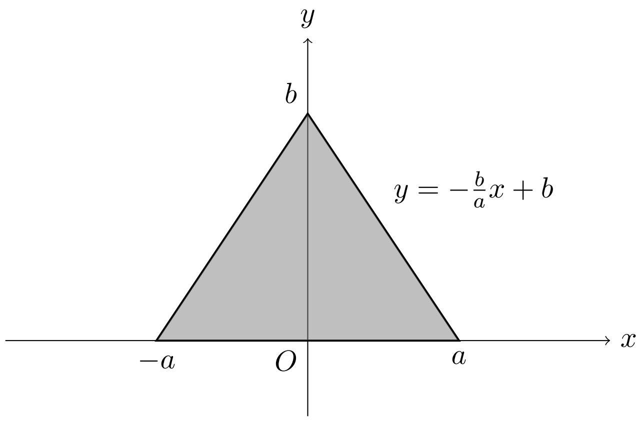
Esercizio 1. Calcolare le coordinate del centro di massa di un triangolo isoscele omogeneo di base $2a$ e altezza b.



Soluzione. Definiamo versori ortonormali $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ associati ad assi coordinati Ox, Oy in cui Ox passa per la base del triangolo e Oy per l'altezza. In questo sistema di coordinate il centro di massa è

$$G - O = y_G \mathbf{j},$$

in quanto per ragioni di simmetria $x_G \equiv 0$. Si ha che

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{T}} \mu y d\mathcal{T},$$

dove $\mathcal{T}$ è il triangolo, μ la sua densità (costante) e m la sua massa. Sempre per ragioni di simmetria, l'integrale precedente è uguale a

$$y_G = \frac{2}{m} \int_{\tilde{\mathcal{T}}} \mu y d\tilde{\mathcal{T}},$$

dove $\tilde{\mathcal{T}}$ è la metà destra del triangolo, vale a dire la porzione di triangolo contenuta nel primo quadrante. Svolgiamo l'integrale integrando prima rispetto a x (da 0 a a) e poi rispetto a y (da 0 fino al lato obliquo del triangolo, di equazione $y = -\frac{b}{a}x + b$):

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2\mu}{m} \int_0^a dx \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} y dy = \frac{2\mu}{m} \int_0^a \frac{y^2}{2} \bigg|_0^{-\frac{b}{a}x+b} dx = \\ &= \frac{2\mu}{m} \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{ab^2}{a}x + b^2 \right) dx = \\ &= \frac{\mu}{m} \left(\frac{b^2}{3a^2}x^3 - \frac{b^2}{a}x^2 + b^2 x \right) \bigg|_0^a = \frac{ab^2\mu}{3m} = \frac{b}{3}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $m = \frac{2ab}{2}\mu = ab\mu$. $\square$