Quarto Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

5 Luglio 2016

Soluzioni

Esercizio 1 Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$z^2 = \frac{3}{4} - i.$$

Soluzione. Scrivendo $z = a + bi$, si ottiene l'equazione $a^2 - b^2 + 2abi = \frac{3}{4} - i$, da cui il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{3}{4} \\ 2ab = -1. \end{cases}$$

Usiamo la seconda equazione per trovare a:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{3}{4} \\ a = -\frac{1}{2b} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{4b^2} - b^2 = \frac{3}{4} \\ a = -\frac{1}{2b} \end{cases},$$

da cui, supponendo $b \neq 0$,

$$\begin{cases} b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \\ a = -\frac{1}{2b} \end{cases}.$$

Risolviamo la prima equazione per trovare valori di b: poniamo $b^2 = t$ e otteniamo $t^2 + 5t - 9 = 0$, da cui $t = -1, \frac{1}{4}$. Le soluzioni si trovano risolvendo $b^2 = -1$ e $b^2 = \frac{1}{4}$. La prima non ha soluzioni reali, mentre la seconda ha le due soluzioni $b = \pm\frac{1}{2}$. I valori corrispondenti di a sono

$$a = -\frac{1}{2b} = \mp 1.$$

Ne segue che i numeri complessi cercati sono

$$z_1 = -1 + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = 1 - \frac{1}{2}i.$$

□

Esercizio 2 Determinare tutti i punti di accumulazione per l'insieme

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soluzione. Sia $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$. Osserviamo preliminarmente che per valori pari di n vale $a_n = \frac{n}{n+1}$, mentre per valori dispari di n abbiamo $a_n = -\frac{n}{n+1}$. Ne segue che possiamo scrivere

$$A = A_1 \cup A_2 = \left\{ \frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ n \text{ pari} \right\} \cup \left\{ -\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ n \text{ dispari} \right\}.$$

Studiamo i due insiemi A_1 e A_2 separatamente: per quanto riguarda A_1, si vede che i suoi elementi sono crescenti; inoltre

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

quindi gli elementi di A_1 si avvicinano crescendo a 1. Mostriamo che 1 è punto di accumulazione: dobbiamo far vedere che ogni intorno di 1 contiene un elemento di A_1. In altre parole, per ogni $\epsilon > 0$ vogliamo trovare $\bar{n}$ tale che $1 - \epsilon < \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} < 1 + \epsilon$. La seconda disuguaglianza è sempre banalmente verificata, quindi risolviamo la prima:

$$1 - \epsilon < \frac{n}{n+1} \iff (1-\epsilon)(n+1) < n \iff n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}.$$

Abbiamo ottenuto che per ogni ϵ, non appena scegliamo $\bar{n} > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$, il valore $a_{\bar{n}}$ si trova nell'intorno di 1 di raggio ϵ, cioè 1 è di accumulazione per A_1 (e quindi per A). Inoltre 1 è l'unico punto di accumulazione per A_1 perché A_1 è fatto di punti isolati.

Con ragionamenti analoghi si può dimostrare che -1 è un punto di accumulazione per A_2, quindi concludiamo che gli unici punti di accumulazione per A sono -1 e 1. □

Esercizio 3 Si consideri la funzione dipendente dai parametri reali α, β, γ di legge

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \text{se } x \geq 0 \\ (\alpha x + \beta)e^{\gamma x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinare le triple (α, β, γ) per le quali f risulta continua e derivabile due volte in $x = 0$.

Dimostrazione. Affinché f sia continua in $x = 0$ deve valere che i limiti destro e sinistro in 0 devono essere uguali e coincidenti con il valore $f(0)$. Poiché

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \gamma \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \beta,$$

questo ci porta all'equazione $\beta = \gamma$.

Per la derivabilità in $x = 0$ dobbiamo imporre la stessa condizione, ma per le derivate destra e sinistra:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f'(x) &= \lim_{x \to 0^+} 3x^2 + 2\alpha x + \beta = \beta \\ \lim_{x \to 0^-} f'(x) &= \lim_{x \to 0^+} [\gamma(\alpha x + \beta)e^{\gamma x} + \alpha e^{\gamma x}] = \gamma\beta + \alpha, \end{aligned}$$

conducendoci all'equazione $\beta = \gamma\beta + \alpha$.

Analogamente per la derivata seconda:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f''(x) &= \lim_{x \to 0^+} 6x + 2\alpha = 2\alpha \\ \lim_{x \to 0^-} f''(x) &= \lim_{x \to 0^+} [\gamma^2(\alpha x + \beta)e^{\gamma x} + 2\alpha\gamma e^{\gamma x}] = \gamma^2\beta + 2\alpha\gamma, \end{aligned}$$

dandoci l'equazione $2\alpha = \gamma^2\beta + 2\alpha\gamma$.

In definitiva i valori di α, β, γ che soddisfano le richieste risolvono il sistema non lineare

$$\begin{cases} \beta = \gamma \\ \beta = \gamma\beta + \alpha \\ 2\alpha = \gamma^2\beta + 2\alpha\gamma. \end{cases}$$

Risolviamolo: sostituendo la prima nella seconda, si ottiene $\beta = \beta^2 + \alpha$; ricaviamo α e sostituiamo nella terza: $\alpha = \beta - \beta^2$, da cui

$$2(\beta - \beta^2) = \beta^3 + 2\beta(\beta - \beta^2) \iff \beta^3 - 4\beta^2 + 2\beta = 0.$$

Risolvendo, troviamo tre valori di β:

$$\beta^3 - 4\beta^2 + 2\beta = 0 \iff \beta(\beta^2 - 4\beta + 2) = 0 \iff \beta = 0 \vee \beta = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Sostituendo nelle altre equazioni, otteniamo tre possibili triple: $(0,0,0), (-4+3\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ e $(-4-3\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$. $\square$

Esercizio 4 Si consideri la funzione di legge

$$f(x) = \frac{(x^2-4)^2}{(x-1)^3}.$$

(a) Calcolarne il dominio, gli zeri, gli intervalli in cui è positiva, gli intervalli di monotonia, massimi e minimi relativi, eventuali asintoti. Se ne tracci un grafico qualitativo.

(b) Calcolare

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx.$$

Soluzione. 1. La funzione è razionale fratta, dunque il dominio è tutta la retta reale tranne i punti che annullano il denominatore, i quali risolvono

$$(x-1)^3 = 0 \iff x = 1,$$

pertanto $\operatorname{dom} f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Gli zeri di f come noto risolvono $f(x) = 0$, cioè $(x^2-4)^2 = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$. Per sapere dove f è positiva bisogna risolvere $f(x) > 0$, cioè

$$\frac{(x^2-4)^2}{(x-1)^3} > 0.$$

Notiamo che il numeratore è sempre non negativo visto che è un quadrato, pertanto il segno è dato semplicemente dal denominatore: $f(x) > 0 \iff (x-1)^3 > 0 \iff x > 1$. Quindi f è positiva in $(1,2) \cup (2, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$ (bisogna escludere gli zeri).

La funzione è sempre derivabile nel suo dominio perché rapporto di funzioni derivabili. Calcoliamone la derivata:

$$f'(x) = \frac{2(x^2-4)2x(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^2-4)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x^2-4)[4x(x-1) - 3(x^2-4)]}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(x^2-4)(x^2-4x+12)}{(x-1)^4}.$$

Studiandone il segno, si osserva che: $x^2 - 4x + 12 > 0$ per ogni x e lo stesso vale per il denominatore $(x-1)^4$ (in questo caso ad eccezione di $x = 1$, che però è escluso dal dominio). Ne segue che il segno è dato da $x^2 - 4$, dunque f è crescente in $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ e f è decrescente in $(-2, 1) \cup (1, 2)$. In particolare $x = \pm 2$ sono punti stazionari di f, con $x = -2$ punto di massimo relativo e $x = 2$ punto di minimo relativo. Sia il massimo che il minimo valgono 0.

Calcoliamo gli asintoti. È facile vedere che

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,$$

perciò $x = 1$ è asintoto verticale. Cerchiamo asintoti orizzontali o obliqui. Poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

allora non ammette asintoti orizzontali. Calcolando

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} = 1,$$

si vede che esiste un asintoto obliquo $y = mx+q$ con $m = 1$. Per calcolare q basta calcolare

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 - 11x^2 + x + 16}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 3.$$

Concludiamo che $y = x + 3$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$. In Fig.1 c'è un grafico della funzione.

2. Per calcolare quest'integrale conviene sviluppare le potenze:

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1},$$

e effettuare la divisione fra polinomi, visto che il numeratore ha grado maggiore del denominatore:

$$\frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = x + 3 - \frac{2x^2 + 8x - 19}{(x-1)^3}.$$

L'integrale, quindi, è:

$$\int f(x)\,dx = \int (x+3)\,dx - \int \frac{2x^2 + 8x - 19}{(x-1)^3}\,dx.$$

Il primo integrale è banale:

$$\int (x+3)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + c,$$

mentre il secondo richiede la risoluzione col metodo della scomposizione in fratti semplici; scriviamo

$$\frac{2x^2 + 8x - 19}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2 + (B - 2A)x + A - B + C}{(x-1)^3},$$

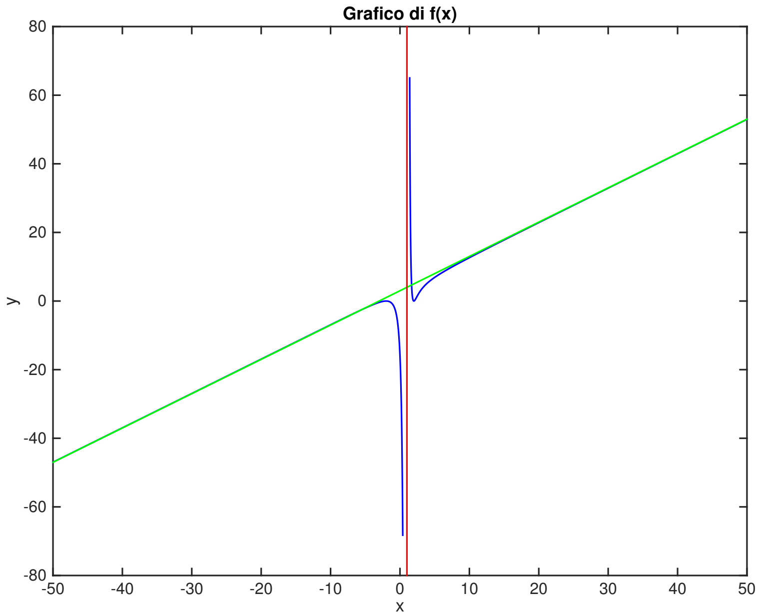

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{(x^2-4)^2}{(x-1)^3}$.

che conduce al sistema lineare

$$\begin{cases} A = 2 \\ B - 2A = 8 \\ A - B + C = -19 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = 12 \\ C = -9. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 8x - 19}{(x-1)^3}\,dx &= \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{12}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-9}{(x-1)^3}\,dx \\ &= 2\ln|x-1| - \frac{12}{(x-1)} + \frac{9}{2(x-1)^2} + c. \end{aligned}$$

Per concludere,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{0} f(x)\,dx &= \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\ln|x-1| + \frac{12}{x-1} - \frac{9}{(x-1)^2}\right)\Bigg|_{-2}^{0} \\ &= -12 - \frac{9}{2} - (2 - 6 - 2\ln 3 - 4 + \frac{1}{2}) = 2\ln 3 - 8. \end{aligned}$$

□