Quinto Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

2 Settembre 2016

Soluzioni

Esercizio 1 Calcolare il modulo del seguente numero complesso:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}-1\right)^2.$$

Soluzione. Svolgiamo i conti:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}-1\right)^2=\left(\frac{1+i-1+i}{1-i}\right)^2=\left(\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2=\left(\frac{2i-2}{2}\right)^2=(i-1)^2.$$

È noto che $|z^2|=|z|^2$, dunque

$$|(i-1)^2|=|i-1|^2=(\sqrt{1+1})^2=2.$$

□

Esercizio 2 Sia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione di legge

$$y=\arcsin\left(\frac{3x+1}{x}\right).$$

(i) Determinare il dominio $\mathscr{D}$ di f.

(ii) Dire se $\mathscr{D}$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Soluzione. (i) Affinché si possa calcolare l'arcoseno il suo argomento deve essere compreso tra -1 e 1. Pertanto dobbiamo imporre che

$$-1\le\frac{3x+1}{x}\le 1$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases}\frac{3x+1}{x}\le 1\\ \frac{3x+1}{x}\ge -1.\end{cases}$$

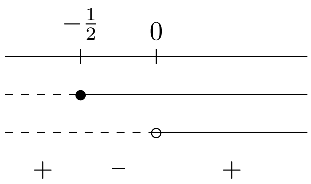
Risolviamo le due disequazioni. La prima:

$$\frac{3x+1}{x}\le 1 \iff \frac{2x+1}{x}\le 0.$$

Studiamo il segno della frazione:

numeratore $2x+1\ge 0 \iff x\ge -\frac{1}{2}$;

denominatore $x > 0$;



pertanto la frazione $\frac{2x+1}{x}$ è negativa in $[-\frac{1}{2}, 0)$. La seconda disequazione è

$$\frac{3x+1}{x} \geq -1 \iff \frac{4x+1}{x} \geq 0$$

e la sua soluzione è analoga a prima, solo che stavolta bisogna considerare l'insieme in cui è positiva: $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (0, +\infty)$. Mettendo le due soluzioni a sistema, si ottiene $\mathscr{D} = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$.

(ii) Il dominio $\mathscr{D}$ è un intervallo chiuso ed è noto che negli intervalli chiusi tutti e soli i punti che lo compongono sono di accumulazione.

□

Esercizio 3 Verificare, usando la definizione, che

$$\lim_{x \to 1} 4x + 1 = 5.$$

Dimostrazione. Per un limite della forma

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

dobbiamo verificare che comunque scegliamo $\epsilon > 0$ riusciamo a trovare δ tale che, se prendiamo $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Fissiamo dunque ϵ e cerchiamo un δ (il cui valore sarà funzione di ϵ) per cui $|4x + 1 - 5| < \epsilon$ se $0 < |x - 1| < \delta$:

$$|4x + 1 - 5| < \epsilon \iff -\epsilon < 4x - 4 < \epsilon \iff -\frac{\epsilon}{4} < x - 1 < \frac{\epsilon}{4} \iff |x - 1| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Quindi scegliendo $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ otteniamo quanto voluto. □

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \ln^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Soluzione. Integriamo per parti, con funzione da integrale $f(x) = 1$ e funzione da derivare $g(x) = \ln^2(x)$:

$$\int \ln^2(x) \, \mathrm{d}x = x \ln^2(x) - \int x \cdot \frac{2}{x} \ln(x) \, \mathrm{d}x = x \ln^2(x) - 2 \int \ln(x) \, \mathrm{d}x.$$

Risolviamo l'integrale $\int \ln(x) \, \mathrm{d}x$ per parti:

$$\int \ln(x) \, \mathrm{d}x = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x[\ln(x) - 1].$$

Concludiamo che
$$\int \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = x[\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2] + c.$$
$\square$

Esercizio 5 Si considerino le funzioni reali di variabile reale *seno iperbolico*, *coseno iperbolico* e *tangente iperbolica*, definite rispettivamente come segue:

$$y = \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad y = \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad y = \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(i) Calcolare $D[\sinh(x)], D[\cosh(x)], D[\tanh(x)]$.[1]

(ii) Studiare la funzione $y = \sinh(x)$, determinandone dominio, zeri, segno, monotonia, eventuali massimi e minimi, eventuali asintoti, eventuali flessi. Disegnarne un grafico qualitativo.

(iii) Dimostrare che $y = \sinh(x)$ è invertibile e calcolare la legge della funzione inversa.

(iv) Mostrare che $y = \cosh(x)$ non è invertibile.

Soluzione. (i) Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} D[\sinh(x)] &= D\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \\ D[\cosh(x)] &= D\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x) \\ D[\tanh(x)] &= D\left[\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right] = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x). \end{aligned}$$

(ii) La funzione si può riscrivere come segue:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

Il dominio è evidentemente $\mathbb{R}$, visto che il denominatore non si annulla mai. Calcoliamo gli zeri:
$$e^{2x} - 1 = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0,$$
pertanto ammette un unico zero, $x = 0$. Il segno è dato da

$$e^{2x} - 1 > 0 \iff x > 0,$$

dunque la funzione è positiva in $(0, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, 0)$. Calcoliamo i limiti a $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= -\infty. \end{aligned}$$

[1] Con D indichiamo l'operatore di derivata.

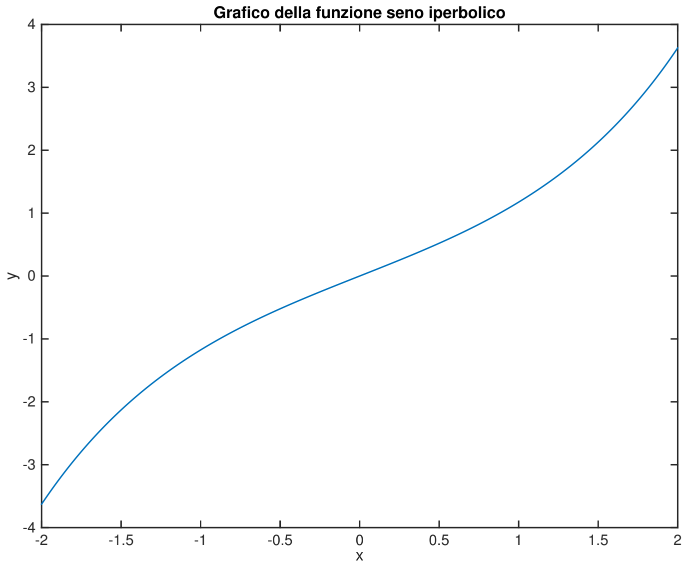


Figura 1: Grafico della funzione seno iperbolico.

Dal punto (i), la derivata di $\sinh(x)$ è $\cosh(x)$:

$$y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

che è una funzione sempre positiva perché somma di funzioni sempre positive. Ne segue che $\sinh(x)$ non ha punti stazionari ed è sempre crescente, quindi non ammette punti di massimo o minimo locale. La derivata seconda è ancora $\sinh(x)$, che abbiamo già visto avere uno zero, $x = 0$, ed essere positiva in $(0, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, 0)$. Ne segue che $\sinh(x)$ è convessa in $(0, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 0)$, e $x = 0$ è un punto di flesso. In Fig. 1 si trova un grafico qualitativo di $y = \sinh(x)$.

(iii) La funzione è strettamente monotona, quindi è invertibile. Calcoliamo la legge della funzione inversa:

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Poniamo $e^x = t$ e risolviamo l'equazione di secondo grado risultante:

$$t = y \pm \sqrt{y^2 + 4} \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 4}.$$

Prendiamo la soluzione con il segno + perché e^x è sempre positiva, dunque la legge di $\sinh^{-1}(x)$ è

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}).$$

(iv) La funzione $\cosh(x)$ non è invertibile perché è pari, cioè per ogni x vale $\cosh(x) = \cosh(-x)$.

$\square$