_0$, mentre il limite non esiste (il limite da destra è diverso dal limite da sinistra).



Il precedente esempio ci dà lo spunto per la prossima definizione, che si usa operativamente negli esercizi.

Definizione 4.1.3. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$ di accumulazione per A.

1. f si dice continua da destra in x_0 se vale

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

2. f si dice continua da sinistra in x_0 se vale

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Segue dalla definizione la seguente importante proprietà:

Teorema 4.1.4. *Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ di accumulazione se e solo se è continua da destra e da sinistra:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Applichiamola subito ad un esercizio:

Esercizio 4.1.5. Trovare i valori di $p \in \mathbb{R}$ per cui la seguente funzione è continua in $x_0 = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} px - 2 & \text{se } x \geq -1 \\ 3x^2 - 4x + 5 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Soluzione. Seguendo la definizione, affinché f sia continua in $x_0 = -1$, deve esserlo sia da destra che da sinistra, cioè i limiti seguenti devono essere uguali:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x).$$

Per quanto riguarda il primo limite, poiché a destra di -1 la funzione ha espressione $px - 2$, si ha:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} px - 2 = -p - 2.$$

Per quanto riguarda il primo limite, poiché a sinistra di -1 la funzione ha espressione $3x^2 - 4x + 5$, si ha:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 3x^2 - 4x + 5 = 12.$$

Imponiamo che siano uguali, così troviamo i valori di p desiderati:

$$-p - 2 = 12 \iff p = -14.$$

Concludiamo che f è continua in -1 se e solo se $p = -14$. □

Cosa possiamo dire della continuità delle funzioni in generale nel loro dominio? Data una funzione f, vorremmo rispondere alla domanda: in quali punti del suo dominio f è continua? Naturalmente non sarebbe possibile pensare di verificare che vale la definizione di continuità in ogni punto del dominio. Ci vengono in aiuto le seguenti proprietà:

- Le funzioni elementari $x^a (a \in \mathbb{R})$, $\log_a x (a > 0,\ a \neq 1)$, $a^x (a > 0, a \neq 1)$, $\sin x, \cos x, \tan x$ sono continue in ogni punto del loro dominio.

- Se f e g sono continue in x_0, allora lo sono anche

$$f \pm g, \quad cf \ (c \in \mathbb{R}), \quad f \cdot g, \quad f/g, \quad |f|.$$

- Se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

Grazie alle precedenti proprietà, possiamo affermare che la funzione dell'esercizio 4.1.5 è continua in ogni $x < -1$ perché è somma di monomi, che sono continui; per la stessa ragione è continua in ogni $x > -1$. Se $p = -10$, allora, essendo continua anche in -1, è continua su tutto $\mathbb{R}$.

4.1.1 Esercizi

Esercizio 4.1.6. Dopo aver calcolato il dominio delle seguenti funzioni, dire per quali valori del parametro α sono continue in ogni punto del loro dominio:

1. $$f(x) = \begin{cases} \log(x^3 - 28\alpha) - \log 2 - \log 10 & x < 6 \\ \log(x + \alpha) & x \geq 6. \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} 2\alpha - \cos x & x < \pi \\ 2\sin x + \alpha & x \geq \pi. \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 4x + 2 & x \geq 2 \\ \frac{4x+\alpha}{x^2+1} & x < 2. \end{cases}$$

4. $$f(x) = \begin{cases} 3\alpha - 5 & x \geq 0 \\ \frac{x-10}{x-2} & x < 0. \end{cases}$$

5. $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin((\alpha-1)x)}{x} & x \geq 0 \\ \frac{\tan^2 x}{1+x^2} & x < 0. \end{cases}$$

4.2 Discontinuità

Un punto di discontinuità x_0 è un punto del dominio della funzione f in cui f non è continua. Possono verificarsi i seguenti casi:

- Punto di *discontinuità eliminabile* se esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ma

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

- Punto di *discontinuità di prima specie* se esistono finiti $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, ma sono diversi. In questo caso si definisce il *salto di f in x_0*, che è

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

- Ogni altro caso viene classificato come punto di *discontinuità di seconda specie.*

Esercizio 4.2.1. Studiare la continuità della seguente funzione, classificandone gli eventuali punti di discontinuità.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-7 & x \leq 5 \\ 2x+7 & x < 5. \end{cases}$$

Soluzione. Per $x < 5$ e per $x > 5$ la funzione ha espressione polinomiale, quindi è continua. Per $x = 5$, studiamo la continuità calcolando i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} 2x+7 = 17;$$
$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} 2x-7 = 3;$$

Poiché $\lim_{x\to 5^+} f(x) \neq \lim_{x\to 5^-} f(x)$, allora il punto $x_0 = 5$ è una discontinuità di prima specie. Il salto è $\lim_{x\to 5^+} f(x) - \lim_{x\to 5^-} f(x) = 17 - 3 = 14$. □

Esercizio 4.2.2. Dopo aver determinato il dominio della seguente funzione, stabilisci la natura dei suoi punti di discontinuità al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\log x}{x^2-1}\right) & x \neq 1 \\ a & x = 1. \end{cases}$$

Soluzione. Il dominio della funzione è dato dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \cup \{1\}.$$

cioè $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$. Se $x \neq 1$, la funzione è continua perché è composizione di funzioni continue. Indaghiamo la continuità in $x = 1$ calcolando il limite di f in 1:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{\log x}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{y\to 0} \sin\left(\frac{\ln(y+1)}{y(y+2)}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

Poiché $f(1) = a$, allora abbiamo che:

- se $a = \sin(\frac{1}{2})$ la funzione è continua in $x = 1$;
- se $a \neq \sin(\frac{1}{2})$ la funzione non è continua in $x = 1$ e il punto è una discontinuità eliminabile.

□

4.2.1 Esercizi

Esercizio 4.2.3. Studiare la continuità delle seguenti funzioni, classificandone gli eventuali punti di discontinuità.

1.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x^2 - 2x & x > 0. \end{cases}$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ \ln x & x \geq 1. \end{cases}$$

3.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{3x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0. \end{cases}$$

4.3 Asintoti

Il calcolo dei limiti ci aiuta a capire alcune proprietà geometriche del grafico delle funzioni.

- Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = \ell$ è un *asintoto orizzontale* per f;
- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, allora la retta $x = x_0$ è un *asintoto verticale* per f;
- Se esistono $m, q \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx-q] = 0$, allora la retta $y = mx+q$ è un *asintoto obliquo* per f.

Se una retta è un asintoto orizzonatale o obliquo per il grafico di una funzione, questo ci si avvicina sempre più al tendere di x a ∞. Se una retta $x = x_0$ è un asintoto verticale per il grafico di f, allora questo ci si avvicina sempre più al tendere di x a x_0, idealmente incontrandolo solo quando $y = \infty$.

Esempio 4.3.1. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ha un asintoto verticale in $x_0 = 0$ e un asintoto orizzontale $y = 0$. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Esercizio 4.3.2. Dimostra che la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ha un asintoto obliquo e determinane l'equazione.

Soluzione. Concentriamoci sul comportamento di f a $+\infty$. Innanzitutto, verifichiamo che non esistano asintoti orizzontali calcolando $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Per verificare che esista un asintoto obliquo, proviamo a calcolarne il coefficiente angolare tramite

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1;$$

calcoliamone ora il termine noto q tramite

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1.$$

Concludiamo che f possiede un asintoto obliquo a $+\infty$, la cui equazione è $y = mx + q = x + 1$.

Verifica che la stessa retta è un asintoto obliquo a $-\infty$. □

4.3.1 Esercizi

Esercizio 4.3.3. Tracciare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni, calcolandone gli eventuali asintoti.

1. $f(x) = \frac{2x^2-1}{x-3}$.
2. $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x}}$.
3. $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$.
4. $f(x) = \frac{9x^2-4}{3x-1}$.
5. $f(x) = \frac{x+2}{|x|-2}$.
6. $f(x) = \frac{3-2\ln x}{\ln x-1}$.

Capitolo 5

Teorema degli zeri

5.1 Zeri di una funzione

Quando si studia il grafico di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è interessante conoscere i punti $x \in \mathbb{R}$ in cui tale grafico interseca l'asse x. Tali punti si chiamano *zeri* della funzione e hanno la proprietà che $f(x) = 0$.

In molti casi è facile trovare gli zeri di una funzione, come ad esempio nel seguente esercizio:

Esercizio 5.1.1. Calcolare gli zeri della funzione $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{3x}$.

Dimostrazione. I numeri reali tali che $f(x) = 0$ sono tali che $x^2 - 3x + 1 = 0$, cioè sono

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

□

In altri casi, invece, questo è più complesso o, addirittura, impossibile da ottenere analiticamente, come nel caso della funzione $f(x) = \log x + x$. In questi casi, può essere comunque utile sapere se uno zero esiste, e in quale intervallo si trova. Nei casi più facili può venire in aiuto una rappresentazione grafica (ad esempio, per sapere se $f(x) = \log x + x$ ammette uno zero, ci si possono disegnare i grafici di $y = \log x$ e $y = -x$ e vedere se si intersecano), ma nei casi più difficili non sempre si può ottenere un risultato accurato e affidabile.

5.1.1 Esercizi

Esercizio 5.1.2. Calcolare gli zeri delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x$
2. $f(x) = \log(x-3) - 1$

3. $f(x) = 3^{x+1} + 2$

4. $f(x) = \frac{2\sin x - 1}{\sqrt{x}}$

Esercizio 5.1.3. Provare ad intuire se le seguenti funzioni hanno degli zeri:

1. $f(x) = \log|x| - x$

2. $f(x) = |\log x| - x$

3. $f(x) = 3^x + 4x$

4. $f(x) = \sqrt{x-3} + \log x$

5.2 Teorema degli zeri

Se la funzione f in esame ha delle buone proprietà, per dimostrare che ha uno zero, ci può venire in aiuto il teorema degli zeri:

Teorema 5.2.1 (degli zeri)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $x \in (a,b)$ tale che $f(x) = 0$.*

Possiamo dare una seconda versione del teorema degli zeri:

Teorema 5.2.2 (degli zeri - versione 2)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $(\lim_{x\to a^+} f(x))(\lim_{x\to b^-} f(x)) < 0$, allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$.*

Risolviamo i seguenti esercizi.

Esercizio 5.2.3. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^5 - x^3 + 4$ ha almeno uno zero nell'intervallo $(-2, 2)$.

Soluzione. La funzione data è ovviamente continua perché somma di funzioni continue. Calcoliamo $f(-2)$ e $f(2)$:

$$f(-2) = -32 + 8 + 4 < 0$$
$$f(2) = 32 - 8 + 4 > 0;$$

poiché sono di segno opposto, allora f ammette almeno uno zero nell'intervallo dato. □

Esercizio 5.2.4. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione della seguente equazione nell'intervallo $(2, +\infty)$:

$$1 - 2^{-x} = \frac{a}{x}.$$

Soluzione. Definiamo la seguente funzione:

$$f(x) = 1 - 2^{-x} - \frac{a}{x}.$$

Trovare una soluzione dell'equazione data equivale a trovare uno zero della funzione f. Poiché f è una somma di funzioni continue, allora è continua. Calcolando il valore di f in 2, si ottiene

$$f(2) = 1 - 2^{-2} - \frac{a}{2} = \frac{3}{4} - \frac{a}{2}.$$

Si vede che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1;$$

se $f(2)$ fosse di segno opposto, e quindi negativo, per il teorema degli zeri potremmo concludere che f ha uno zero in $(2, +\infty)$; imponendo $f(2) < 0$ otteniamo i valori di a per cui f ha sicuramente uno zero:

$$\frac{3}{4} - \frac{a}{2} < 0 \iff a > \frac{3}{2}.$$

Si faccia attenzione che il teorema degli zeri dà solo una condizione sufficiente per l'esistenza dello zero: quindi, non viene da sé che per $a \leq \frac{3}{2}$ non esistano zeri in $(2, +\infty)$ (bisogna dimostrarlo a parte).

In questo caso, basta dimostrare che per $a \leq \frac{3}{2}$ la funzione è monotona decrescente in $(2, +\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, quindi la f non può mai ammettere valori inferiori a 1 in quest'intervallo e in particolare non potrà mai assumere valore 0. □

5.2.1 Esercizi

Esercizio 5.2.5. Dire se le seguenti funzioni ammettono uno zero nell'intervallo assegnato:

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad I = (0, 2);$
2. $f(x) = \log(x + 1) - 4^x, \quad I = (0, +\infty);$
3. $f(x) = 1 - x - \ln x, \quad I = (1, 2).$

Capitolo 6

Derivate

6.1 Definizione

Definizione 6.1.1. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *derivabile* in un punto $x_0 \in A$ se esiste *finito* il limite seguente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{6.1}$$

In tal caso tale limite viene chiamiato *derivata* di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Geometricamente, la quantità

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

chiamata *rapporto incrementale*, rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, dunque intuitivamente $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in $(x_0, f(x_0))$.

Esercizio 6.1.2.

1. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è derivabile in $x_0 = 3$ e la sua derivata in tale punto vale 6.

2. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è derivabile per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e la sua derivata è $f'(x_0) = 2x_0$.

Soluzione.

1. Dobbiamo dimostrare che il seguente limite esiste ed è finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h};$$

abbiamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6 + h)}{h} = 6.$$

Ne segue che $f'(3)$ è proprio tale limite, cioè 6.

2. Per ogni x_0, dobbiamo verificare che esiste finito il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}.$$

Abbiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0,$$

dunque la derivata di f è proprio $f'(x_0) = 2x_0$.

□

Dall'esercizio precedente si vede che ad ogni funzione derivabile f possiamo associare un'altra funzione, chiamata derivata di f e indicata con f', tale che ad ogni x punto di derivabilità associa $f'(x)$.

6.2 Derivabilità e calcolo di derivate

Naturalmente per capire se una funzione è derivabile in un certo insieme non dobbiamo calcolare il limite (6.1) in ogni punto dell'insieme, ma ci vengono in aiuto delle proprietà analoghe a quelle che abbiamo per la continuità:

Proposizione 6.2.1. *1. Le seguenti funzioni sono derivabili in ogni punto del loro dominio:*

$$c,\ x^n\ (n\in\mathbb{N}),\ a^x\ (a>0, a\neq 1),\ \log_a x\ (a>0, a\neq 1),\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \arctan x.$$

2. Se f, g sono derivabili in x_0, allora le seguenti funzioni sono derivabili in x_0:

$$cf, \quad f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}.$$

3. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g\circ f$ è derivabile in x_0.

Esempio 6.2.2. La seguente funzione è derivabile in ogni punto del proprio dominio perché è un rapporto di funzioni che sono somma e composizione di funzioni derivabili:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + \arctan(x-1)}{\log(e^x + \sin x)}.$$

Come fare a calcolare in pratica la derivata di una funzione? Basta conoscere le seguenti tre cose:

- Le derivate delle funzioni elementari: si trovano tabelle più o meno complete su ogni libro; si veda ad esempio quella sul libro di Bertsch a pagina 191.
- I teoremi di derivazione delle operazioni tra funzioni:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
2. $(cf)' = cf'$;
3. $(fg)' = f'g + fg'$;
4. $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

- Il teorema di derivazione della funzione composta: $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Esercizio 6.2.3. Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$h(x) = \frac{\sin e^x}{\ln(x - \tan x^2)}.$$

Soluzione. Si tratta della derivata di un rapporto: $h = f/g$ con

$$f(x) = \sin(e^x), \qquad g(x) = \ln(x - \tan(x^2)).$$

Seguendo la regola di derivazione del rapporto, dobbiamo calcolare f' e g': per quanto riguarda f', abbiamo che f è composizione di $f_1 = \sin x$ e $f_2 = e^x$, perciò la sua derivata è:

$$f'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x,$$

perché la derivata di $\sin x$ è $\cos x$.
Lo stesso discorso vale per la derivata di g:

$$g'(x) = g_1(g_2(x)) \cdot g_2'(x) = \frac{1}{x - \tan x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2x\right).$$

Assembliamo i pezzi per il calcolo di $(f/g)'$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{e^x \cos(e^x) \ln(x - \tan x^2) - \sin(e^x) \frac{\cos^2(x^2) - 2x}{\cos^2 x^2 - \sin(x^2)\cos(x^2)}}{\ln^2(x - \tan(x^2))}.$$

□

Nota: per imparare a calcolare le derivate, serve fare tanti esercizi!

6.2.1 Esercizi

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $\frac{x^2-1}{x(x+2)}$
2. x^x (suggerimento: ricorda che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$)
3. $\sin x \arccos x$
4. $\arcsin(x - \sin x)$
5. $2x\sqrt{1 + x^2}$

6.3 Non derivabilità

Se il limite (6.1) non esiste, allora la funzione non è derivabile in x_0 e x_0 si dice *punto di non derivabilità*. A seconda dei casi, questo limite si classifica come:

punto a tangente verticale se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$;

cuspide se i limiti destro e sinistro sono entrambi infiniti, ma di segno opposto;

punto angoloso se almeno uno dei limiti destro e sinistro è finito[1].

Esempio 6.3.1.

1. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nel punto $x_0 = 0$ ha un punto a tangente verticale perché $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$ e
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty.$$
2. La funzione $f(x) = |x-2|$ nel punto $x_0 = 2$ ha un punto angoloso perché la derivata di f è
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 2 \\ -1 & x < 2 \end{cases}$$
e i limiti destro e sinistro di f' in 2 sono ovviamente 1 e 1, per cui diversi.

Esempio 6.3.2. Ecco alcuni esempi di funzioni elementari non derivabili in qualche punto del loro dominio (verificalo!):

- $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 0$;
- $f(x) = \arcsin x$ in $x = \pm 1$;
- $f(x) = \arccos x$ in $x = \pm 1$.

6.3.1 Esercizi

Esercizio 6.3.3. Studia la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni nel punto indicato:

1. $f(x) = \sqrt{4-|x|+3x}, \qquad x = 0$
2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-2 & x < 1 \\ x^2-x-1 & x \geq 1 \end{cases}, \qquad x = 1$
3. $f(x) = \left|x^2-1\right|, \qquad x = 1$ e $x = -1$
4. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \\ x^2-2x+1 & x \geq 0 \end{cases}, \qquad x = 0$
5. $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}, \qquad x = 3$

[1] Naturalmente, nel caso in cui i due limiti siano entrambi finiti, essi devono essere diversi altrimenti la funzione sarebbe derivabile.

Capitolo 7

Ricerca di massimi e minimi

7.1 Punti stazionari, zone di monotonia

Ricordiamo la definizione di punto di estremo locale di una funzione:

Definizione 7.1.1. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$ un punto del dominio.

- x_0 si dice *punto di minimo locale* di f se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in U$ e $f(x_0)$ si chiama *minimo locale di* f;
- x_0 si dice *punto di massimo locale* di f se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in U$ e $f(x_0)$ si chiama *massimo locale di* f.

Lo studio della derivata di una funzione f può essere di aiuto per l'individuazione di punti di massimo e minimo di f. Infatti, vale la seguente proposizione:

Proposizione 7.1.2. *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione reale e $x_0 \in A$ un punto di estremo locale. Allora ci sono tre possibilità:*

1. *x_0 è un punto stazionario per f interno a A, cioè f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$;*
2. *x_0 è un estremo di A;*
3. *x_0 è un punto di non derivabilità di f.*

Esempio 7.1.3.

1. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$: sappiamo che tale funzione ha un minimo in $x_0 = 0$; infatti, calcolandone la derivata $f'(x) = 2x$, si vede che ha un punto stazionario in $x_0 = 0$.
2. Consideriamo la funzione $f\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$ di legge $f(x) = 2x - 1$; sappiamo che, essendo una funzione lineare, è strettamente monotona, in questo caso crescente. Concludiamo che ha un minimo in $x_0 = 1$ e un massimo in $x_0 = 3$.
3. Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$. Sappiamo che ha un minimo in $x_0 = 0$ e si vede che tale punto è un punto di non derivabilità di f.

Osservazione 7.1.4. Attenzione: non è detto che se la funzione ha un punto stazionario x_0, allora in quel punto ha un estremo locale: basta pensare alla funzione $f(x) = x^3$.

Grazie alla proposizione precedente, abbiamo una ricetta per individuare i punti di massimo e minimo di una funzione. Come facciamo a capire se un punto stazionario è davvero un punto di massimo/minimo o è solo un punto stazionario? Ci viene in aiuto il segno della derivata prima:

Teorema 7.1.5. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, derivabile in (a,b). Allora*

- $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$ $\iff$ f *è debolmente crescente in* (a,b)
- $f'(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$ $\iff$ f *è debolmente decrescente in* (a,b)
- $f'(x) > 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$ $\implies$ f *è strettamente crescente in* (a,b)
- $f'(x) < 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$ $\implies$ f *è strettamente decrescente in* (a,b)

Osservazione 7.1.6. Negli ultimi due casi la freccia vale solo in un verso; i pensi ad esempio alla funzione $f(x) = x^3$: è strettamente crescente, ma $f'(x) \geq 0$.

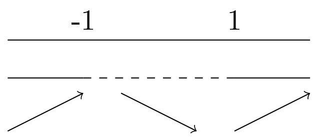
Esercizio 7.1.7. Determinare i massimi e i minimi locali della funzione $f(x) = x^3 - 3x$. Sono anche estremi assoluti?

Soluzione. La funzione è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, dunque i suoi punti di estremo locale saranno tutti punti stazionari. Calcolando la derivata, si ottiene $f'(x) = 3x^2 - 3$. I punti stazionari sono le soluzioni di $f'(x) = 0$, cioè

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff 3x^2 - 3 > 0 \iff x < -1 \vee x > 1,$$



da cui concludiamo che $x = -1$ è punto di massimo locale e il massimo vale $f(-1) = -1 + 3 = 2$, mentre $x = 1$ è punto di minimo locale e il minimo vale $f(1) = -2$. Nessuno dei due estremi è assoluto perché la funzione non è limitata:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

$\square$

Esercizio 7.1.8. Determinare i massimi e i minimi locali della funzione $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$. Sono anche estremi assoluti?

Soluzione. La funzione si riscrive come

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & -1 < x < 1. \end{cases}$$

La funzione è derivabile in tutto il suo dominio ad eccezione di $x = \pm 1$, dunque questi punti sono due candidati ad essere estremi locali. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \vee x > 1 \\ -2x & -1 < x < 1. \end{cases}$$

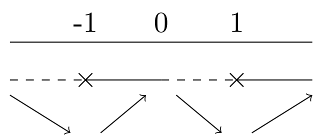
Calcoliamone i punti stazionari:

- se $x < -1 \vee x > 1$, la derivata ha espressione $2x$, dunque
$$f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0,$$
ma tale punto, poiché non appartiene a $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, non va considerato;
- se $-1 < x < 1$, la derivata ha espressione $-2x$, dunque
$$f'(x) = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0,$$
e poiché appartiene a $(-1, 1)$, allora deve essere considerato.

Quindi, oltre a ± 1, anche $x = 0$ è un candidato punto di estremo locale. Studiamo il segno della derivata:

- se $x < -1 \vee x > 1$, la derivata ha espressione $2x$, dunque
$$f'(x) > 0 \iff 2x > 0 \iff x > 0 \iff x > 1,$$
perché bisogna intersecarlo col dominio.
- se $-1 < x < 1$, la derivata ha espressione $-2x$, dunque
$$f'(x) > 0 \iff -2x > 0 \iff x < 0 \iff -1 < x < 0,$$
sempre perché bisogna intersecarlo col dominio.

Il grafico dello studio del segno è



□

Dal grafico precedente si vede che $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di minimo locale con minimo $f(-1) = f(1) = 0$, mentre $x = 0$ è un punto di massimo locale, con massimo $f(0) = 1$. I minimi locali sono anche i minimi assoluti, visto che $f(x) \geq 0$ per ogni x e in ± 1 vale proprio 0. Invece il massimo locale non è assoluto perché $\sup f = +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

7.2 Esercizi

Esercizio 7.2.1. Trova gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti e decrescenti:

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$
2. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$
3. $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-3x+2}$

Esercizio 7.2.2. Trova per quali valori di a la funzione $y = a \ln x + 1$ è sempre crescente nel suo dominio.

Esercizio 7.2.3. Trova i punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni, distinguendo i punti stazionari da quelli angolosi.

1. $f(x) = \left|x^2 - 4x\right|$
2. $f(x) = \frac{1+\cos x}{1+\sin x}$ in $[0, 2\pi]$.
3. $f(x) = \left|x^2 - x\right| + 3$
4. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ x^4 - 4x + 1 & x > 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$

Esercizio 7.2.4. Studiare l'invertibilità della seguente funzione al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^x + \arctan x & x < 0 \\ \frac{x}{\alpha(x+1)} - \alpha & x \geq 0. \end{cases}$$

(Suggerimento: ricorda che una condizione sufficiente affinché una funzione sia invertibile è che sia monotona.)

Capitolo 8

Studio di funzione

8.1 Convessità e concavità

La derivata seconda di una funzione (cioè la derivata della derivata) dà altre informazioni sulle proprietà geometriche del grafico della funzione.

Ricordiamo la definizione di convessità e concavità:

Definizione 8.1.1. Sia I un intervallo. Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* (risp. *concava*) in I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ diversi, il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (risp. sopra) il grafico di f. In formule, deve valere

$$f(x) \leq \text{(risp. } \geq\text{)}\ f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

per ogni $x_1 < x_2$ e per ogni $x \in (x_1, x_2)$.

Vale il seguente teorema:

Teorema 8.1.2. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in (a, b). Allora:*

- $f'' \geq 0$ *in* (a, b) $\iff$ f *è convessa in* (a, b)*;*
- $f'' \leq 0$ *in* (a, b) $\iff$ f *è concava in* (a, b).

I punti in cui la funzione cambia convessità (cioè passa da essere concava a essere convessa o viceversa) hanno un nome particolare:

Definizione 8.1.3. Siano $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ e esista la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$. Il punto x_0 si dice *punto di flesso* se esiste un intorno destro di x_0 e un intorno sinistro di x_0 in cui le concavità sono diverse. Se il punto è a tangente verticale, allora x_0 si dice *flesso a tangente verticale*.

Se la funzione è due volte derivabile in un flesso, allora si intuisce che esso è un punto stazionario della derivata:

Teorema 8.1.4. *Sia* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in (a,b)$ *un punto di flesso per* f*. Se* f *è due volte derivabile in* x_0*, allora* $f''(x_0) = 0$*.*

Osservazione 8.1.5. Così come non è detto che un punto stazionario sia un punto di estremo locale, allo stesso modo non è affatto detto che un punto in cui la derivata seconda si annulla sia automaticamente un punto di flesso. Basta pensare a $f(x) = x^4$ e al punto $x_0 = 0$: vale che $f''(x_0) = 12x_0^2 = 0$, ma il punto è un punto di minimo. Per identificare i punti di flesso, si usa il teorema 8.1.2.

Esercizio 8.1.6. Studiare la concavità e la convessità della funzione $f(x) = x^3(x-1)^2$, determinandone gli eventuali punti di flesso.

Soluzione. La funzione è un polinomio, dunque è derivabile due volte. Calcolando la derivata seconda, si trova:

$$f''(x) = 2x(10x^2 - 12x + 3).$$

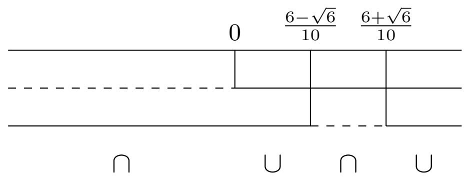
I candidati punti di flesso sono le soluzioni di $f''(x) = 0$:

$$2x(10x^2 - 12x + 3) = 0 \iff x = 0 \lor x = \frac{6 \pm \sqrt{36-30}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{10}.$$

Studiamo il segno della derivata seconda, cioè risolviamo $f''(x) > 0$: abbiamo $2x(10x^2 - 12x + 3) > 0$, da cui, studiando separatamente i fattori:

- $x > 0$;
- $10x^2 - 12x + 3 > 0 \iff x < \frac{6-\sqrt{6}}{10} \lor x > \frac{6+\sqrt{6}}{10}$.

Facciamo lo studio del segno:



Concludiamo che la funzione è convessa in $(0, \frac{6-\sqrt{6}}{10}) \cup (\frac{6+\sqrt{6}}{10}, +\infty)$, mentre è concava in $(-\infty, 0) \cup (\frac{6-\sqrt{6}}{10}, \frac{6+\sqrt{6}}{10})$. Concludiamo che i punti di flesso sono $x = 0, \frac{6\pm\sqrt{6}}{10}$. □

Esercizio 8.1.7. Studiare la concavità e la convessità della funzione $f(x) = 1+(|x|-1)^{\frac{1}{3}}$, determinandone gli eventuali punti di flesso.

Soluzione. La funzione è

$$f(x) = \begin{cases} 1 + (x-1)^{\frac{1}{3}} & x \geq 0 \\ 1 + (-x-1)^{\frac{1}{3}} & x < 0, \end{cases}$$

e si vede che è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$ (dimostralo!).

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} & x \geq 0 \\ \frac{1}{3(-x-1)^{\frac{2}{3}}} & x < 0. \end{cases}$$

È evidente che $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di non derivabilità: studiandoli separatamente, si vede che sono punti a tangente verticale (completa tu con i dettagli). Calcoliamo adesso la derivata seconda e studiamola:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{9(x-1)^{\frac{5}{3}}} & x \geq 0 \\ -\frac{2}{9(-x-1)^{\frac{5}{3}}} & x < 0. \end{cases}$$

Innanzitutto, si vede che non esistono punti in cui la derivata seconda si annulla. Attenzione: ciò non significa che non esistano flessi. Studiamo, infatti, il segno della derivata seconda: è facile verificare che $f''(x) > 0$ in $(-1, 0] \cup [0, 1) = (-1, 1)$, quindi in questo intervallo è convessa, mentre in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ è concava. Concludiamo che $x = 1$ e $x = -1$ sono flessi perché in corrispondenza di essi la funzione cambia convessità. □

8.1.1 Esercizi

Esercizio 8.1.8. Determina i punti di flesso delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$
2. $f(x) = xe^{-x}$
3. $f(x) = -x^4(x + 1)$
4. $f(x) = 2e^{-x^2} + 2$
5. $f(x) = \sin(2x)$

8.2 Studiare una funzione

Per lo studio del grafico di una funzione, si può seguire il seguente schema:

Dominio È un passo fondamentale, perché consente di individuare le porzioni di retta reale in cui bisogna cercare le proprietà della funzione e consente di evitare inutili studi nelle zone in cui la funzione non è definita.

Simmetrie Se la funzione è pari, allora il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y: si può quindi studiare la funzione solo su $x > 0$ e simmetrizzare tutte le proprietà in maniera opportuna; se la funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi: si può studiare il grafico per $x > 0$ e simmetrizzarne le proprietà di conseguenza.

Zeri Si tratta di individuare le intersezioni con l'asse x, e si trovano risolvendo l'equazione $f(x) = 0$.

Segno Si tratta di individuare per quali valori della variabile indipendente x la funzione si trova nel semipiano delle y positive, e si trovano risolvendo $f(x) > 0$.

Eventuali asintoti Gli asintoti orizzontali si trovano calcolando i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$; naturalmente, se il dominio della funzione è limitato (ad esempio è un intervallo (a, b) con a, b finiti), allora non ha senso calcolare tali limiti. Gli asintoti verticali si trovano calcolando i limiti $\lim_{x\to x_0} f(x)$, dove x_0 è un punto di frontiera del dominio (ad es. se il dominio è $(-1, 5) \cup (5, +\infty)$, gli estremi dove possono esserci asintoti verticali sono $x = -1$ e $x = 5$). Gli asintoti obliqui possono esistere se non esistono gli asintoti orizzontali: se $y = mx + q$ è un tale asintoto, allora $m = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$ e $q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$.

Studio della monotonia Basta studiare il segno della derivata prima $f'(x) > 0$.

Eventuali massimi e minimi Una volta calcolati i punti stazionari risolvendo $f'(x) = 0$ e deciso se tra di loro ci sono dei punti di massimo e minimo, si procede a individuare i punti di non derivabilità di f e verificare se tra questi e i punti di frontiera del dominio, nel caso in cui appartengano al dominio, sono massimi o minimi locali.

Studio della convessità Basta studiare il segno di $f''(x)$ per individuare gli intervalli in cui la funzione è convessa e conseguentemente i flessi.

È buona norma disegnare il grafico della funzione di pari passo con lo studio.

8.3 Esempi

Esercizio 8.3.1. Studiare le principali proprietà della seguente funzione e tracciarne il grafico:

$$f(x) = 2x + \frac{5}{x} - 4.$$

Soluzione. **Dominio** Poiché è presente una frazione (cioè $\frac{5}{x}$), bisogna porre il denominatore diverso da 0, quindi il dominio della funzione è $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Simmetrie Vediamo se f è pari o dispari:

$$f(-x) = -2x - \frac{5}{x} - 4,$$

che non è uguale né a $f(x)$ né a $-f(x)$, perciò la funzione non è né pari né dispari. Inoltre, non è periodica.

Zeri La funzione si riscrive come

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x},$$

dunque gli zeri sono le radici di $f(x) = 0$ e cioè

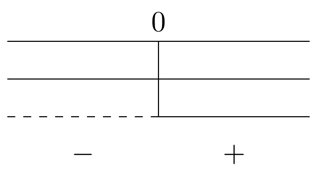
$$2x^2 - 4x + 5 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 10}}{2};$$

poiché l'equazione non ha soluzioni reali, la funzione non ha zeri.

Segno Per individuare le zone in cui la funzione ha segno positivo (e conseguentemente quelle in cui ha segno negativo), basta risolvere $f(x) > 0$, cioè

$$\frac{2x^2 - 4x + 5}{x} > 0 :$$

- Numeratore > 0: poiché il denominatore $2x^2 - 4x + 5$ non ha zeri (ed è continuo), allora o è sempre positivo o è sempre negativo; poiché, ad esempio, in 0 vale 5, che è positivo, allora concludiamo che è sempre positivo: $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Denominatore > 0: $x > 0$.



Asintoti Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \qquad \lim_{x\to 0+} f(x)$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{5}{0} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \frac{5}{0} = -\infty,$$

quindi concludiamo che la funzione ha un asintoto verticale: $x = 0$.

Inoltre,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

quindi la funzione non ha asintoti orizzontali; potrebbe, però, avere degli asintoti obliqui: calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x+5}{x^2} = 2,$$

si vede che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = mx + q$ a $+\infty$ con coefficiente angolare $m = 2$. Per calcolare q basta calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x+5-2x^2}{x} = -4.$$

Quindi f ha un asintoto obliquo di equazione $y = 2x - 4$ a $+\infty$. Si vede, ripetendo i calcoli per $-\infty$, che la stessa retta è un asintoto obliquo anche a $-\infty$.

Massimi e minimi Poiché la funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio, i punti di massimo e di minimo locale possono essere solo punti stazionari. Calcoliamo la derivata:

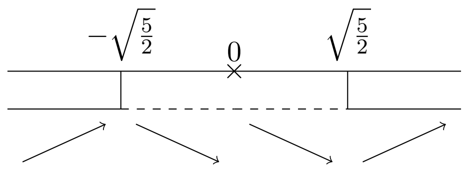
$$f'(x) = \frac{(4x-4)x-(2x^2-4x+5)}{x^2} = \frac{2x^2-5}{x^2}.$$

I punti stazionari sono le soluzioni di $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \iff 2x^2 - 5 = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Studiamone il segno:

- Numeratore > 0: $2x^2 - 5 > 0 \iff x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{5}{2}}$.
- Denominatore > 0: $x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



per cui $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ è un punto di massimo locale con massimo $f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = -2\sqrt{10}-4$, mentre $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ è un punto di minimo locale con minimo $f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = 2\sqrt{10} - 4$. Nessuno dei due è un estremo assoluto perché la funzione non è limitata.

Convessità La derivata seconda della funzione è

$$f''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2-5) \cdot 2x}{x^4} = \frac{10}{x^3}.$$

Studiandone il segno, si vede che

$$f''(x) > 0 \iff x > 0,$$

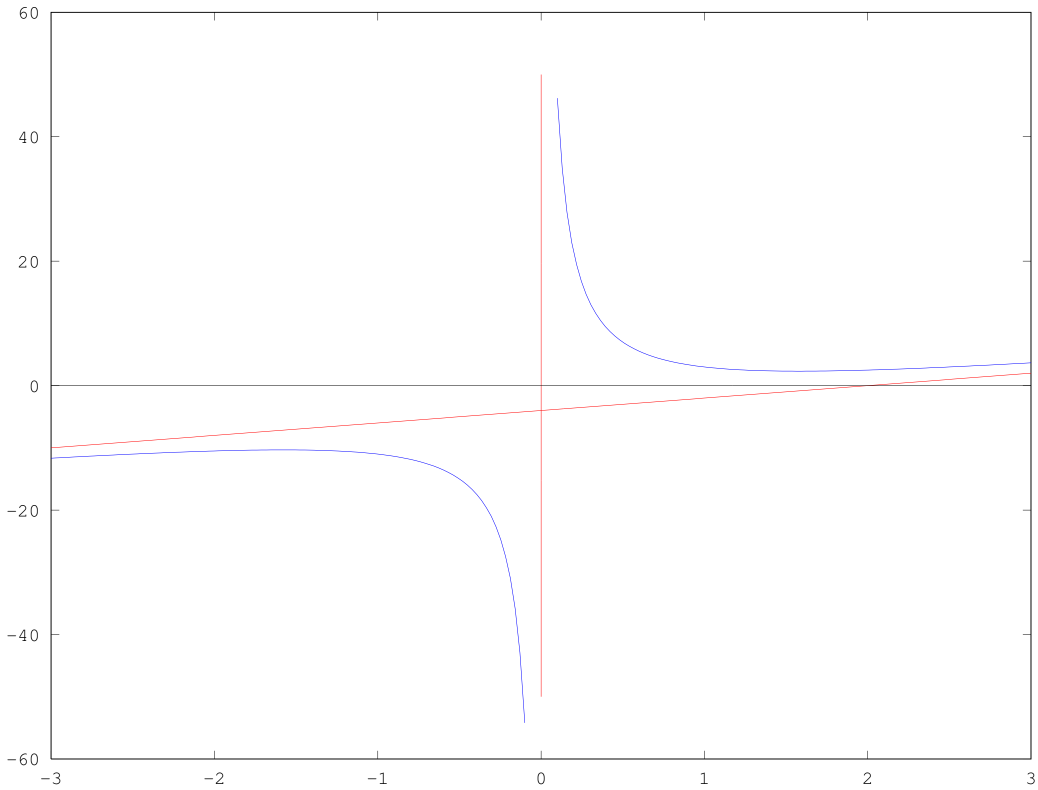


Figura 8.1: Grafico della funzione $f(x) = 2x + \frac{5}{x} - 4$.

dunque la funzione è convessa in $(0, +\infty)$, concava in $(-\infty, 0)$. Attenzione a non concludere che $x = 0$ sia un punto di flesso: la funzione non è definita in $x = 0$, quindi di certo non può essere un flesso.

$\square$

Esercizio 8.3.2. Studiare il grafico della funzione di legge $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$.

Soluzione. **Dominio** Poiché c'è una radice, dobbiamo escludere dal dominio i valori per cui il suo argomento è negativo: $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 \geq 0\} = [-3, 3]$.

Simmetrie Calcolando $f(-x)$,

$$f(-x) = -x\sqrt{9 - (-x)^2} = -x\sqrt{9 - x^2} = -f(x),$$

per cui la funzione è dispari.

Zeri Risolvendo

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm 3,$$

si vede che la funzione ha tre zeri.

Segno La radice è sempre positiva perché ha indice pari, quindi il segno è dato dal fattore x, dunque concludiamo che $f(x) > 0 \iff x > 0$.

Asintoti Non ha senso calcolare asintoti orizzontali perché la funzione ha un dominio limitato. Poiché nei punti di frontiera $x = \pm 3$ la funzione è definita e vale zero, non può neanche avere asintoti verticali.

Massimi e minimi Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \sqrt{9 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} = \frac{9 - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$$

e i punti stazionari:

$$f'(x) = 0 \iff 9 - 2x^2 = 0 \iff x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Poiché la derivata è continua in $(-3, 3)$, allora non esistono punti di non derivabilità e quindi gli estremi della funzione sono da ricercare tra i punti stazionari e i punti di frontiera del dominio $x = \pm 3$. Studiando il segno della derivata, abbiamo che

$$f'(x) > 0 \iff 9 - 2x^2 > 0 \iff -\frac{3}{\sqrt{2}} < x < \frac{3}{\sqrt{2}},$$

quindi la funzione cresce in $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ e decresce in $[-3, -\frac{3}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{3}{\sqrt{2}}, 3]$: concludiamo che $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ è un punto di minimo relativo (il minimo è $f(-\frac{3}{\sqrt{2}}) = -\frac{9}{2}$) e $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ un punto di massimo relativo (il massimo è $f(\frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{9}{2}$). Poiché nei punti di frontiera la funzione vale 0, concludiamo che il massimo e minimo relativo sono anche massimo e minimo assoluto.

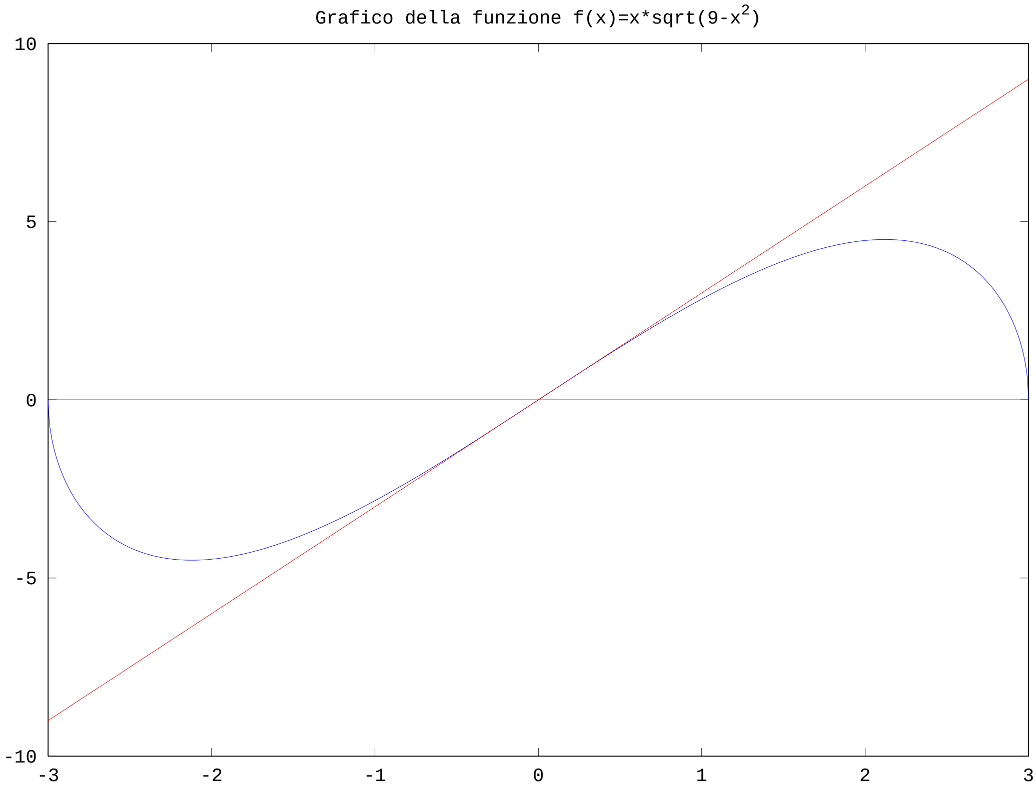


Figura 8.2: Grafico della funzione $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$.

Convessità Studiando la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{9-x^2} - (9-2x^2)\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{-4x(9-x^2)+x(9-x^2)}{(9-x^2)\sqrt{(9-x^2)}} = -\frac{3x}{\sqrt{9-x^2}},$$

si vede che questa è positiva se $x < 0$, cioè, ricordando che $\operatorname{dom} f = [-3, 3]$, nell'intervallo $(-3, 0)$ e negativa se $x > 0$, cioè nell'intervallo $(0, 3)$. Nel primo intervallo è convessa, nel secondo concava: il punto $x = 0$ è un punto di flesso. Calcoliamo l'equazione della retta tangente nel flesso: questa è

$$y - f(x_F) = m(x - x_F);$$

$(x_F, f(x_F))$ sono le coordinate del punto di flesso, mentre m è il coefficiente angolare della retta tangente. Abbiamo che $(x_F, f(x_F)) = (0, 0)$, mentre $m = f'(x_F) = f'(0) = \sqrt{9} = 3$, dunque la retta tangente nel flesso è

$$y = 3x.$$

□

8.3.1 Esercizi

Esercizio 8.3.3. Tracciare un grafico delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
2. $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$
3. $f(x) = x^3 e^x$
4. $f(x) = \ln(x) - x$
5. $f(x) = \frac{\sin x}{1-\sin x}$
6. $f(x) = 2x^2 \ln x$

Capitolo 9

Teorema di de l'Hôpital

9.1 Il teorema

Il teorema di de l'Hôpital riguarda i limiti di funzioni del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ e può semplificarne notevolmente il calcolo. Si faccia attenzione ad applicarlo correttamente, cioè si verifichi sempre che valgano le ipotesi del teorema.

Teorema 9.1.1. *Siano $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ e f, g derivabili in (a, b) escluso al più c; se*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0 \textit{ oppure } +\infty \textit{ oppure } -\infty,$$

$g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

allora

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Si risolvano i seguenti esercizi:

Esercizio 9.1.2. Mostra con un esempio che il teorema di de l'Hôpital non vale se le funzioni non sono entrambe infinitesime o entrambe infinite.

Esercizio 9.1.3. Mostra con un esempio che se il limite

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

non esiste, il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ può comunque esistere.

9.2 Esercizi

Esercizio 9.2.1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \ln x}{2x + 1} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3}.$$

Soluzione. Per quanto riguarda il primo limite, verifichiamo che si tratta di una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Poiché le funzioni f e g (cioè il numeratore e il denominatore) sono derivabili e la derivata di g è $g'(x) = 2$ (sempre diversa da zero), possiamo vedere se esiste il limite di f'/g':

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2} = \frac{3}{2};$$

poiché tale limite esiste, per il teorema di de l'Hôpital è uguale al limite originario.

Anche il secondo limite è una forma indeterminata: $\frac{0}{0}$. La derivata del denominatore è $g' = 6x^2$, che si annulla solo in 0, quindi l'ipotesi è soddisfatta. Proviamo a calcolare il limite del rapporto f'/g':

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2} = \frac{0}{0},$$

è una forma indeterminata a sua volta. Possiamo provare ad applicare nuovamente il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{12x} = -\frac{1}{12},$$

avendo usato il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Concludiamo che anche il limite di partenza è uguale a $-\frac{1}{12}$. □

Esercizio 9.2.2. Si calcolino i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\log(1+x) - x} \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{2}{x}} \ln x.$$

Soluzione. Il primo limite è una forma indeterminata e soddisfa le ipotesi del teorema di de l'Hôpital (verificalo!). Calcoliamo il limite delle derivate:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \sin x - e^x}{-\frac{x}{1+x}} = \frac{0}{0}.$$

Essendo ancora una volta davanti a una forma indeterminata, applichiamo nuovamente il teorema:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x - \cos x - e^x}{-\frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Concludiamo che il limite dato è uguale a 2.

Il secondo limite è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$, quindi sembrerebbe che non possiamo usare il teorema di de l'Hôpital. In realtà, ricordando che

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}},$$

vediamo che con questo trucco possiamo ricondurci a una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Nel nostro caso, abbiamo due possibilità:

$$\frac{\ln x}{\frac{1}{e^{-\frac{2}{x}}}} \quad \text{e} \quad \frac{e^{-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{\ln x}}.$$

Poiché la prima è uguale a $\frac{\ln x}{e^{\frac{2}{x}}}$, optiamo per questa perché ha un denominatore notevolmente più facile da derivare. Calcoliamo il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2e^{\frac{2}{x}}} = \frac{0}{\infty} = 0;$$

concludiamo che il limite in origine vale 0. □

9.2.1 Esercizi

Esercizio 9.2.3. Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x - 4x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$
4. $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(e^x - e)}{x-1}$
5. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+5x}{x^2-3x}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{e^x-2+e^{-x}}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{1-\cos x+x^2}$
8. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x+\sin x}{1+\cos^2 x}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\arctan x)-e^{x^2}+1}{\sqrt{1+2x^4}-1}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin[\ln(3x+1)]}{e^x-3^x}$
11. $\lim_{x\to 0^+} x^x$ (suggerimento: ricorda che $f^g = e^{g\ln f}$)
12. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Capitolo 10

Integrali

10.1 Definizione informale

Quando abbiamo studiato le derivate, con la scrittura

$$Df(x)$$

intendevamo la funzione derivata della funzione f. Quindi, ad esempio, $Dx^2 = 2x$. Con la scrittura

$$\int f(x)dx$$

intendiamo invece l'operazione inversa, cioè quella funzione la cui derivata è $f(x)$. Ad esempio

$$\int 2xdx = x^2.$$

Ci accorgiamo subito che mentre la derivata di una funzione è ancora una funzione univocamente determinata, il suo integrale non lo è: nell'esempio precedente, valgono anche

$$\int 2xdx = x^2 + 10 \quad \text{e} \quad \int 2xdx = x^2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{\ln(10)}$$

perché la derivata di $x^2 + 10$ è, così come la derivata di x^2, uguale a $2x$; in generale, quindi, l'integrale di una funzione, se esiste, è definito a meno di una costante. D'ora in poi scriveremo

$$\int 2xdx = x^2 + c,$$

dove con la c intendiamo una qualsiasi costante additiva.

10.2 Primitive e proprietà dell'integrale

Data una funzione $f(x)$, una sua primitiva è una funzione $F(x)$ tale che $DF(x) = f(x)$. Si vede quindi che

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

cioè tutte le primitive di una funzione f differiscono per una costante.

Non ci occuperemo in questa sede del problema di stabilire se una funzione è integrabile o meno, ma supporremo sempre che l'integrale esista e possa essere calcolato. A titolo di esempio, è comunque utile sapere che *se una funzione è continua, allora ammette una primitiva.*

Esercizio 10.2.1. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int x^3 dx, \quad \int 2\cos x dx, \quad \int \sin x dx, \quad \int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx.$$

Soluzione. Quando abbiamo un monomio x^α, la sua derivata è il monomio $\alpha x^{\alpha-1}$, che ha un grado inferiore di 1. Intuitivamente, l'integrale di un monomio x^α avrà un grado superiore di 1. Saremmo tentati di dire che

$$\int x^3 dx = x^4 + c,$$

ma a ben vedere questo non è corretto perché $Dx^4 = 4x^3$ e non x^3. Questo ci dà un'indicazione per l'individuazione della primitiva: se la derivata di x^4 è $4x^3$, allora la derivata di $\frac{1}{4}x^4$ sarà x^3. Ne segue che

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c.$$

Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

perché la derivata della funzione seno è la funzione coseno; inoltre, quando si deriva, in generale le costanti moltiplicative restano invariate: $Dkf(x) = kDf(x)$, perciò concludiamo che

$$\int 2\cos x dx = 2\sin x + c.$$

Per il calcolo di $\int \sin x dx$, ricordiamo che $D\cos x = -\sin x$, quindi la funzione la cui derivata è $\sin x$ è $\cos x$ con il segno meno davanti:

$$\int \sin x dx = -\cos x dx.$$

Per quanto riguarda l'ultimo integrale, osserviamo che $D\ln x = \frac{1}{x}$ e $D\frac{1}{2}x^2 = x$ e, grazie alla proprietà di linearità della derivata,

$$\int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx = \ln x + x + c.$$

□

Dall'esercizio precedente impariamo alcune proprietà importanti della derivata:

- $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$;
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

10.3 Primitive delle funzioni elementari

Dalle regole di derivazione delle funzioni elementari apprendiamo le seguenti regole di integrazione delle funzioni elementari:

$$\begin{aligned}
&\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 1\\
&\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c\\
&\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c \quad a \neq 1,\ a > 0\\
&\int \cos x dx = \sin x + c\\
&\int \sin x dx = -\cos x + c\\
&\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c\\
&\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 10.3.1. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - 7\cdot 7^x + \frac{1}{2+2x^2}\right)dx \qquad \int \frac{1-8\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$$

Soluzione. Per calcolare il primo integrale applichiamo le proprietà di linearità viste prima: esso, infatti, è uguale a

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx + 3\int \frac{1}{x^2}dx - 7\int 7^x dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx;$$

possiamo calcolare separatamente i quattro integrali che lo compongono:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} + c\\
&\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c\\
&\int 7^x dx = \frac{1}{\ln 7}7^x + c\\
&\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c.
\end{aligned}$$

Mettendo insieme i pezzi, otteniamo che l'integrale vale

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{x} - \frac{7}{\ln 7}7^x + \frac{1}{2}\arctan x + c.$$

Il secondo integrale può essere riscritto nel seguente modo (con un trucco che molte volte funziona):

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 8\frac{\cos^3 x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - 8 \int \cos x dx,$$

e ora è semplice da risolvere:

$$\tan x - 8\sin x + c.$$

□

10.4 Integrali la cui primitiva è una funzione composta

Consideriamo l'integrale

$$\int \cos x^2 dx.$$

Poiché una primitiva della funzione coseno è la funzione seno, saremmo tentati di usare le regole di integrazione delle funzioni elementari e scrivere che

$$\int \cos x^2 dx = \sin x^2 + c,$$

ma naturalmente questo non è vero: infatti la derivata della funzione $\sin(x^2)$ è $\cos(x^2)\cdot 2x$. Possiamo dire perciò che

$$\int 2x \cos x^2 dx = \sin x^2 + c;$$

apprendiamo che quando dobbiamo integrare il coseno di una funzione, possiamo usare la regola di integrazione del coseno, purché a moltiplicare ci sia la derivata della funzione interna:

$$\int \cos(g(x)) \cdot g'(x) dx = \sin(g(x)) + c.$$

In generale, per integrare una funzione composta $f(g(x))$ possiamo usare la regola d'integrazione delle funzione elementare f, a patto che a moltiplicare $f(g(x))$ ci sia la derivata della funzione più interna $g(x)$. In formule:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c.$$

Osservazione 10.4.1. In realtà l'integrale $\int \cos x^2 dx$ non può essere proprio calcolato: la sua primitiva non è esprimibile in termini di funzioni elementari.

Esercizio 10.4.2. Calcolare l'integrale

$$\int (\sin x)^4 \cos x dx.$$

Soluzione. In questo caso, la funzione esterna è $f = x^4$, mentre la funzione interna è $g = \sin x$. Poiché a moltiplicare c'è la derivata di $\sin x$, che è $\cos x$, allora possiamo integrare la funzione usando la regola di integrazione della potenza:

$$\int (\sin x)^4 \cos x dx = \frac{1}{5}(\sin x)^5 + c.$$

□

Esercizio 10.4.3. Calcolare gli integrali

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx, \quad \int 3x^2(x^3+3)^4 dx, \quad \int \frac{\ln^3 x}{x}dx, \quad \int \frac{\sin \ln x}{x}dx.$$

Soluzione. Per quanto riguarda il primo integrale, osserviamo che al numeratore abbiamo la derivata del denominatore; in questi casi, l'integrale è il logaritmo del denominatore:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \int 3x^2 \cdot \frac{1}{x^3+1}dx = \ln(x^3+1) + c;$$

in generale,

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln(g(x)) + c. \tag{10.1}$$

In questo caso, la funzione F è il logaritmo e la funzione interna è il denominatore.

Il secondo integrale è del tipo

$$\int (g(x))^\alpha \cdot g'(x) dx,$$

cioè abbiamo una potenza di $x^3 + 3$ e a moltiplicare la derivata di $x^3 + 3$. La primitiva è come quella dei monomi: $\frac{1}{\alpha+1}(g(x))^{\alpha+1}$, cioè

$$\frac{1}{5}(x^3+3)^5 + c.$$

Il terzo integrale può essere riscritto come

$$\int \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^3 dx.$$

Abbiamo dunque la potenza $(\ln x)^3$ e a moltiplicare la derivata della funzione interna $\ln x$: l'integrale è

$$\frac{1}{4}(\ln x)^4 + c.$$

Il quarto integrale può essere riscritto

$$\int \frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x) dx,$$

dove abbiamo il seno della funzione logaritmo e a moltiplicare la derivata del logaritmo. Concludiamo che le primitive sono

$$-\cos(\ln x) + c.$$

□

10.5 Integrazione per sostituzione

A volte può essere utile far un cambiamento di variabili nell'integrale affinché possa risolversi più facilmente. Partiamo dall'integrale

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$$

È scomodo avere una radice, quindi poniamo $\sqrt{x} = t$. Sostituendo, si ottiene:

$$\int \frac{1}{1+t} dx.$$

Non abbiamo finito: nell'integrale compaiono due diverse variabili: la t e la x; dobbiamo trasformare anche il differenziale dx. Per far questo, dal cambio di variabili

$$t = \sqrt{x}$$

ricaviamo la x

$$x = t^2$$

e deriviamo entrambi i membri:

$$dx = 2tdt.$$

Sostituendo nell'integrale,

$$\int \frac{2t}{1+t} dt.$$

Questo integrale è più semplice da risolvere: innanzitutto, portiamo fuori il 2 per linearità

$$2 \int \frac{t}{t+1} dt$$

e poi al numeratore aggiungiamo e sottraiamo 1 (anche questo è un trucco molto usato): in questo modo, riusciamo a dividere la frazione in due addendi semplici:

$$2 \int \frac{t}{t+1} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2t - 2\ln|t+1| + c.$$

Per completare, torniamo alla variabile x sostituendo $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + c.$$

Esercizio 10.5.1. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx.$$

Soluzione. Anche qui applichiamo la sostituzione $t = \sqrt{x}$. Calcolando il differenziale, otteniamo

$$x = t^2 \Longrightarrow dx = 2tdt,$$

perciò l'integrale diventa

$$\int \frac{2t}{t\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \arcsin t + c = 2 \arcsin \sqrt{x} + c.$$

□

Esercizio 10.5.2. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx.$$

Soluzione. Applichiamo la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \ln t$, cioè $dx = \frac{1}{t} dt$. L'integrale diventa

$$\int \frac{t}{t - \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{t^2 - 1} dt.$$

Moltiplichiamo e dividiamo per due, in modo da ricostruire al numeratore la derivata del denominatore (altro trucchetto utile):

$$\int \frac{t}{t^2-1} dt = \int \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 - 1 \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| e^{2x} - 1 \right| + c.$$

□

10.6 Integrazione per parti

Quando un'integrale si presenta come il prodotto di due funzioni, conviene verificare prima se si è nel caso in cui la primitiva è una funzione composta (sezione 10.4). Se non è così, forse può essere utile applicare la formula di integrazione per parti:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx,$$

dove F è una primitiva di f e g' è la derivata di g. Può darsi che in questo caso il nuovo integrale $\int Fg'dx$ sia più semplice da risolvere.

Esercizio 10.6.1. Calcolare

$$\int x^2 \ln x dx.$$

Soluzione. Consideriamo $f = x^2$ e $g = \ln x$ (di f dobbiamo saper trovare una primitiva, quindi in questo caso non potevamo fare la scelta opposta, visto che di $\ln x$ la primitiva non è "semplice"). In questo caso $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$, perciò

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx.$$

L'integrale a secondo membro è semplice da calcolare:

$$\int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{9}x^3 + c.$$

Concludiamo che

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.$$

□

Esercizio 10.6.2. Calcolare

$$\int \ln x dx.$$

Soluzione. In questo caso, almeno all'apparenza, abbiamo solo un fattore nell'integrale. In realtà possiamo considerare come se fossero due semplicemente vedendo

$$\ln x = 1 \cdot \ln x.$$

Naturalmente in questo caso $f = 1$ e $g = \ln x$, visto che sappiamo calcolare la primitiva solo di 1. Visto che $F(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, l'integrale diventa

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

□

10.7 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Una funzione razionale fratta è del tipo

$$\frac{P(x)}{S(x)}$$

dove P, S sono due polinomi di gradi rispettivamente m e n. Per calcolarne le primitive, un primo passo da fare è quello di effettuare la divisione tra polinomi *nel caso in cui il grado del numeratore sia maggiore o uguale al grado del denominatore*. In questo modo si riscrive la frazione come

$$Q(x) + \frac{R(x)}{S(x)},$$

dove Q è il quoziente della frazione, R è il resto e S è il divisore (nonché denominatore della funzione razionale fratta).

A questo punto, Q sarà un polinomio, che può essere integrato in maniera semplice, e resta da calcolare l'integrale di R/S.

Per il calcolo di $\int R/Sdx$, si ricorre alla *scomposizione in fratti semplici.* Nel seguito analizziamo i diversi casi che si possono incontrare; il punto di partenza è la fattorizzazione del polinomio $S(x)$.

10.7.1 Scomposizione in fratti semplici: caso di fattori lineari con molteplicità 1

Se $S(x)$ si fattorizza con fattori di grado 1, cioè S è del tipo

$$S(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n),$$

allora R/S si può riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{R(x)}{S(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \dots + \frac{N}{x - x_n},$$

dove $A, B, C, \dots, N$ sono dei numeri reali da determinare (vedremo nel seguito come farlo). Supponendo di averli trovati, l'integrale di R/S è uguale a

$$\int \frac{R(x)}{S(x)}dx = A\int \frac{1}{x - x_1}dx + \dots + N\int \frac{1}{x - x_n}dx = A\ln|x - x_1| + \dots + N\ln|x - x_n|.$$

10.7.2 Scomposizione in fratti semplici: caso di fattori lineari con molteplicità maggiore di 1

Se $S(x)$ ha un fattore con molteplicità $k > 1$, cioè

$$S(x) = (x - x_1)^k(x - x_2)\dots(x - x_\ell),$$

allora la scomposizione in fratti semplici è la seguente:

$$\frac{R(x)}{S(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} + \frac{B}{x - x_2} + \dots + \frac{L}{x - x_\ell},$$

cioè il fattore con molteplicità maggiore di uno compare k volte nella fattorizzazione, elevato alla potenza h, una volta per ogni h compreso tra 1 e k. Integrando, si trova

$$\int \frac{R(x)}{S(x)}dx = A_1\int \frac{1}{x - x_1}dx + \dots + A_k\int \frac{1}{(x - x_1)^k}dx + \dots + L\int \frac{1}{x - x_n}dx.$$

L'integrazione dei termini del tipo

$$\frac{A_h}{(x - x_1)^h}$$

è quella dell'integrazione delle potenze:

$$\int \frac{A_h}{(x - x_1)^h}dx = \frac{A_h}{-h + 1}\frac{1}{(x - x_1)^{h-1}},$$

mentre quella degli altri termini è come nel caso con molteplicità 1.

10.7.3 Scomposizione in fratti semplici: caso di fattori non lineari

Supponiamo che nella fattorizzazione di S compaia un fattore non lineare che non può essere ulteriormente scomposto. Ad esempio

$$S(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\ell)(x^2 + ax + b).$$

In questo caso la scomposizione in fratti semplici è

$$\frac{R(x)}{S(x)}dx = \frac{A}{x - x_1} + \dots + \frac{L}{x - x_\ell} + \frac{Mx + N}{x^2 + ax + b}.$$

L'integrazione dei primi ℓ termini è come nel caso dei fattori lineari semplici, mentre l'integrazione del termine

$$\frac{Mx + N}{x^2 + ax + b}$$

dipende da M e da N, ma comunque sarà la somma di un termine in logaritmo e uno in arcotangente (si veda l'esempio 10.7.2 più avanti).

10.7.4 Esempi

Esempio 10.7.1. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x+3}{x^3 - 4x}dx.$$

Soluzione. Il numeratore ha grado inferiore rispetto al denominatore, dunque non c'è da fare la divisione tra polinomi. Fattorizziamo il denominatore:

$$S(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

Tutti i fattori sono lineari e con molteplicità 1. La scomposizione in fratti semplici è

$$\frac{x+3}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Calcoliamo A, B e C; acciamo il minimo comune multiplo a secondo membro:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x(x-2)(x+2)} &= \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A}{x(x-2)(x+2)}. \end{aligned}$$

Affinché valga l'uguaglianza, i numeratori devono essere uguali: due polinomi sono uguali se hanno i coefficienti dello stesso grado uguali, pertanto deve essere

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 2B - 2C = 1 \\ -4A = +3. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A = -\frac{3}{4}$, $B = \frac{5}{8}$, $C = \frac{1}{8}$. L'integrale è, pertanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^3-4x}dx &= -\frac{3}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{5}{8}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+2}dx \\ &= -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{5}{8}\ln|x-2| + \frac{1}{8}\ln|x+2| + c.\end{aligned}$$

□

Esempio 10.7.2. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x+1}{x^2+4}dx.$$

Soluzione. Anche qui il numeratore ha grado inferiore al denominatore, dunque non dobbiamo fare alcuna divisione tra polinomi. Osserviamo subito che il denominatore $S(x) = x^2 + 4$ non può essere fattorizzato: $\Delta = -16 < 0$. Siamo nel caso di un fattore non lineare. Naturalmente, poiché questo è l'unico fattore di S, non c'è da fare alcuna scomposizione in fratti semplici: la frazione è già scomposta così com'è. Vediamo come risolvere un integrale del genere: innanzitutto, se a numeratore ci fosse la derivata del denominatore, potremmo usare la formula 10.1. Poiché tale derivata è $2x$, moltiplicando e dividendo per 2, possiamo ottenerla:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+4}dx.$$

Il primo integrale è sistemato:

$$\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \ln(x^2+4) + c.$$

Il secondo integrale si riconduce ad un'arcotangente. Ricordiamo che

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \arctan y + c,$$

mettiamo in evidenza il 4:

$$\int \frac{2}{4+x^2}dx = \int \frac{2}{4(1+\frac{x^2}{4})}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}dx.$$

Sostituiamo $t = \frac{x}{2}$, da cui $x = 2t$ e $dx = 2dt$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+t^2}dt = \arctan t + c = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

In definitiva,

$$\int \frac{x+1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

□

Esempio 10.7.3. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3} dx$$

Soluzione. Ancora una volta il numeratore ha grado minore del denominatore, quindi procediamo subito alla scomposizione in fratti semplici. Dobbiamo fattorizzare il denominatore $S(x)$: cerchiamo delle radici tra i divisori del termine noto, quindi tra ± 1 e ± 3. Si vede che

$$S(1) = 1 - 2 + 4 - 6 + 3 = 0,$$

quindi 1 è uno zero di S. Applicando la regola di Ruffini, si vede che

$$S(x) = (x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3).$$

Vediamo se riusciamo a fattorizzarlo ulteriormente: mettiamo in evidenza x^2 nei primi due monomi e 3 nei secondi due; si ottiene

$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = x^2(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(x^2+3),$$

da cui $S(x) = (x-1)^2(x^2+3)$. Tale polinomio non è ulteriormente scomponibile, visto che $x^2 + 3$ è di secondo grado con $\Delta = -12 < 0$.

Visto che è presente un fattore lineare con molteplicità 2 e un fattore non lineare, la scomposizione in fratti semplici è

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+3}.$$

Facciamo il minimo comune multiplo per calcolare A, B, C e D:

$$\begin{aligned}\frac{3x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2(x^2+3)} &= \frac{A(x-1)(x^2+3) + B(x^2+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+3)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (3A+C-2D)x - 3A + D}{(x-1)^2(x^2+3)},\end{aligned}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} A + C = 3 \\ -A + B - 2C + D = -5 \\ 3A + C - 2D = 3 \\ -3A + D = -2 \end{cases}$$

che, risolto, dà

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 2 \\ D = 1. \end{cases}$$

L'integrale è

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+3} dx.$$

Il primo dà, semplicemente, $\ln|x-1|+c$, il secondo dà $-(x-1)^{-1}$ e il terzo lo risolviamo come nell'esempio 10.7.2:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+3} dx = \int \frac{2x}{x^2+3} dx + \int \frac{1}{x^2+3} dx,$$

il primo è $\log(x^2+3)+c$, il secondo lo riconduciamo all'arcotangente mettendo in evidenza 3:

$$\int \frac{1}{x^2+3} dx = \int \frac{1}{3(1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3}}{1+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Concludiamo che l'integrale è

$$\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \log(x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

□

Esempio 10.7.4. Calcolare

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

Soluzione. Il polinomio al denominatore è irriducibile perché $\Delta = 1 - 4 < 0$. In questo caso, è comodo scrivere x^2+x+1 come una somma di quadrati: in generale, se x^2+ax+b è irriducibile, allora si può scrivere come $(x+m)^2+k$, con $m \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}^+$. Per calcolare m e k, basta usare il principio di uguaglianza dei polinomi:

$$x^2+x+1 = (x+m)^2+k \iff x^2+x+1 = x^2+2mx+m^2+k \iff \begin{cases} 2m = 1 \\ m^2+k = 1. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo che $m = \frac{1}{2}$ e $k = \frac{3}{4}$, perciò $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. A questo punto, l'integrale è diventato

$$\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2} dx$$

e lo risolviamo sostituendo

$$t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \iff x = \sqrt{\frac{3}{4}}t - \frac{1}{2} \iff dx = \sqrt{\frac{3}{4}}dt;$$

dunque:

$$\frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2}dx = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

$\square$

10.7.5 Esercizi

Esercizio 10.7.5. Dimostrare che

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c.$$

Esercizio 10.7.6. Dimostrare che

$$\int \frac{1}{(x+m)^2+k}dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\left(\frac{x+m}{\sqrt{k}}\right)+c.$$