Primo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

4 Novembre 2015

Fila A

Esercizio 1 Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{|5-n|}{n+3} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Determinarne estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (se esistono).

(b) Dire, motivando la risposta, se A è infinito e/o è limitato.

(c) A contiene punti di accumulazione?

Soluzione. (a) Osserviamo preliminarmente che

$$|5-n| = \begin{cases} 5-n & \text{se } n \leq 5 \\ n-5 & \text{se } n > 5. \end{cases}$$

Pertanto l'insieme A si può scrivere come $A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \left\{ \frac{5-n}{n+3} \;\middle|\; n = 0, \ldots, 5 \right\}, \quad A_2 = \left\{ \frac{n-5}{n+3} \;\middle|\; n > 5 \right\}.$$

A_1 è un insieme finito composto da 6 elementi: $A_1 = \left\{ \frac{5}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, 0 \right\}$. Si osserva che tali elementi sono disposti in ordine decrescente, per cui $\max(A_1) = \frac{5}{3}$ e $\min(A_1) = 0$. Studiamo A_2.
Dimostriamo che gli elementi di A_2 sono disposti in ordine crescente: risolvendo $a_{n+1} \geq a_n$, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\frac{n+1-5}{n+1+3} \geq \frac{n-5}{n+3} \iff (n-4)(n+3) \geq (n-5)(n+4) \iff \\ &n^2 - n - 12 \geq n^2 - n - 20 \iff -12 \geq -20, \end{aligned}$$

che è risolta per ogni n e in particolare per ogni $n > 5$. Ne segue che A_2 ha un minimo e questo minimo è il suo primo elemento $a_6 = \frac{1}{9}$. Inoltre, osserviamo che

$$\frac{n-5}{n+3} = \frac{n+3-3-5}{n+3} = 1 - \frac{8}{n+3},$$

quindi gli elementi di A_2 si ottengono da 1 togliendo un numero sempre più piccolo. In particolare, abbiamo che

$$a_n \leq 1 \text{ per ogni } n > 5.$$

Riassumendo, abbiamo che gli elementi di A_2 sono tutti compresi tra $\frac{1}{9}$ e 1. Si osservi che

$$0 = \min(A_1) < \min(A_2) \leq a_n \leq 1 < \max(A_1) = \frac{5}{3}. \tag{1}$$

Ne segue che $\min(A) = \min(A_1) = 0$ e $\max(A) = \max(A_1) = \frac{5}{3}$.

(b) Da (1) abbiamo che A è limitato, perché tutti i suoi elementi sono compresi tra 0 e $\frac{5}{3}$. Inoltre, A è infinito perché A_2 (che è un suo sottoinsieme) è infinito. Infatti, gli elementi di A_2 sono disposti in ordine strettamente crescente e quindi sono in corrispondenza biunivoca con il sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ $\{n > 5\}$.

(c) A contiene un unico punto di accumulazione, che è 1. Per dimostrarlo, dobbiamo far vedere che (dalla definizione di punto di accumulazione)

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \bar{n} \text{ tale che } 1 - \epsilon < a_{\bar{n}} < 1 + \epsilon.$$

Fissato $\epsilon > 0$, dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{n-5}{n+3} < 1 + \epsilon \\ \dfrac{n-5}{n+3} > 1 - \epsilon. \end{cases}$$

e trovare come soluzione almeno un valore naturale di n. La prima disequazione è sempre soddisfatta perché $a_n < 1$ per ogni $n > 5$, quindi a maggior ragione vale $a_n < 1 + \epsilon$. Resta la seconda:

$$\frac{n-5}{n+3} > 1 - \epsilon \iff n - 5 > (1-\epsilon)(n+3) \iff n > \frac{3(1-\epsilon)}{\epsilon}.$$

Prendendo come $\bar{n}$ il primo intero maggiore di $3(1-\epsilon)/\epsilon$, otteniamo quello che volevamo. Quindi 1 è punto di accumulazione. Siccome $1 = a_1$, allora 1 appartiene anche a A.

□

Esercizio 2 Siano f, g e h funzioni di leggi

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \log_3(1+x).$$

(a) Determinare il dominio di $F := f \circ g \circ h$.

(b) Dimostrare che F è invertibile.

(c) Calcolare la legge di F^{-1}.

Soluzione. (a) La legge di F è

$$F(x) = 2^{\sqrt{\log_3(1+x)}}.$$

Il dominio è dato dal sistema

$$\begin{cases} \log_3(1+x) \geq 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x \geq 0$. Concludiamo che il dominio di F è $\mathscr{D} = [0, +\infty)$.

(b) Le tre funzioni f, g, h sono monotone, dunque lo è anche la loro composizione F. Poiché una funzione strettamente monotona è invertibile, ne segue che F è invertibile.

(c) Per ottenere la legge di F^{-1} invertiamo

$$
\begin{aligned}
&y = 2^{\sqrt{\log_3(1+x)}} \iff \sqrt{\log_3(1+x)} = \log_2(y) \iff \\
&\log_3(1+x) = (\log_2(y))^2 \iff x = 3^{(\log_2(y))^2} - 1.
\end{aligned}
$$

Ne segue che la legge di F^{-1} è

$$y = 3^{(\log_2(x))^2} - 1.$$

□

Esercizio 3 Considera la funzione di legge

$$f(x) = \frac{|x| - x}{2}$$

e sia $\mathscr{D}$ il suo dominio. Dire, motivando opportunamente la risposta:

(a) se f è continua in $\mathscr{D}$;

(b) se f è strettamente monotona in $\mathscr{D}$;

(c) se f è invertibile;

(d) qual è $\operatorname{Im} f$.

Soluzione. (a) La funzione si scrive esplicitamente come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ -x & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Il dominio di f è $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ricordiamo che una funzione è continua nel suo dominio se è continua in tutti i punti del suo dominio. Innanzitutto, la funzione è continua separatamente sui due intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$. Resta da controllare la continuità in $x_0 = 0$. Ricordiamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Calcoliamo ciascuna delle tre precedenti quantità:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0 \\
&\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0 \\
&f(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Ne consegue che f è continua anche in $x_0 = 0$ e dunque è continua su tutto $\mathbb{R}$.

(b) f non è strettamente monotona in $\mathscr{D}$ perché in $[0, +\infty)$ è costantemente 0.

(c) f non è invertibile perché la funzione non è iniettiva: ad esempio, $f(0) = f(1) = 0$.

(d) L'immagine di f è $[0,+\infty)$: per ogni $y \geq 0$ riusciamo a trovare una controimmagine x: basta prendere $x = -y$. Al contrario, se scegliamo $y < 0$, questo non ha una controimmagine (dovrebbe essere $x = -y$, da cui $x > 0$, ma per $x > 0$ la funzione è identicamente nulla). $\square$

Esercizio 4 Si calcoli il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin^2(8x)}{(1-\cos x)\ln(1+\tan x)}.$$

Soluzione. Moltiplicando e dividendo per x^2,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin^2(8x)}{(1-\cos x)\ln(1+\tan x)} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \cdot \frac{\sin^2(8x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\ln(1+\tan x)}.$$

Il primo dei tre fattori ha come limite 2 (essendo il reciproco di un noto limite notevole), il secondo è pari a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(8x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 8x}{x}\right)^2 \cdot \frac{8^2}{8^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 8x}{8x}\right)^2 \cdot 64 = 64,$$

mentre il terzo è

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+\tan x)} \cdot \frac{\tan x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\ln(1+\tan x)} \cdot \frac{x}{\tan x} = 1 \cdot 1.$$

Ne segue che il limite è uguale a $2 \cdot 64 \cdot 1 = 128$. $\square$

Esercizio 5 Costruire un insieme infinito, attraverso una successione a_n non monotona, che abbia 0 come estremo inferiore e 1 come estremo superiore.

Soluzione. Ci possono essere molteplici soluzioni. Ad esempio,

$$A = \left\{ \frac{1}{2n} \;\middle|\; n \text{ dispari} \right\} \cup \left\{ 1 - \frac{1}{2n} \;\middle|\; n \text{ pari} \right\}.$$

$\square$

Primo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

3 Novembre 2014

Fila B

Esercizio 1 Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{|5-n|}{2(n+3)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Determinarne estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (se esistono).

(b) Dire, motivando la risposta, se A è infinito e/o è limitato.

(c) A contiene punti di accumulazione?

Soluzione. (a) Osserviamo preliminarmente che

$$|5-n| = \begin{cases} 5-n & \text{se } n \le 5 \\ n-5 & \text{se } n > 5. \end{cases}$$

Pertanto l'insieme A si può scrivere come $A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \left\{ \frac{5-n}{2(n+3)} \;\middle|\; n = 0, \dots, 5 \right\}, \quad A_2 = \left\{ \frac{n-5}{2(n+3)} \;\middle|\; n > 5 \right\}.$$

A_1 è un insieme finito composto da 6 elementi: $A_1 = \left\{ \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{1}{6}, \frac{1}{14}, 0 \right\}$. Si osserva che tali elementi sono disposti in ordine decrescente, per cui $\max(A_1) = \frac{5}{6}$ e $\min(A_1) = 0$. Studiamo A_2.

Dimostriamo che gli elementi di A_2 sono disposti in ordine crescente: risolvendo $a_{n+1} \ge a_n$, otteniamo:

$$\frac{n+1-5}{2(n+1)+3} \ge \frac{n-5}{2(n+3)} \iff (n-4)(n+3) \ge (n-5)(n+4) \iff$$
$$n^2 - n - 12 \ge n^2 - n - 20 \iff -12 \ge -20,$$

che è risolta per ogni n e in particolare per ogni $n > 5$. Ne segue che A_2 ha un minimo e questo minimo è il suo primo elemento $a_6 = \frac{1}{18}$. Per calcolare il sup di A_2, osserviamo che

$$\frac{n-5}{2(n+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+3-3-5}{n+3} = \frac{1}{2} - \frac{4}{n+3},$$

quindi gli elementi di A_2 si ottengono da $\frac{1}{2}$ togliendo un numero sempre più piccolo. In particolare, abbiamo che

$$a_n \le \frac{1}{2} \text{ per ogni } n > 5.$$

Riassumendo, abbiamo che gli elementi di A_2 sono tutti compresi tra $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{2}$. Si osservi che

$$0 = \min(A_1) < \min(A_2) \leq a_n \leq \frac{1}{2} < \max(A_1) = \frac{5}{6}. \tag{2}$$

Ne segue che $\min(A) = \min(A_1) = 0$ e $\max(A) = \max(A_1) = \frac{5}{6}$.

(b) Da (2) abbiamo che A è limitato, perché tutti i suoi elementi sono compresi tra 0 e $\frac{5}{6}$. Inoltre, A è infinito perché A_2 (che è un suo sottoinsieme) è infinito. Infatti, gli elementi di A_2 sono disposti in ordine strettamente crescente e quindi sono in corrispondenza biunivoca con il sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ $\{n > 5\}$.

(c) A contiene un unico punto di accumulazione, che è $\frac{1}{2}$. Per dimostrarlo, dobbiamo far vedere che (dalla definizione di punto di accumulazione)

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \bar{n} \text{ tale che } \frac{1}{2} - \epsilon < a_{\bar{n}} < \frac{1}{2} + \epsilon.$$

Fissato $\epsilon > 0$, dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{n-5}{2(n+3)} < \dfrac{1}{2} + \epsilon \\ \dfrac{n-5}{2(n+3)} > \dfrac{1}{2} - \epsilon. \end{cases}$$

e trovare come soluzione almeno un valore naturale di n. La prima disequazione è sempre soddisfatta perché $a_n < \frac{1}{2}$ per ogni $n > 5$, quindi a maggior ragione vale $a_n < \frac{1}{2} + \epsilon$. Resta la seconda:

$$\frac{n-5}{2(n+3)} > \frac{1}{2} - \epsilon \iff n - 5 > 2\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)(n+3) \iff n > \frac{3(1-\epsilon)}{\epsilon}.$$

Prendendo come $\bar{n}$ il primo intero maggiore di $3(1-\epsilon)/\epsilon$, otteniamo quello che volevamo. Quindi $\frac{1}{2}$ è punto di accumulazione. Siccome $\frac{1}{2} = a_1$, allora $\frac{1}{2}$ appartiene anche a A.

$\square$

Esercizio 2 Siano f, g e h funzioni di leggi

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \log_2(1+x).$$

(a) Determinare il dominio di $F := f \circ g \circ h$.

(b) Dimostrare che F è invertibile.

(c) Calcolare la legge di F^{-1}.

Soluzione. (a) La legge di F è

$$F(x) = 3^{\sqrt{\log_2(1+x)}}.$$

Il dominio è dato dal sistema

$$\begin{cases} \log_2(1+x) \geq 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x \geq 0$. Concludiamo che il dominio di F è $\mathscr{D} = [0, +\infty)$.

(b) Le tre funzioni f, g, h sono monotone, dunque lo è anche la loro composizione F. Poiché una funzione strettamente monotona è invertibile, ne segue che F è invertibile.

(c) Per ottenere la legge di F^{-1} invertiamo

$$y = 3^{\sqrt{\log_2(1+x)}} \iff \sqrt{\log_2(1+x)} = \log_3(y) \iff$$
$$\log_2(1+x) = (\log_3(y))^2 \iff x = 2^{(\log_3(y))^2} - 1.$$

Ne segue che la legge di F^{-1} è

$$y = 2^{(\log_3(x))^2} - 1.$$

□

Esercizio 3 Considera la funzione di legge

$$f(x) = \frac{x - |x|}{2}$$

e sia $\mathscr{D}$ il suo dominio. Dire, motivando opportunamente la risposta:

(a) se f è continua in $\mathscr{D}$;

(b) se f è strettamente monotona in $\mathscr{D}$;

(c) se f è invertibile;

(d) qual è $\operatorname{Im} f$.

Soluzione. (a) La funzione si scrive esplicitamente come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ x & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Il dominio di f è $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ricordiamo che una funzione è continua nel suo dominio se è continua in tutti i punti del suo dominio. Innanzitutto, la funzione è continua separatamente sui due intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$. Resta da controllare la continuità in $x_0 = 0$. Ricordiamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Calcoliamo ciascuna delle tre precedenti quantità:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$
$$f(0) = 0.$$

Ne consegue che f è continua anche in $x_0 = 0$ e dunque è continua su tutto $\mathbb{R}$.

(b) f non è strettamente monotona in $\mathscr{D}$ perché in $[0, +\infty)$ è costantemente 0.

(c) f non è invertibile perché la funzione non è iniettiva: ad esempio, $f(0) = f(1) = 0$.

(d) L'immagine di f è $(-\infty, 0]$: per ogni $y \leq 0$ riusciamo a trovare una controimmagine x: basta prendere $x = y$. Al contrario, se scegliamo $y > 0$, questo non ha una controimmagine (dovrebbe essere $x = y$, da cui $x > 0$, ma per $x > 0$ la funzione è identicamente nulla). $\square$

Esercizio 4 Si calcoli il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\ln(1+\sin x)}{x\tan^2(7x)}.$$

Soluzione. Moltiplicando e dividendo per x^2,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\ln(1+\sin x)}{x\tan^2(7x)} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{\ln(1+\tan x)}{x} \cdot \frac{x^2}{\tan^2(7x)}.$$

Il primo dei tre fattori ha come limite $\frac{1}{2}$ (essendo un noto limite notevole), il terzo è pari a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\tan^2(7x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\tan 7x}\right)^2 \cdot \frac{7^2}{7^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{7x}{\tan 7x}\right)^2 \cdot \frac{1}{49} = \frac{1}{49},$$

mentre il terzo è

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ne segue che il limite è uguale a $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} \cdot 1 = \frac{1}{98}$. $\square$

Esercizio 5 Costruire un insieme infinito, attraverso una successione a_n non monotona, che abbia -1 come estremo inferiore e 0 come estremo superiore.

Soluzione. Ci possono essere molteplici soluzioni. Ad esempio,

$$A = \left\{ -\frac{1}{2n} \;\middle|\; n \text{ dispari} \right\} \cup \left\{ -1 + \frac{1}{2n} \;\middle|\; n \text{ pari} \right\}.$$

$\square$