Secondo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

18 Dicembre 2015

Fila A

Esercizio 1 Si considerino i numeri complessi

$$z_1 = 1 - i + \frac{i}{1-2i} \qquad z_2 = (1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}i).$$

(a) Calcola il modulo di z_1 e il modulo di z_2.

(b) Calcola il modulo di $z_1 \cdot z_2$.

Soluzione. (a) Scriviamo z_1 in forma normale:

$$z_1 = 1 - i + \frac{i}{1-2i} = 1 - i + \frac{i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = 1 - i + \frac{i-2}{1+4} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i,$$

da cui

$$|z_1| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1.$$

Poiché z_2 è scritto come prodotto di tre numeri complessi, allora il suo modulo è il prodotto dei moduli dei tre fattori:

$$|z_2| = |1+i|\,|1-i|\,\left|1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 4.$$

(b) Poiché vale $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora

$$|z_1 \cdot z_2| = 1 \cdot 4 = 4.$$

□

Esercizio 2 Considera la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di legge

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}.$$

(a) Calcola il dominio, gli zeri e il segno di f.

(b) Discuti la continuità di f nel suo dominio.

(c) Studia la derivabilità di f nel suo dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

(d) Calcola estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo assoluti (se esistono) di f.

(e) Disegna un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio della concavità e convessità).

Soluzione. (a) Poiché la radice cubica è sempre estraibile, allora il dominio è $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Per calcolare gli zeri di f, occorre risolvere $f(x) = 0$, cioè $\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} = 0$. Poiché la radice di un numero è 0 se e solo se quel numero è 0, allora gli zeri di f soddisfano

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

che, risolta, dà gli zeri $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Poiché il segno di una radice di indice dispari è dato dal segno del suo argomento, allora il segno di f è uguale al segno di $x^2 - 3x + 2$. Risolvendo $x^2 - 3x + 2 > 0$ concludiamo che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

(b) La funzione f è composizione delle funzioni $g(x) = \sqrt[3]{x}$ e $h(x) = x^2 - 3x + 2$, entrambe continue. Pertanto anche f è continua.

(c) Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 2)^{-\frac{2}{3}}(2x - 3) = \frac{2x - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}}.$$

Vediamo che la derivata non è definita in $x = 1$ e $x = 2$ (perché in questi punti si annulla il denominatore), dunque questi due sono punti di non derivabilità. Calcoliamo i limiti destri e sinistri per classificare i punti:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty,$$

pertanto $x = 1$ e $x = 2$ sono entrambi punti a tangente verticale.

(d) Calcolando i limiti a infinito di f,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} = +\infty,$$

possiamo subito concludere che $\sup f = +\infty$, dunque f non ammette massimo assoluto. Studiando il segno della derivata prima, abbiamo che $f'(x) > 0 \iff x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$, perciò $x_m = \frac{3}{2}$ è punto di minimo relativo. Poiché per ogni $x > x_m$ $f(x)$ è crescente e per ogni $x < x_m$ $f(x)$ è decrescente, allora concludiamo che x_m è anche punto di minimo assoluto. Il minimo assoluto vale $f(x_m) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

(e) In figura 2 il grafico di f.

□

Esercizio 3 Risolvi due dei tre seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{5x-7}}\mathrm{d}x \qquad \int e^x \cos(2x)\mathrm{d}x.$$

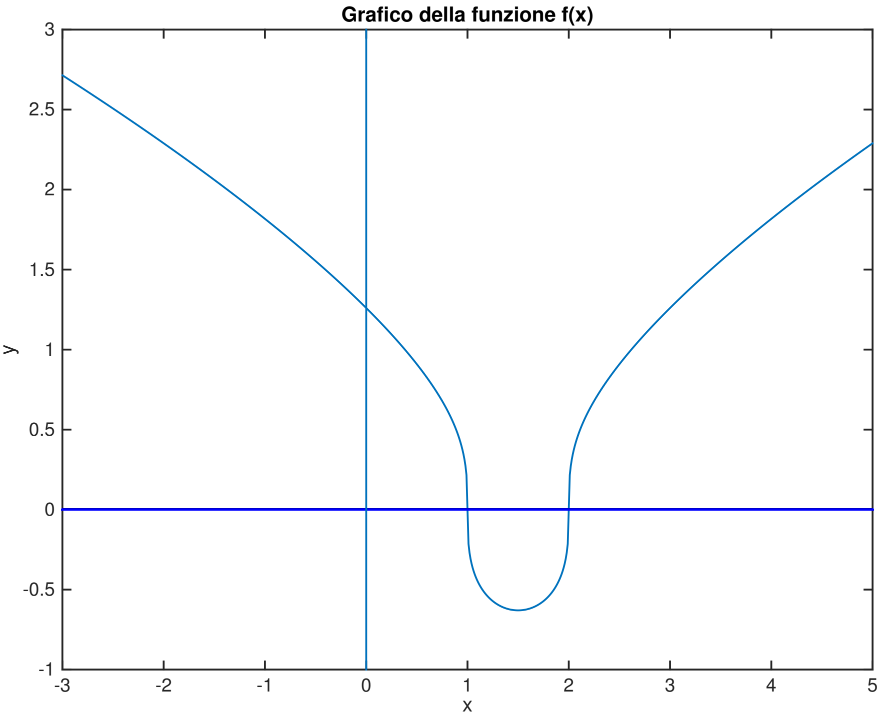

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$.

Soluzione. 1. Conviene scrivere l'integrale come somma di due integrali:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Il primo è della forma $\int (g(x))^\alpha g'(x)\mathrm{d}x$, a patto di moltiplicare e dividere per -2, mentre il secondo è un integrale immediato, di $\arcsin(x)$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1} + c = -\sqrt{1-x^2}+c$$

$$2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 2\arcsin(x)+c,$$

da cui

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 2\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}+c.$$

2. Per risolvere questo integrale procediamo operando la sostituzione $\sqrt{5x-7}=t$, da cui $x=\dfrac{t^2+7}{5}$ e $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{5}t\mathrm{d}t$. Pertanto l'integrale diventa:

$$\int \frac{1}{\frac{t^2+7}{5}\cdot t}\frac{2}{5}t\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{7+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{7}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\sqrt{7}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)+c.$$

Operando la sostituzione inversa, otteniamo:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{5x-7}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{7}x-1}\right)+c$$

3. Conviene integrare per parti due volte, integrando e^x e derivando $\cos(2x)$:

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(2x)\mathrm{d}x &= e^x\cos(2x) + 2\int e^x\sin(2x)\mathrm{d}x = \\ &= e^x\cos(2x) + 2\left[e^x\sin(2x) - 2\int e^x\cos(2x)\mathrm{d}x\right] = \\ &= e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x) - 4\int e^x\cos(2x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Chiamando $I := \int e^x\cos(2x)\mathrm{d}x$, otteniamo l'equazione

$$I = e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x) - 4I,$$

da cui

$$\int e^x\cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^x[\cos(2x)+2\sin(2x)].$$

□

Esercizio 4 Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni convesse.

(a) Dimostra che se f è crescente e f, g sono derivabili due volte allora $f \circ g$ è convessa.

(b) Mostra esibendo un controesempio che se f non è crescente la precedente non è vera in generale.

Soluzione. (a) Poiché f e g sono entrambe derivabili due volte, anche $f \circ g$ lo è, dunque possiamo calcolare la derivata seconda:

$$(f \circ g)' = f'(g(x))g'(x)$$
$$(f \circ g)'' = (f'(g(x))g'(x))' = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x).$$

Poiché f e g sono convesse, allora f'' e g'' sono > 0; inoltre $(g'(x))^2 > 0$ perché è un quadrato e infine $f'(g(x)) \geq 0$ perché per ipotesi f è crescente. Ne segue che tutti i termini che compongono $(f \circ g)''$ sono positivi e perciò concludiamo che $(f \circ g)'' > 0$, da cui $f \circ g$ convessa.

(b) Ad esempio, prendendo $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = x^2$ abbiamo che:

- f e g sono entrambe convesse;
- f non è crescente (anzi, è decrescente);
- $f \circ g = e^{-x^2}$ non è convessa, infatti la sua derivata seconda è

$$D^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2),$$

che è < 0 (e quindi concava) se $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

□

Primo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

3 Novembre 2014

Fila B

Esercizio 1 Si considerino i numeri complessi

$$z_1 = 1 - i - \frac{i}{1+2i} \qquad z_2 = (1-i)(1+i)(\sqrt{3}+i).$$

(a) Calcola il modulo di z_1 e il modulo di z_2.

(b) Calcola il modulo di $z_1 \cdot z_2$.

Soluzione. (a) Scriviamo z_1 in forma normale:

$$z_1 = 1 - i - \frac{i}{1+2i} = 1 - i - \frac{i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = 1 - i - \frac{i+2}{1+4} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i,$$

da cui

$$|z_1| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Poiché z_2 è scritto come prodotto di tre numeri complessi, allora il suo modulo è il prodotto dei moduli dei tre fattori:

$$|z_2| = |1-i|\,|1+i|\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 4.$$

(b) Poiché vale $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora

$$|z_1 \cdot z_2| = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot 4 = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

□

Esercizio 2 Considera la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di legge

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}.$$

(a) Calcola il dominio, gli zeri e il segno di f.

(b) Discuti la continuità di f nel suo dominio.

(c) Studia la derivabilità di f nel suo dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

(d) Calcola estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo assoluti (se esistono) di f.

(e) Disegna un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio della concavità e convessità).

Soluzione. (a) Poiché la radice cubica è sempre estraibile, allora il dominio è $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Per calcolare gli zeri di f, occorre risolvere $f(x) = 0$, cioè $\sqrt[3]{x^2 + 3x + 2} = 0$. Poiché la radice di un numero è 0 se e solo se quel numero è 0, allora gli zeri di f soddisfano

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

che, risolta, dà gli zeri $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$. Poiché il segno di una radice di indice dispari è dato dal segno del suo argomento, allora il segno di f è uguale al segno di $x^2 + 3x + 2$. Risolvendo $x^2 + 3x + 2 > 0$ concludiamo che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (-2, +\infty)$.

(b) La funzione f è composizione delle funzioni $g(x) = \sqrt[3]{x}$ e $h(x) = x^2 + 3x + 2$, entrambe continue. Pertanto anche f è continua.

(c) Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 3x + 2)^{-\frac{2}{3}}(2x + 3) = \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 2)^2}}.$$

Vediamo che la derivata non è definita in $x = -1$ e $x = -2$ (perché in questi punti si annulla il denominatore), dunque questi due sono punti di non derivabilità. Calcoliamo i limiti destri e sinistri per classificare i punti:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f'(x) = +\infty,$$

pertanto $x = -1$ e $x = -2$ sono entrambi punti a tangente verticale.

(d) Calcolando i limiti a infinito di f,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2} = +\infty,$$

possiamo subito concludere che $\sup f = +\infty$, dunque f non ammette massimo assoluto. Studiando il segno della derivata prima, abbiamo che $f'(x) > 0 \iff x \in (-\frac{3}{2}, +\infty)$, perciò $x_m = -\frac{3}{2}$ è punto di minimo relativo. Poiché per ogni $x > x_m$ $f(x)$ è crescente e per ogni $x < x_m$ $f(x)$ è decrescente, allora concludiamo che x_m è anche punto di minimo assoluto. Il minimo assoluto vale $f(x_m) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

(e) In figura 2 il grafico di f.

□

Esercizio 3 Risolvi due dei tre seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{3 - x}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{3x - 11}} \mathrm{d}x \qquad \int e^x \sin(3x) \mathrm{d}x.$$

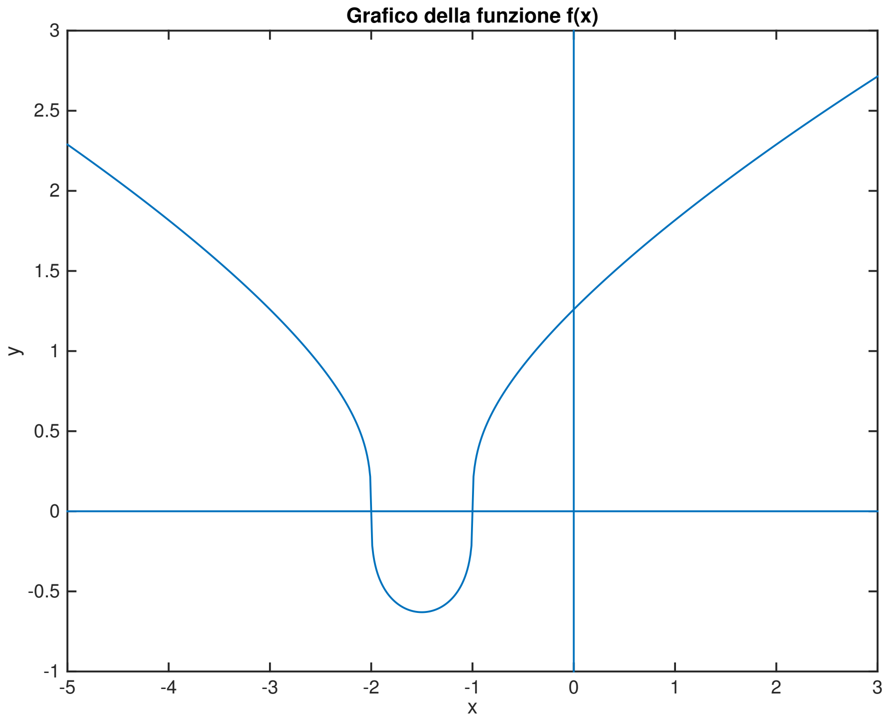

Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}$.

Soluzione. 1. Conviene scrivere l'integrale come somma di due integrali:

$$\int \frac{3-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Il primo è della forma $\int (g(x))^\alpha g'(x)\mathrm{d}x$, a patto di moltiplicare e dividere per 2, mentre il secondo è un integrale immediato, di $\arcsin(x)$:

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{1-x^2}+c$$

$$3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 3\arcsin(x)+c,$$

da cui

$$\int \frac{3-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 3\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+c.$$

2. Per risolvere questo integrale procediamo operando la sostituzione $\sqrt{3x-11}=t$, da cui $x=\dfrac{t^2+11}{3}$ e $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}t\mathrm{d}t$. Pertanto l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\frac{t^2+11}{3}\cdot t}\frac{2}{3}t\mathrm{d}t &= 2\int\frac{1}{11+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{11}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right)^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{11}\cdot\sqrt{11}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{11}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right)+c.\end{aligned}$$

Operando la sostituzione inversa, otteniamo:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{3x-11}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{11}x-1}\right)+c$$

3. Conviene integrare per parti due volte, integrando e^x e derivando $\sin(3x)$:

$$\begin{aligned}\int e^x\sin(3x)\mathrm{d}x &= e^x\sin(3x) - 3\int e^x\cos(3x)\mathrm{d}x =\\ &= e^x\sin(3x) - 3\left[e^x\cos(3x)+3\int e^x\sin(3x)\mathrm{d}x\right] =\\ &= e^x\sin(3x)-3e^x\cos(3x)-9\int e^x\sin(3x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Chiamando $I := \int e^x\sin(3x)\mathrm{d}x$, otteniamo l'equazione

$$I = e^x\sin(3x)-3e^x\cos(3x)-9I,$$

da cui

$$\int e^x\sin(3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{10}e^x[\sin(3x)-3\cos(3x)].$$

□

Esercizio 4 Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni concave.

(a) Dimostra che se f è decrescente e f, g sono derivabili due volte allora $f \circ g$ è concava.

(b) Mostra esibendo un controesempio che se f non è decrescente la precedente non è vera in generale.

Soluzione. (a) Poiché f e g sono entrambe derivabili due volte, anche $f \circ g$ lo è, dunque possiamo calcolare la derivata seconda:

$$(f \circ g)' = f'(g(x))g'(x)$$
$$(f \circ g)'' = (f'(g(x))g'(x))' = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x).$$

Poiché f e g sono concave, allora f'' e g'' sono < 0; inoltre $(g'(x))^2 > 0$ perché è un quadrato e infine $f'(g(x)) \leq 0$ perché per ipotesi f è decrescente. Ne segue che i termini che, sommati, danno $(f \circ g)''$ sono negativi e perciò concludiamo che $(f \circ g)'' < 0$, da cui $f \circ g$ concava.

(b) Ad esempio, prendendo $f(x) = e^x$ e $g(x) = -x^2$ abbiamo che:

- f e g sono entrambe convesse;
- f non è crescente (anzi, è decrescente);
- $f \circ g = e^{-x^2}$ non è concava, infatti la sua derivata seconda è

$$D^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2),$$

che è > 0 (e quindi convessa) se $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

$\square$