Terzo Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

31 Maggio 2016

Soluzioni

Esercizio 1 Siano $u = 3 + i$ e $v = 2 - i$. Calcola il numero complesso

$$w = \frac{u^2}{v^3}$$

e il suo modulo $|w|$.

Soluzione. Calcoliamo prima u^2 e v^3:

$$u^2 = (3+i)^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$$
$$v^3 = (2-i)^3 = 2^3 + 3 \cdot (2)^2 \cdot (-i) + 3 \cdot 2 \cdot (-i)^2 + (-i)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i.$$

Il loro rapporto è

$$w = \frac{u^2}{v^3} = \frac{8+6i}{2-11i} = \frac{(8+6i)(2+11i)}{2^2+11^2} = \frac{-50+100i}{125} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i.$$

La norma di w è

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

□

Esercizio 2 Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}.$$

Soluzione. Mettiamo in evidenza $e^{\sin x}$ al numeratore:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} e^{\sin x} \cdot \frac{e^{x - \sin x} - 1}{x - \sin x}.$$

Chiaramente

$$\lim_{x \to 0} e^{\sin x} = e^0 = 1,$$

mentre

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x-\sin x} - 1}{x - \sin x} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

dunque il limite esiste e vale $1 \cdot 1 = 1$. □

Esercizio 3 Risolvere il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Operiamo la sostituzione $\sqrt{e^x - 1} = t$. Da qui otteniamo $e^x - 1 = t^2$, cioè $x = \ln(t^2 + 1)$. La relazione tra i differenziali è

$$\mathrm{d}x = \frac{2t}{t^2 + 1}\mathrm{d}t.$$

Gli estremi di integrazione si trasformano in $\sqrt{e - 1}$ e $\sqrt{e^2 - 1}$. Sostituendo,

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^2-1}} \frac{2t(t^2+1)^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^2-1}} 2t(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left.\frac{(t^2+1)^2}{2}\right|_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^2-1}} = \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

$\square$

Esercizio 4 Dire per quali valori del parametro reale α la seguente funzione è convessa per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha x} - (1 + \alpha)x^2.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che f_α ha dominio $\mathbb{R}$ ed è ivi derivabile due volte per ogni valore di α. Possiamo quindi calcolare f''_α:

$$f''_\alpha(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} - 2(1 + \alpha).$$

Vogliamo quindi trovare i valori di α per cui

$$\alpha^2 e^{\alpha x} - 2(1 + \alpha) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Vediamo prima il caso in cui $\alpha \neq 0$. La precedente si può riscrivere come[1]

$$e^{\alpha x} > \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha^2}.$$

Osserviamo che per i valori di α per cui il membro di destra è positivo, cioè se

$$\frac{2(\alpha+1)}{\alpha^2} > 0 \iff \alpha > -1,$$

la disequazione ha soluzione

$$\begin{cases} x > \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{2(\alpha+1)}{\alpha^2}\right) & \text{se } \alpha > 0 \\ x < \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{2(\alpha+1)}{\alpha^2}\right) & \text{se } -1 < \alpha < 0, \end{cases}$$

quindi in particolare la soluzione non è $\mathbb{R}$. Se invece $\alpha \leq -1$ abbiamo che il membro di destra è negativo e dunque la disequazione è banalmente verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ (la funzione esponenziale è sempre positiva, quindi sempre maggiore di un numero negativo).

Resta da discutere $\alpha = 0$. In questo caso la funzione è $f_0(x) = 1 - x^2$, che è concava per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque concludiamo che $f_\alpha(x)$ è convessa per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $\alpha \leq -1$. $\square$

[1] Si usa il fatto che $\alpha^2 > 0$ per ogni $\alpha \neq 0$.

Esercizio 5 Si studi il grafico della funzione di cui all'Esercizio 4, per $\alpha = 1$. In particolare, si indichi il numero di zeri, gli intervalli di positività, le regioni di crescenza e decrescenza, eventuali punti di flesso.
(Suggerimento: può essere utile ricordare che $e^2 \sim 7.39$ e $e^3 \sim 20$.)

Soluzione. La funzione da studiare è

$$f(x) = e^x - 2x^2.$$

Il dominio è $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. La funzione è continua e due volte derivabile su tutto $\mathbb{R}$ perché somma di funzioni due volte derivabili.

Gli zeri della funzione sono le soluzioni di $e^x - 2x^2 = 0$, che non si può risolvere esplicitamente. Osserviamo che $f(-1) = e^{-1} - 2 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - 2 > 0$, $f(2) = e^2 - 8 < 0$ e $f(3) = e^3 - 18 > 0$. Per il teorema degli zeri, quindi, esistono sicuramente tre zeri di f: il primo, che chiamiamo x_1, soddisfa $x_1 \in (-1, 0)$; il secondo, denotato con x_2, soddisfa $x_2 \in (1, 2)$ e il terzo, indicato con x_3, soddisfa $x_3 \in (2, 3)$.

Dimostriamo che sono gli unici. Per far ciò, studiamo dapprima la derivata prima di f. Questa è $f'(x) = e^x - 4x$, che ha due zeri $\bar{x}_1 \in (0, 1)$ e $\bar{x}_2 \in (2, 3)$: infatti $f'(0) = 1 > 0$, $f'(1) = e - 4 < 0$ e $f'(2) = e^2 - 8 < 0$, $f'(3) = e^3 - 12 > 0$. In realtà anche $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ sono gli unici zeri di f'. Se ci fosse un terzo zero, diciamo $\bar{x}_3 > \bar{x}_2$ (senza perdita di generalità), per il teorema di Rolle avremmo due punti stazionari di f': uno tra $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$ e uno tra $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$. Questo non è possibile perché i punti stazionari di f sono tutti e soli gli zeri della derivata seconda $f''(x) = e^x - 4$, che ha un solo zero (si può calcolare esplicitamente ed è $\tilde{x} = \ln(4)$). Quindi gli zeri di f' sono solo due. Facendo lo stesso ragionamento con f e f' concludiamo che f ha solo i tre zeri x_1, x_2 e x_3.

A questo punto è facile vedere che f è positiva se $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La funzione è crescente in $(-\infty, \bar{x}_1) \cup (\bar{x}_2, +\infty)$ e decrescente in $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, mentre è convessa in $(\ln 4, +\infty)$ e concava in $(-\infty, \ln 4)$.

Un grafico della funzione è in Fig. 1. $\square$

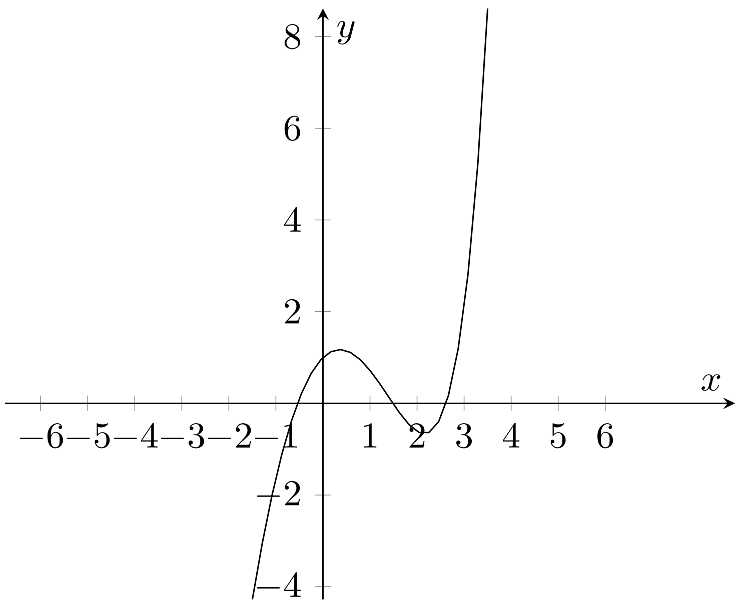

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = e^x - 2x^2$.