Cinematica delle masse

4 DIC 2019

Formule fondamentali:

1. MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO RISP. POLO O

$$\underline{K}_O = \sigma_O \underline{\omega} + (G-O)\wedge \underline{Q}$$

σ_O: tensore d'inerzia in O

$\underline{\omega}$: velocità angolare

G: c.d.m.

$\underline{Q}$: Quantità di moto $\underline{Q} = m\underline{v}_G$

2. ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2} m |\underline{v}_O|^2 + \frac{1}{2} I_O |\underline{\omega}|^2 + m\underline{\omega}\cdot[(G-O)\wedge \underline{v}_O]$$

I_O: mom. inerzia rispetto asse parallelo a $\underline{\omega}$, passante per O

O è un punto qualunque, T non dipende dalla scelta di O.

- Se si sceglie $O \equiv G$:

$$T = \frac{1}{2} m |\underline{v}_G|^2 + \frac{1}{2} I_G |\underline{\omega}|^2$$

- Se si sceglie O t.c. $\underline{v}_O = \underline{0}$

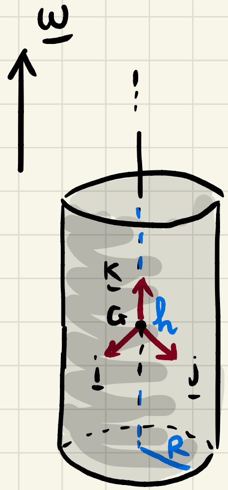
$$T = \frac{1}{2} I_O |\underline{\omega}|^2$$

OSSERVAZIONE : $\underline{K}_G$ e T sono quantità che dipendono dal tempo, in quanto dipendono da $\underline{w}$ e $\underline{V}_G$, che sono variabili.

Esercizi

Calcolare momento quantità di moto e energia cinetica delle seguenti figure omogenee.

1. Cilindro cavo di raggio R e altezza h, $\underline{w}$ parallelo all' asse del cilindro, nel caso $\underline{V}_G = \underline{0}$.



$\underline{K}_G = \sigma_G \underline{w}$. Devo scegliere un sistema di riferimento in cui calcolare σ_G. Solitamente si sceglie un sistema di riferimento principale d' inerzia, ad es. $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, dove $\underline{k}$ è parallelo all'asse e $\underline{i}, \underline{j}$ paralleli alla base. In questo sistema di riferimento,

$\underline{\omega} = \omega \underline{k}$ e

$$\underline{\sigma}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\underline{K}_G$ non c'è bisogno di calcolare tutti e tre, A, B, C; infatti,

$$\underline{K}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = C\omega \underline{k} = C\underline{\omega}$$

OSS: $\underline{K}_G$ e $\underline{\omega}$ sono paralleli in questo caso

$$C = \iiint \mu(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \mu\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R^3\,dz = 2\pi R^3 h\mu$$

coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$dx\,dy\,dz \to R\,d\theta\,dz$

$= mR^2$. *

$m = \mu \cdot 2\pi R h$

* Si osservi che questo è anche il momento d'inerzia di un anello di raggio R

$$\Rightarrow \underline{K}_G = mR^2\omega\underline{k} = mR^2\underline{\omega}.$$

Calcolo l'energia cinetica usando il punto G:

$$T = \frac{1}{2} I_G |\underline{\omega}|^2 = \frac{1}{2} C |\underline{\omega}|^2 = \frac{1}{2} mR^2\omega^2.$$

Osserviamo che se calcolavo T usando il punto P, tale che $P-G = R\underline{i}$, ottenevo la stessa cosa:

$$T = \frac{1}{2} m|\underline{v}_P|^2 + \frac{1}{2} I_P |\underline{\omega}|^2 + m\underline{\omega}\cdot[(G-P)\wedge \underline{v}_P]$$

FORMULA FOND.

$$\underline{v}_P = \underline{v}_G + \underline{\omega}\wedge(P-G) = \omega\underline{k}\wedge R\underline{i} = \omega R\underline{j}$$

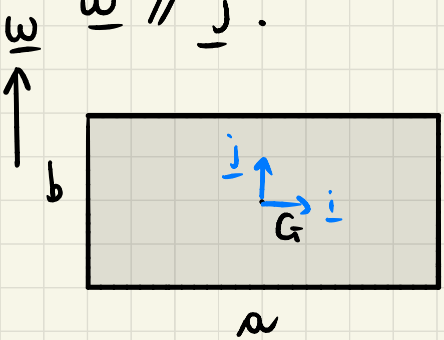
$$I_P = I_G + mR^2 = 2mR^2$$ TEO. HUYGENS-STEINER

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}\cdot 2mR^2\omega^2 + m\omega\underline{k}\cdot[-R\underline{i}\wedge\omega R\underline{j}]$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2R^2 + \cancel{m\omega^2R^2} - \cancel{m\omega^2R^2} = \frac{1}{2} m\omega^2R^2.$$

—— o ——

(2) Rettangolo di lati a e b, $\underline{v}_G = v\underline{i}$ e $\underline{\omega} \parallel \underline{j}$.



Uso la formula $\underline{K}_G = \sigma_G \underline{\omega}$; scelgo un sistema di riferimento principale d'inerzia $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ centrato in G, dove $\underline{i}, \underline{j}$ sono paralleli rispettivamente alla base e all'altezza.

In questa terna, $\underline{K}_G$ è diagonale:

$$\underline{K}_G = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{\omega} = \omega \underline{j}.$$

Pertanto, $\underline{K}_G = \sigma_G \underline{\omega} = \mathcal{B}\omega\underline{j} = \mathcal{B}\underline{\omega}$.

$\mathcal{B}$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse per $\underline{j}$:

$$\mathcal{B} = \iint \mu \, (x^2 + z^2)\, dx\, dy = \mu \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy =$$

$$= \mu \, \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cdot b = \mu \cdot \frac{1}{3} b \cdot \frac{a^3}{4} = \frac{1}{12} m a^2.$$

* Osserva che è anche il momento d'inerzia di un'asta di lunghezza a.

$$\Rightarrow \quad \underline{K}_G = \mathcal{B}\underline{\omega} = \frac{1}{12} m a^2 \underline{\omega} = \frac{1}{12} m a^2 \omega \underline{k}.$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} m |\underline{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \underbrace{I_G}_{= \mathcal{B}} |\underline{\omega}|^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{24} m a^2 \omega^2.$$

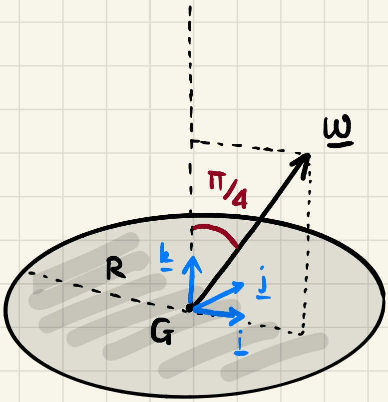
OSSERVAZIONE

In entrambi i casi precedenti $\underline{K}_G = \sigma_G \underline{\omega}$ si semplificava in $\underline{K}_G = I \underline{\omega}$, dove I nel primo caso era $\mathcal{C}$ ← mom. in. risp. asse per $\underline{k}$ e nel secondo caso era $\mathcal{B}$. ↑ mom. in. risp. asse per $\underline{j}$ Questo è successo perché $\underline{\omega}$ è parallelo all' asse per $\underline{k}$ (I caso) o parallelo all' asse per $\underline{j}$ (secondo caso). Inoltre entrambi questi assi erano principali d' inerzia. Questo fatto è vero sempre:

usatissima negli esercizi!

> Se in un certo istante $\underline{\omega}$ è parallelo ad un asse principale d' inerzia per il corpo, allora $\underline{K}_G = I \underline{\omega}$, dove I è il momento d' inerzia rispetto a quell' asse principale.

③ Disco di raggio R e massa m, $\underline{\omega}$ inclinato di $\pi/4$ rispetto all'asse perpendicolare al disco, $\underline{v_G} = \underline{0}$.



Stavolta la retta di $\underline{\omega}$ non è un asse principale, dunque non posso usare l'osservazione precedente ☹, ma devo applicare la formula $\underline{K_G} = \sigma_G \underline{\omega}$. Come prima, scegliamo una terna principale d'inerzia in cui scrivere $\underline{K_G}$ e $\underline{\omega}$. Sicuramente l'asse del disco è un asse principale, quindi prendiamo $\underline{k}$ parallelo ad esso. Inoltre, tutti gli assi passanti per G nel piano del disco sono principali. Scelgo il primo come la proiezione di $\underline{\omega}$ sul piano del disco, e il secondo ortogonale al primo.

In questa terna, $\underline{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \underline{i} + \frac{\omega}{\sqrt{2}} \underline{k}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

e $\underline{K_G} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}$.

Osserviamo che $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ per simmetria del disco. Inoltre, poiché $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ (figura piana), concludiamo che

$$\underline{K_G} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{C} = \iint \mu(x^2+y^2)\,dx\,dy = \mu \int_0^R r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\mu \cdot \frac{1}{4} R^4$$

$$= \frac{1}{2} m R^2.$$

COORDINATE POLARI

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$r \in [0,R]$, $\theta \in [0,2\pi]$

Pertanto,

$$\underline{K}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2}} mR^2\omega \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} mR^2\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} mR^2\omega \, \underline{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}} mR^2\omega \, \underline{k} .$$

Per calcolare T uso il punto G:

$$T = \frac{1}{2} I_G |\underline{\omega}|^2$$

I_G è il momento d'inerzia rispetto a un asse passante per G e parallelo a $\underline{\omega}$, quindi l'asse di coseni direttori $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tale momento d'inerzia è

perché la terna è principale d'inerzia

$$I_G = \underset{\overset{\uparrow}{A}}{A}\alpha_1^2 + \underset{\overset{\uparrow}{B}}{B}\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\alpha_2^2} + \underset{\overset{\uparrow}{C}}{C}\alpha_3^2 - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{2D\alpha_2\alpha_3}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{2E\alpha_1\alpha_3}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{2F\alpha_1\alpha_2}}$$

$$= \frac{\mathcal{C}}{2}\alpha_1^2 + \mathcal{C}\alpha_1^2 = \frac{3}{2}\mathcal{C}\alpha_1^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{8}mR^2.$$

Concludiamo che $T = \frac{3}{16}mR^2\omega^2$.

che ho dimenticato di fare a lezione

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

La quantità $\frac{1}{2}I_G|\underline{\omega}|^2$ nell' energia cinetica può essere calcolata a partire da $\underline{K}_G$ usando semplicemente: $\boxed{\frac{1}{2}\underline{K}_G\cdot\underline{\omega}}$.

nel nostro esercizio, infatti:

$$\frac{1}{2}\underline{K}_G\cdot\underline{\omega} =$$

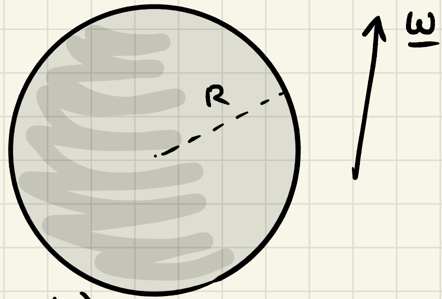
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}mR^2\omega\,\underline{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}mR^2\omega\,\underline{k}\right)\cdot\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{\omega}{\sqrt{2}}\underline{k}\right)$$

$$= \frac{1}{16}mR^2\omega^2 + \frac{1}{8}mR^2\omega^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_G|\underline{\omega}|^2$$

Esercizi per casa

Calcolare $\underline{K}_G$ e T per le seguenti figure:

$\boxed{1}$ SFERA di RAGGIO R e MASSA m



$\underline{\omega}$ qualunque

$\underline{v}_G = \underline{0}$.

(Aiutino: tutti gli assi sono principali)

$\boxed{2}$ QUADRATO DI LATO l e MASSA m

- $\underline{\omega}$ parallelo a un lato, $\underline{v}_G = \underline{0}$.
- $\underline{\omega}$ inclinato di $\pi/6$ rispetto al lato, $\underline{v}_G = \underline{0}$.