Esercizio 1. Dato il sistema di vettori $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = -2\mathbf{i}$ e $\mathbf{F}_3 = \mathbf{j}$ applicati rispettivamente in $P_1 \equiv (1,0,0), P_2 \equiv (0,1,0)$ e $P_3 \equiv (0,0,1)$, calcolare le equazioni dell'asse centrale, se univocamente determinato.

Soluzione. Se la risultante è non nulla, allora l'asse centrale è univocamente determinato. Poiché

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}_i = -\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0},$$

allora possiamo procedere con il calcolo.

Calcoliamo tale asse in tre modi:

- Usiamo la formula che dà in modo diretto un punto A dell'asse centrale:

$$A - O = \frac{1}{R^2}(\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O),$$

dove O è un polo qualunque. Una volta noto questo punto, ricordando che l'asse centrale ha la stessa direzione di $\mathbf{R}$, l'equazione parametrica della retta sarà data da

$$(A - O) + t\mathbf{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo $\mathbf{M}_O$, scegliendo $O \equiv (0,0,0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \sum_{i=1}^{3} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i = \\ &= \mathbf{i} \wedge (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mathbf{j} \wedge (-2\mathbf{i}) + \mathbf{k} \wedge (\mathbf{j}) = \\ &= -\mathbf{i} - \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Poiché $R^2 = |\mathbf{R}|^2 = 2$, ne segue che

$$A - O = \frac{1}{2}[(-\mathbf{j} + \mathbf{k}) \wedge (-\mathbf{i} - \mathbf{j})] = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

Concludiamo che l'asse centrale ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Ricaviamo equazioni cartesiane eliminando il parametro t:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} - t \\ z = -\frac{1}{2} + t \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} - y \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - y \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

- Il secondo modo prevede l'applicazione della definizione: l'asse centrale è il luogo geometrico dei punti A tali che il momento con polo A è parallelo alla risultante $\mathbf{R}$; in formule

$$\mathbf{M}_A \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}.$$

Parametrizziamo $A \equiv (x, y, z)$, per cui $A - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e scriviamo la precedente relazione. Prima calcoliamo $\mathbf{M}_A$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^{3} (P_i - A) \wedge \mathbf{F}_i = & \\
&= [(1-x)\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}] \wedge (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \\
&+ [-x\mathbf{i} + (1-y)\mathbf{j} - z\mathbf{k}] \wedge (-2\mathbf{i}) + \\
&+ [-x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (1-z)\mathbf{k}] \wedge (\mathbf{j}) = \\
&= (-y - z - 1)\mathbf{i} - (1-x)\mathbf{j} + x\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Moltiplichiamo quanto ottenuto vettorialmente per $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_A \wedge \mathbf{R} &= [(-y - z - 1)\mathbf{i} - (1-x)\mathbf{j} + x\mathbf{k}] \wedge (-\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \\
&= (2x - 1)\mathbf{i} + (y + z + 1)(\mathbf{j} + \mathbf{k}).
\end{aligned}$$

La precedente è uguale al vettore nullo $\mathbf{0}$ se e solo se le singole componenti sono nulle, cioè

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

- Il terzo metodo segue dall'osservazione che il momento calcolato rispetto a un punto dell'asse centrale ha il minimo modulo, perché la componente parallela a $\mathbf{R}$ è invariante rispetto al polo e la componente perpendicolare è nulla. Dunque basta ricercare il minimo della funzione $f(x, y, z) := |\mathbf{M}_A|^2$ (in realtà basta un punto stazionario). Abbiamo già calcolato che $\mathbf{M}_A = (-y - z - 1)\mathbf{i} - (1-x)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, ora calcoliamone il modulo al quadrato:

$$|\mathbf{M}_A|^2 = (-y - z - 1)^2 + (1-x)^2 + x^2.$$

I punti stazionari sono quelli che annullano il gradiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial |\mathbf{M}_A|^2}{\partial x} &= -2(1-x) + 2x = 4x - 2 \\
\frac{\partial |\mathbf{M}_A|^2}{\partial y} &= -2(-y - z - 1) = 2y + 2z + 2 \\
\frac{\partial |\mathbf{M}_A|^2}{\partial z} &= -2(-y - z - 1) = 2y + 2z + 2
\end{aligned}$$

Imponendo che le precedenti tre siano nulle, otteniamo nuovamente le equazioni cartesiane dell'asse centrale.

□