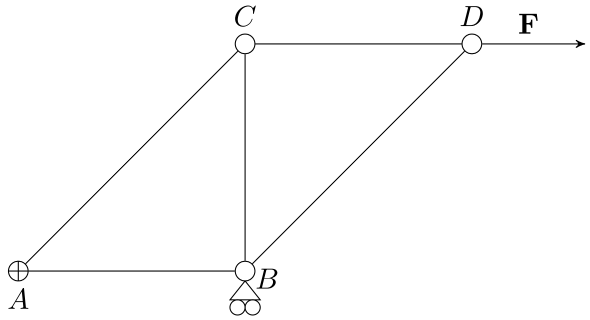

Figura 1: Esercizio 1.

Esercizio 1. Si consideri la struttura reticolare in figura 1, in cui le aste orizzontali e verticali hanno lunghezza ℓ, la cerniera in A è fissa, mentre le cerniere in B, C e D sono mobili e in B è presente un appoggio unilaterale (carrello). Tutte le cerniere sono supposte lisce. Inoltre in D è applicata una forza $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$, dove $O, \mathbf{ijk}$ è una terna di riferimento tale per cui $B - A$ è diretto come $\mathbf{i}$ e $C - B$ è diretto come $\mathbf{j}$.
Si determinino le reazioni esterne, graficamente e analiticamente, e si indichi lo stato di sollecitazione delle aste.

Svolgimento. Cominciamo graficamente. Le reazioni esterne sono in A e B, le denotiamo con $\mathbf{\Phi}_A$ e $\mathbf{\Phi}_B$. Per la presenza dell'appoggio unilaterale, abbiamo che $\mathbf{\Phi}_B$ è diretta lungo la verticale, cioè $\mathbf{\Phi}_B = \Phi_B\mathbf{j}$, $\Phi_B > 0$. In totale abbiamo tre forze: $\mathbf{F}, \mathbf{\Phi}_B$ e $\mathbf{\Phi}_A$, e delle prime due conosciamo la direzione. Tracciando le rette che individuano tali direzioni, queste si intersecano in C. Affinché vi sia equilibrio è necessario che il momento risultante delle tre forze sia nullo, e nel caso di tre forze questo accade se sono concorrenti. Concludiamo che la retta di azione di $\mathbf{\Phi}_A$ deve incontrare le altre due nel punto C, quindi $\mathbf{\Phi}_A$ è diretta come $C - A$. Per individuare verso e intensità, ricorriamo al triangolo delle forze (figura 2). Tracciamo prima $\mathbf{F}$ e poi nei due estremi del vettore tracciamo le direzioni di $\mathbf{\Phi}_B$ e $\mathbf{\Phi}_A$. Quindi chiudiamo il triangolo apponendo i versi seguendo il verso di $\mathbf{F}$. In questo modo si evincono anche le intensità di $\mathbf{\Phi}_A$ e $\mathbf{\Phi}_B$:

$$\mathbf{\Phi}_A = -F\mathbf{i} - F\mathbf{j}, \quad \mathbf{\Phi}_B = F\mathbf{j}.$$

Analiticamente: valgono le considerazioni fatte prima, quindi $\mathbf{\Phi}_B = \Phi_B\mathbf{j}, \Phi_B > 0$. Scriviamo le equazioni cardinali della statica per l'intero sistema, con momento calcolato rispetto al polo C. Queste sono tre equazioni in altrettante incognite (le due componenti di $\mathbf{\Phi}_A$ e Φ_B), quindi sono sufficienti per determinare le reazioni. Scrivendo $\mathbf{\Phi}_A = \Phi_{A,x}\mathbf{i}+$

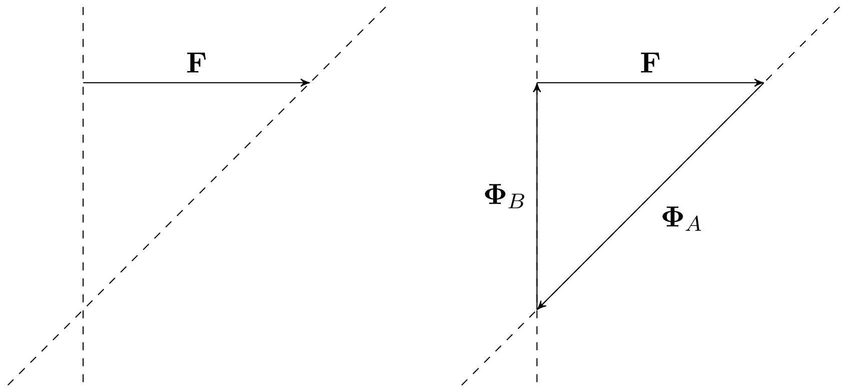

Figura 2: Triangolo delle forze, esercizio 1.

$\Phi_{A,y}\mathbf{j}$, abbiamo:

$$\begin{cases} \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}_A + \mathbf{\Phi}_B = \mathbf{0} \\ (D - C) \wedge \mathbf{F} + (A - C) \wedge \mathbf{\Phi}_A + (B - C) \wedge \mathbf{\Phi}_B = \mathbf{0} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} F + \Phi_{A,x} = 0 \\ \Phi_{A,y} + \Phi_B = 0 \\ (-\ell\mathbf{i} - \ell\mathbf{j}) \wedge (\Phi_{A,x}\mathbf{i} + \Phi_{A,y}\mathbf{j}) = \mathbf{0} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \Phi_{A,x} = -F \\ \Phi_B = -\Phi_{A,y} \\ -\ell\Phi_{A,y} + \ell\Phi_{A,x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \Phi_{A,x} = -F \\ \Phi_{A,y} = -F \\ \Phi_B = F. \end{cases}$$

Per determinare lo stato di sollecitazione delle aste, procediamo nodo per nodo, cominciando con quelli in cui concorrono al più due aste.

Nodo A In A ci sono tre forze: una lungo l'asta AC, una lungo l'asta AB e $\mathbf{\Phi}_A$. Per l'equilibrio, la risultante di queste deve essere nulla. In altre parole, $\mathbf{\Phi}_A$ deve essere equilibrata da una forza lungo AB e una lungo AC. Però poiché $\mathbf{\Phi}_A$ è diretta lungo AC, allora l'unica possibilità è che AB sia scarica e su AC ci sia una forza uguale e opposta a $\mathbf{\Phi}_A$, cioè AC è un *tirante*.

Nodo B Si segue lo stesso ragionamento fatto in A, usando il fatto che ora sappiamo che AB è scarica. Ne segue che BC è un *puntone* e BD è scarica.

Nodo D Poiché BD è scarica, l'unica possibilità è che CD sia un *tirante*.

Nodo C A questo punto abbiamo già trovato lo stato di sollecitazione di tutte le aste, e in C ritroviamo il triangolo delle forze di figura 2.

□

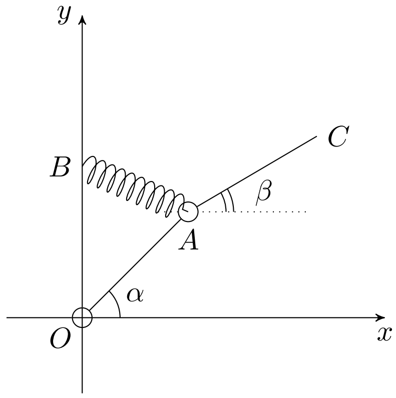

Figura 3: Esercizio 2.

Esercizio 2. Si consideri il sistema meccanico in figura 3, costituito da una sbarretta OA, di lunghezza ℓ e omogenea di massa m, ai cui estremi sono presenti rispettivamente una cerniera fissa e una cerniera mobile, la quale collega la sbarretta OA a una seconda sbarretta AC, di stessa lunghezza e massa, sempre omogenea. L'estremo A della sbarretta OA è inoltre collegato al punto B dell'asse y, situato a distanza ℓ da O, tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità. Si suggerisce di usare come parametri lagrangiani gli angoli α e β, rispettivamente le direzioni della sbarretta OA e della sbarretta AC rispetto all'asse x.

Dimostrazione. Siamo in presenza di forze conservative (forza peso e forza elastica), dunque per individuare le posizioni di equilibrio possiamo ricorrere al principio dei lavori virtuali. Scriviamo l'energia potenziale del sistema:

$$V = mgy_{G_1} + mgy_{G_2} + \frac{1}{2}k|A-B|^2,$$

dove G_1 e G_2 sono i centri di massa delle sbarrette e y_{G_1} e y_{G_2} sono le coordinate lungo l'asse y. Poiché le sbarrette sono omogenee, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
G_1 - O &= \frac{\ell}{2}\cos\alpha\mathbf{i} + \frac{\ell}{2}\sin\alpha\mathbf{j}, \\
G_2 - O &= (\ell\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\cos\beta)\mathbf{i} + (\ell\sin\alpha + \frac{\ell}{2}\sin\beta)\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Per il calcolo di $|A-B|^2$ possiamo procedere in diversi modi, ad esempio applicando il teorema di Carnot al triangolo $A\hat{O}B$:

$$\begin{aligned}
|A-B|^2 &= |A-O|^2 + |B-O|^2 - 2|A-O||B-O|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \\
&= \ell^2 + \ell^2 - 2\ell^2\sin\alpha = 2\ell^2(1-\sin\alpha).
\end{aligned}$$

Concludiamo che l'energia potenziale è data da

$$V(\alpha,\beta) = mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha + mg\ell\left(\frac{1}{2}\sin\beta + \sin\alpha\right) + k\ell^2(1-\sin\alpha).$$

Le configurazioni di equilibrio annullano il gradiente di V, dunque dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) &= \ell\cos\alpha\left(\frac{3}{2}mg - k\ell\right) = 0\\
\frac{\partial V}{\partial \beta}(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}mg\ell\cos\beta = 0
\end{aligned}$$

La seconda equazione ha come soluzione $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, mentre la prima è soddisfatta per $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ oppure, nel caso in cui $3mg = 2k\ell$, è soddisfatta per ogni valore di α. Concludiamo che le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle in tabella 1. In particolare osserviamo che se dimensioniamo il nostro sistema scegliendo m, ℓ, k in modo tale da avere soddisfatta la condizione $3mg = 2k\ell$, qualsiasi angolo α risulterà essere una posizione di equilibrio. Tuttavia β potrà sempre essere uguale a $\pi/2$ o $-\pi/2$.

α	$\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$3mg = 2k\ell, \forall\alpha$	$3mg = 2k\ell, \forall\alpha$
β	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2.$

Tabella 1: Esercizio 2.

Per studiare la stabilità del sistema, calcoliamo l'Hessiano di V

$$\nabla^2 V(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -\ell\left(\frac{3}{2}mg - k\ell\right)\sin\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mg\ell\sin\beta \end{pmatrix},$$

e valutiamolo nei punti di equilibrio: se gli autovalori sono entrambi positivi, il punto è di equilibrio stabile; se ce n'è uno negativo, è instabile. Alla luce delle precedenti considerazioni, abbiamo che l'unico punto di equilibrio stabile è $(-\pi/2, -\pi/2)$ nel caso in cui $3mg > 2k\ell$. $\square$