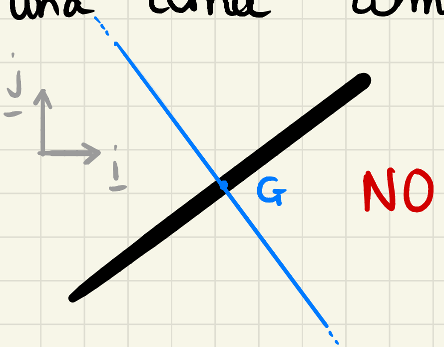
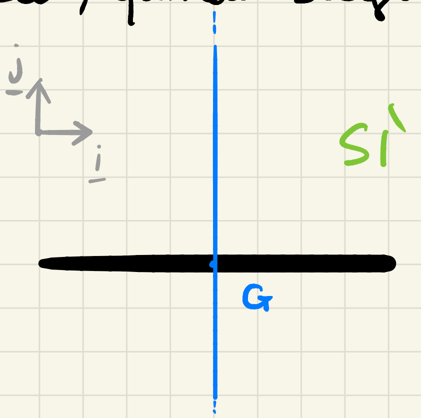
ESERCIZIO (4/11/2019)

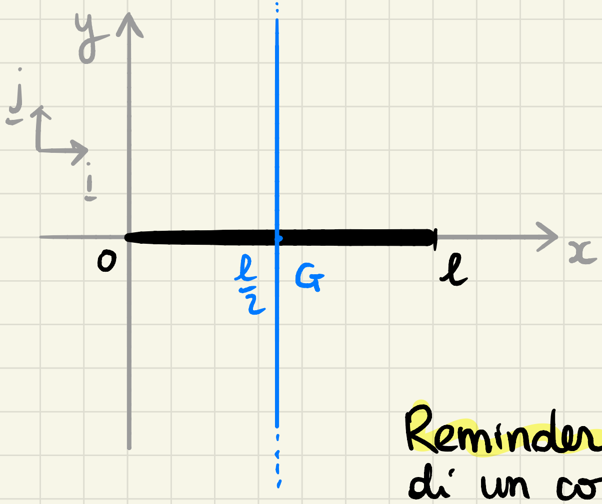
Calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea di lunghezza l rispetto a:

1. un asse passante per il suo centro di massa e ortogonale all'asta;
2. un asse passante per un estremo e ortogonale all'asta;
3. un asse passante per un estremo e inclinato di un angolo θ rispetto all'asta.

<u>Soluzione</u> 1. notiamo subito che il valore del momento d'inerzia non dipende dal sistema di coordinate, quindi scelgo una terna "comoda":

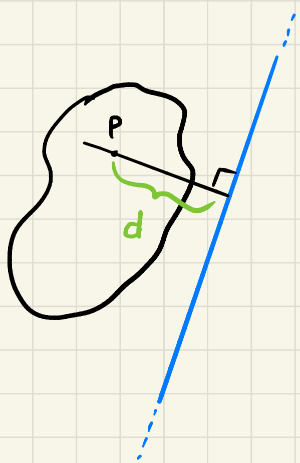






Per un'asta omogenea il centro di massa è il punto medio:

$$G - O = \frac{\ell}{2}\,\underline{i}$$



Reminder: il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto a una retta è l'integrale delle distanze al quadrato di tutti i punti del corpo dalla retta

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mu\, d^2(P)\, d\mathcal{C}$$

densità del corpo

la distanza non è costante, dipende dal punto del corpo!

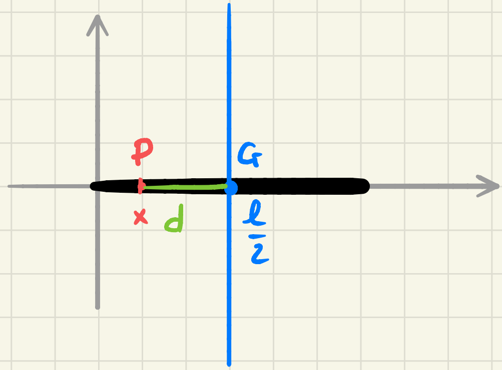
Nel nostro caso, quanto vale la distanza dall'asse considerato di un generico punto dell'asta?

Sia P il generico punto dell'asta. P ha coordinate $(x, 0)$, perciò $P - O = x\,\underline{i}$.

La distanza di P dall'asse è

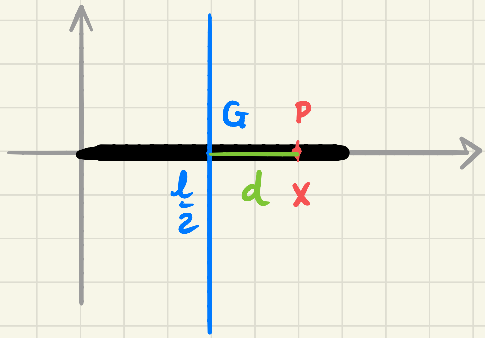
$$d(P) = \frac{\ell}{2} - x$$

se P si trova a sinistra di G



$$d(P) = x - \frac{\ell}{2}$$

se P si trova a destra di G



In un colpo solo:

$$d(P) = \left| x - \frac{\ell}{2} \right| .$$

Il momento d'inerzia è dunque:

$$I = \int_{\ell} \mu\, d^2(P)\, d\ell = \int_0^{\ell} \mu \left| x - \frac{\ell}{2} \right|^2 dx =$$

$\ell \leftarrow$ massima x di P sull'asta

$0 \leftarrow$ minima x di P sull'asta

$$= \mu \int_0^{\ell} \left(x^2 - \ell x + \frac{\ell^2}{4} \right) dx = \mu \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell}{2} x^2 + \frac{\ell^2}{4} x \right) \Bigg|_0^{\ell} =$$

porto fuori perché l'asta è omogenea ($\rightarrow \mu$ costante)

$$= \mu\left(\frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{2} + \frac{\ell^3}{4}\right) = \mu\,\frac{4-6+3}{12}\,\ell^3 = \frac{1}{12}\mu\ell^3$$

$$= \frac{1}{12} m\ell^2 .$$

$m = \mu\ell$

MASSA dell'ASTA

MOMENTO INERZIA DI UN'ASTA OMOG. RISPETTO A UNA RETTA PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA E AD ESSA ORTOGONALE :

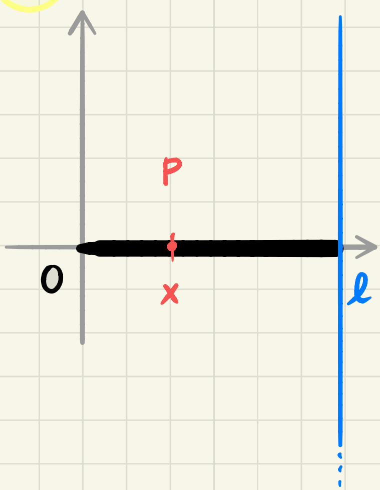
$$I = \frac{1}{12} m \ell^2$$

lunghezza asta

massa asta

(2) Possiamo risolvere questo quesito in due modi.

(a) Con la definizione:



$$d(P) = \ell - x$$

$$I = \int_{\ell} \mu\, d^2(P)\, d\ell$$

$$= \int_0^{\ell} \mu\,(\ell - x)^2\, dx$$

$$= \mu\left(\ell^2 x - \ell x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\ell}$$

$$= \mu\left(\ell^3 - \ell^3 + \frac{\ell^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\mu\ell^3 = \frac{1}{3} m\ell^2$$

(b) Con il teorema di Huygens.

TEOREMA Sia I_G il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto a una retta r_1 passante per il centro di massa G. Sia r_2 una retta parallela a r_1 e distante da essa di una lunghezza c. Il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto a r_2 è:

$$I = I_G + mc^2$$

Nel nostro caso r_1 è la retta dell'esercizio

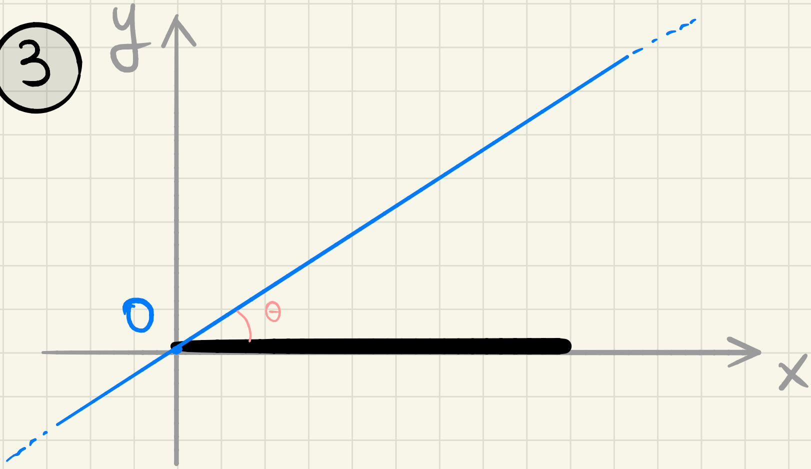
(1) e r_2 è la retta dell'esercizio (2).

Poiché le due distano $c = \frac{\ell}{2}$, allora

$$I = I_G + mc^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2$$

$$= \frac{1}{3}m\ell^2.$$

3



Anche questo problema può essere risolto in due modi.

a Data una terna $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ di assi x, y, z e centrata in un punto O, indichiamo con:

- A, B, C rispettivamente i momenti d'inerzia di un corpo rigido rispetto alle rette x, y, z;
- D, E, F i momenti centrifughi

$$D = \int_{\mathcal{C}} \mu\, yz\, d\ell \quad , \quad E = \int_{\mathcal{C}} \mu\, xz\, d\ell \quad , \quad F = \int_{\mathcal{C}} \mu\, xy\, d\ell .$$

Sia r una retta passante per O con coseni direttori α_1, α_2 e α_3. Allora il momento d'inerzia del corpo rispetto a r è:

$$I = A\alpha_1^2 + B\alpha_2^2 + C\alpha_3^2 + 2D\alpha_2\alpha_3 + 2E\alpha_1\alpha_3 + 2F\alpha_1\alpha_2$$

$$= A\alpha_1^2 + B\alpha_2^2 + 2F\alpha_1\alpha_2$$

se il corpo si trova nel piano xy.

Nel nostro caso, A è il momento d'inerzia rispetto all'asse x, che vale:

tutti i punti del corpo hanno $y=z=0$

$$A = \int_0^\ell \mu (y^2+z^2)\, dx = \int_0^\ell \mu \cdot 0\, dx = 0.$$

B è il mom. d'inerzia del punto 2, cioè

$$B = \frac{1}{3} m\ell^2.$$

tutti i punti del corpo hanno $y=0$.

$$F = \int_0^\ell \mu x y\, dx = \int_0^\ell \mu x \cdot 0\, dx = 0$$

$\alpha_1 = \cos\theta$, $\alpha_2 = \sin\theta$. Concludiamo che:

$$I = \frac{1}{3} m \ell^2 \sin^2\theta .$$

Alternativamente, si può calcolare lo stesso momento d'inerzia usando la definizione.

PER CASA

(Suggerimento: ricordare che la distanza di un punto P di coordinate (x_P, y_P) da una retta di equazione

$$ax + by + c = 0 \quad \text{è}$$

$$d(P, r) = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$
)