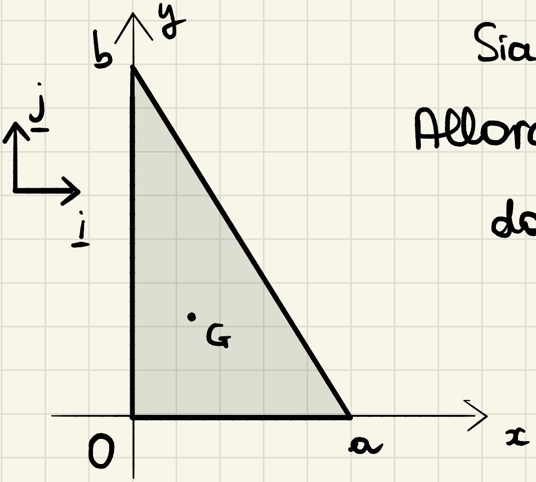
ESERCIZI (11/11/2019)

1. Di un triangolo rettangolo omogeneo, di cateti a e b, calcolare le coordinate del centro di massa.

Soluzione



Sia G il centro di massa.

Allora $G - O = x_G \underline{i} + y_G \underline{j}$,

dove:

densità del triangolo

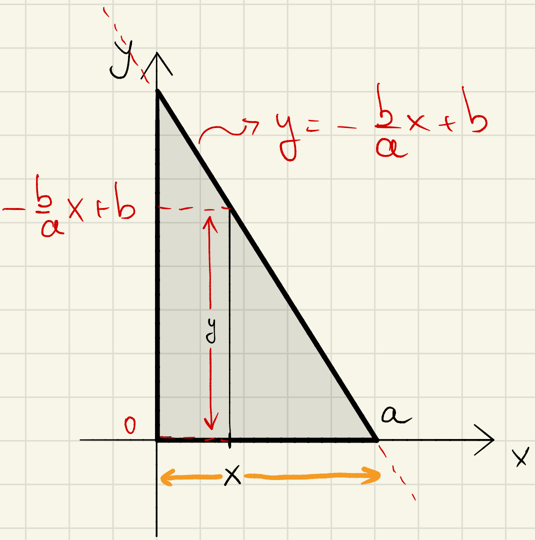
$$x_G = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} \mu \, x \, d\mathcal{C},$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} \mu \, y \, d\mathcal{C}.$$

Il dominio di integrazione $\mathcal{C}$ è il triangolo, che si trova nel piano xy, quindi $d\mathcal{C} = dx\,dy$.

(Fosse stata una figura piana nel piano xz, $d\mathcal{C} = dx\,dz$, e così via...)

Poiché il dominio non è rettangolare, gli estremi di una delle due variabili di integrazione dipenderanno dall'altra.
Se scelgo la x in modo che vari tra 0 e a, la y varierà tra 0 e $-\frac{b}{a}x+b$:



Allora:

porto fuori μ per omogeneità (μ = cost.)

$$x_G = \frac{\mu}{m}\int_0^a x\,dx \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} dy$$

$$= \frac{\mu}{m}\int_0^a x\left(-\frac{b}{a}x+b\right)dx$$

$$= \frac{\mu}{m}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{b}{a}\right)x^3 + \frac{1}{2}bx^2\right]\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{\mu}{m}\left(-\frac{1}{3}a^2b + \frac{1}{2}a^2b\right) = \frac{1}{6}\frac{\mu}{m}a^2b = \frac{1}{3}a.$$

$m = \mu \cdot \underbrace{\frac{1}{2}ab}_{\text{AREA TRIANGOLO}}$

Per l'ordinata, invece:

$$y_G = \frac{\mu}{m}\int_0^a dx \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} y\,dy = \frac{\mu}{m}\int_0^a \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^2 dx$$

$$= \frac{\mu}{m}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^3\Bigg|_0^a$$

$$= -\frac{\mu}{m}\cdot\frac{a}{6b}\left[\left(-\frac{b}{\cancel{a}}\cdot\cancel{a}+b\right)^3-\left(-\frac{b}{a}\cdot 0+b\right)^3\right]$$

$$= -\frac{\mu}{m}\cdot\frac{a}{6b}\left(-b^3\right) = \frac{1}{6}\frac{\mu}{m}ab^2 \underset{m=\frac{1}{2}\mu ab}{=} \frac{1}{3}b.$$

Concludiamo che

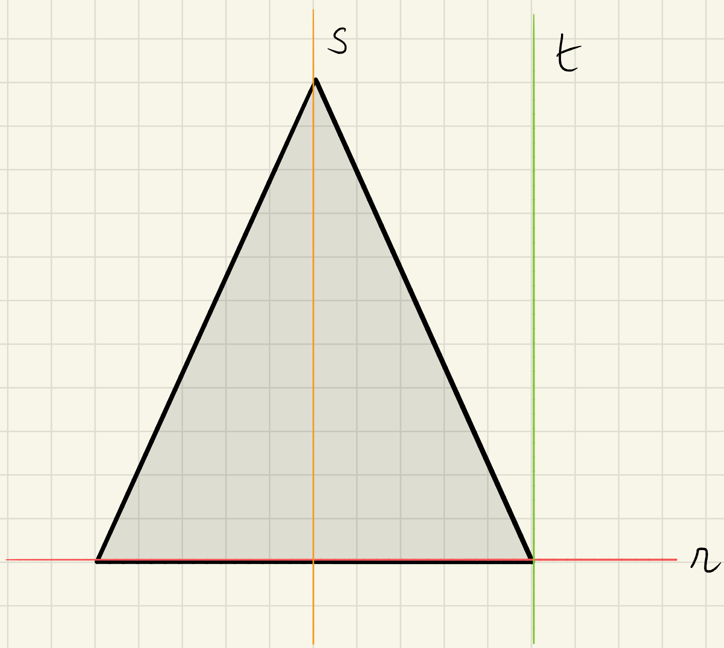
$$G-O = \frac{a}{3}\underline{i} + \frac{b}{3}\underline{j}.$$

② Di un triangolo isoscele di base a e altezza b, omogeneo, calcolare i momenti d'inerzia rispetto a:

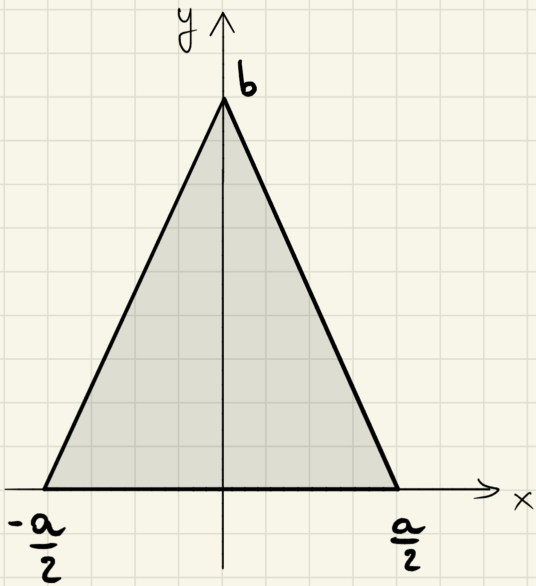
ⓐ una retta r passante per la sua base;

ⓑ una retta s passante per la sua altezza;

ⓒ una retta t parallela all'altezza e passante per uno dei vertici della base.



<u>Soluzione</u> **a** Poniamo un sistema di coordinate "comodo". Ad esempio, Oxy dove x è la retta r, y è la retta s e O è la loro intersezione



Il momento d'inerzia rispetto a r è il momento d'inerzia rispetto a x, che abbiamo chiamato A:

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mu (y^2 + z^2) \, d\mathcal{C} .$$

Nel nostro caso, $z \equiv 0$ perché il corpo è nel piano xy e perciò le coordinate di tutti i suoi punti hanno $z = 0$.

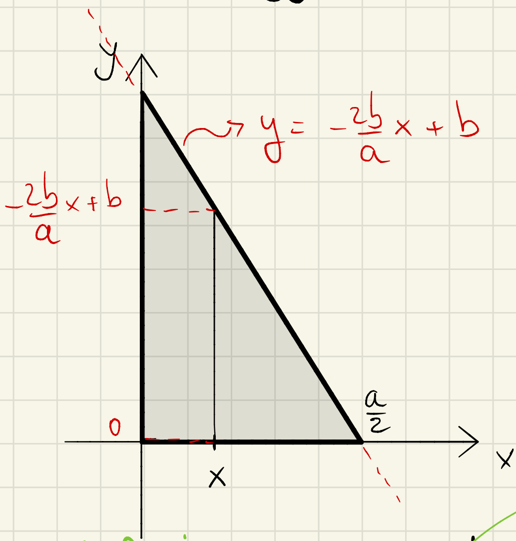
L' integrale è sul corpo $\mathcal{C}$, pertanto $d\mathcal{C}$ conterrà solo le variabili x e y:

$d\mathcal{C} = dxdy$.

<u>Osservazione</u>: poiché il corpo è simmetrico rispetto a y e la funzione integranda y^2 è pari, posso calcolare l' integrale moltiplicando per 2 l'integrale solo su metà triangolo:

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mu y^2 \, dxdy = 2 \int_{\frac{1}{2}\mathcal{C}} \mu y^2 dxdy .$$

A questo punto posso calcolare l' integrale. Poiché il dominio non è rettangolare, gli estremi di una delle due variabili di integrazione dipenderanno dall' altra. Ad esempio, se il dominio di integrazione è la metà destra del triangolo, posso far variare la variabile x tra 0 e $\frac{a}{2}$; conseguentemente la y varierà tra 0 e $-\frac{2b}{a}x+b$.



porto fuori per omogeneità

risolvo prima questo!

$$\int_{\frac{1}{2}\mathcal{C}} \mu y^2\,dx\,dy = \mu\int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^{-\frac{2b}{a}x+b} y^2\,dy = \mu\int_0^{\frac{a}{2}} \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{-\frac{2b}{a}x+b} dx$$

$$= \frac{\mu}{3}\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\frac{2b}{a}x+b\right)^3 dx = \frac{\mu}{3}\left(-\frac{a}{2b}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(-\frac{2b}{a}x+b\right)^4\Big|_0^{\frac{a}{2}}$$

primitiva di

$m = \mu\cdot\frac{1}{2}ab$ ← MASSA del TRIANGOLO INTERO

$$= \frac{\mu}{12}\left(-\frac{a}{2b}\right)\left[\left(-\frac{2b}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}+b\right)^4 - b^4\right] = \frac{1}{24}\mu a b^3 = \frac{1}{12} m b^2$$

Concludiamo che $A = 2 \cdot \frac{1}{12} mb^2 = \frac{1}{6} mb^2$.

Osservazione: il risultato ottenuto ha effettivamente la dimensione di un mom. d'inerzia:

$$\left[\frac{1}{6} mb^2\right] = ML^2$$

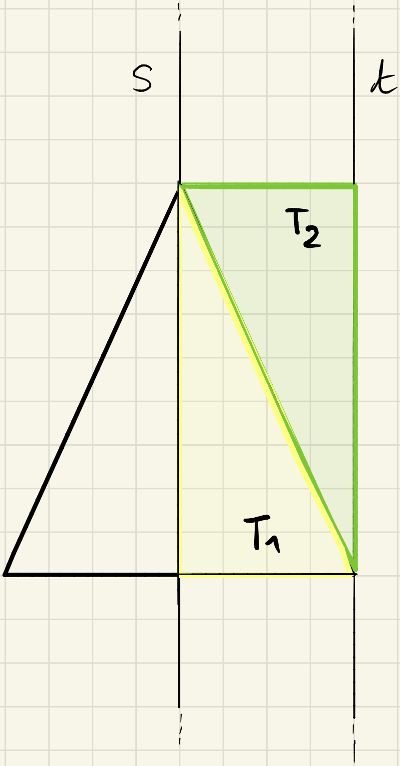
controllo utile da fare ogni volta

(b) E' possibile calcolare il momento d'inerzia analogamente a come fatto nel punto (a):

$$B = \int_{\mathcal{e}} \mu (x^2 + \underset{0}{\underset{|||}{z^2}}) \, dx\, dy = \int_{\mathcal{e}} \mu x^2 \, dx\, dy$$

$$= \ldots \text{ PER CASA } \ldots = \frac{1}{24} ma^2.$$

Noi seguiamo un'altra strada!



Sia $I^{(s)}_{T_1}$ il momento d'inerzia del semi-triangolo indicato con la lettera T_1 (la metà gialla).

Allora, come visto nel punto a,

$$B = 2\, I^{(s)}_{T_1} . \qquad (1)$$

Osserviamo che il rettangolo formato dall'unione dei triangoli giallo (T_1) e verde (T_2) ha momento d'inerzia rispetto a s dato da

$$(2) \quad I^{(s)}_{T_1 \cup T_2} = I^{(s)}_{T_1} + I^{(s)}_{T_2} ,$$ cioè la

somma dei momenti d'inerzia rispetto a s dei due triangoli T_1 e T_2.

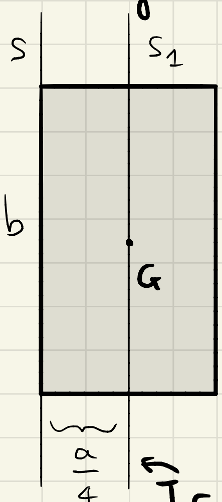
Osserviamo adesso che, poiché T_1 e T_2 sono triangoli identici, allora

$$(3) \quad I_{T_2}^{(s)} = I_{T_1}^{(t)}.$$

momento d'inerzia di T_2 rispetto a s

momento d'inerzia di T_1 rispetto a t

Ora, $I_{T_1 \cup T_2}^{(s)}$ è il momento d'inerzia di un rettangolo di base $\frac{a}{2}$ e altezza b rispetto a una retta passante per il lato di lunghezza b. Pertanto, applicando il teorema di Huygens:



massa del rettangolo $T_1 \cup T_2$ = massa del triangolo intero m

$$I_{T_1 \cup T_2}^{(s)} = I_G + m\left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{48}ma^2 + \frac{1}{16}ma^2$$

$$= \frac{1}{12}ma^2. \qquad (4)$$

$I_G = \frac{1}{12}m\left(\frac{a}{2}\right)^2$

Osserviamo che, mettendo insieme le relazioni (2), (3) e (4) si giunge a

$$I_{T_1}^{(s)} + I_{T_1}^{(t)} = \frac{1}{12} m a^2 . \qquad (5)$$

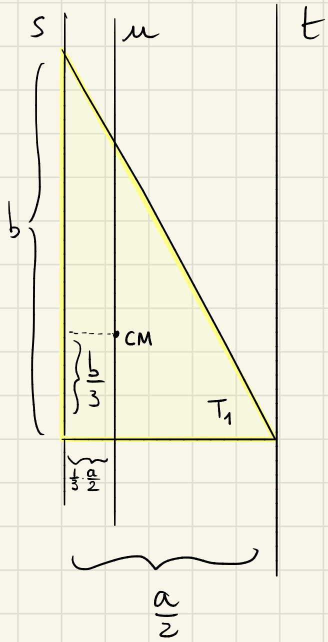
Applicando per due volte il teorema di Huygens:

mom. inerzia di T_1 rispetto alla retta parallela a s e passante per il Centro di Massa CM

$$\begin{cases} I_{T_1}^{(s)} = I_{CM} + m_{T_1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2 \\ I_{T_1}^{(t)} = I_{CM} + m_{T_1}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

massa di $T_1 = \frac{1}{2}$ massa rettangolo $= \frac{1}{2}M$

LE COORDINATE DI CM LE ABBIAMO CALCOLATE NELL'ES. 1



$$\Rightarrow \begin{cases} I_{T_1}^{(s)} = I_{CM} + \frac{1}{72} m a^2 \\ I_{T_1}^{(t)} = I_{CM} + \frac{1}{18} m a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I_{T_1}^{(t)} = I_{T_1}^{(s)} - \frac{1}{72} m a^2 + \frac{1}{18} m a^2 = I_{T_1}^{(s)} + \frac{1}{24} m a^2$$

Inserendo quest'ultima equazione nella (5), si arriva a:

$$2 I_{T_1}^{(s)} = \frac{1}{12} ma^2 - \frac{1}{24} ma^2$$

$$\Rightarrow 2 I_{T_1}^{(s)} = \frac{1}{24} ma^2$$

Poiché $B = 2 I_{T_1}^{(s)}$, concludiamo che

$$B = \frac{1}{24} ma^2$$

c) Poiché s passa per il centro di massa del triangolo, per calcolare il momento d'inerzia rispetto a t possiamo applicare il teorema di Huygens:

$$I^{(t)} = B + m \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 = \frac{7}{24} ma^2.$$

Osservazione: per calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z, perpendicolare al piano e passante per O, basta ricordare che in una figura piana vale $C = A + B$,

mom. d'inerzia risp. asse z

pertanto

$$C = \frac{1}{24} ma^2 + \frac{1}{6} mb^2 .$$