Metodi di Newton per MPE: Tagli.

Luca Ferragina

Università di Pisa

14 Novembre 2016

Sommario

Definizione

Sia Φ la funzione $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{C}^{m\times m} \times \mathbb{C}^{m\times m} \mapsto \mathbb{C}^{m\times m}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} \Phi(i,0)(X,Y) = X^i \\ \Phi(0,j)(X,Y) = Y^j \\ \Phi(i,j)(X,Y) = X\Phi(i-1,j)(X,Y) + Y\Phi(i,j-1)(X,Y) \end{cases}$$

con $i, j \in \mathbb{N}$.

Per i, j, X, Y fissati, $\Phi(i,j)(X,Y)$ rappresenta la somma di tutti i possibili prodotti fra i copie di X e j copie di Y.

Definizione

Sia Φ la funzione $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{C}^{m\times m} \times \mathbb{C}^{m\times m} \mapsto \mathbb{C}^{m\times m}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} \Phi(i,0)(X,Y) = X^i \\ \Phi(0,j)(X,Y) = Y^j \\ \Phi(i,j)(X,Y) = X\Phi(i-1,j)(X,Y) + Y\Phi(i,j-1)(X,Y) \end{cases}$$

con $i,j \in \mathbb{N}$.

Per i,j,X,Y fissati, $\Phi(i,j)(X,Y)$ rappresenta la somma di tutti i possibili prodotti fra i copie di X e j copie di Y.

Proprietà

- $\Phi(0,0)(X,Y) = I_m$
- $\Phi(n,1)(X,Y) = \sum_{p=0}^{n} X^{n-p} Y X^p$
- La seguente quantità è ben definita

$$(\Phi(p,q) + \Phi(r,s))(X,Y) := \Phi(p,q)(X,Y) + \Phi(r,s)(X,Y)$$

Proposizione

Siano $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Allora per $n = 1, 2, \ldots$ vale che

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \Phi(n-i, i)(A, B)$$

Proprietà

- $\Phi(0,0)(X,Y) = I_m$
- $\Phi(n,1)(X,Y) = \sum_{p=0}^{n} X^{n-p} Y X^{p}$
- La seguente quantità è ben definita

$$(\Phi(p,q) + \Phi(r,s))(X,Y) := \Phi(p,q)(X,Y) + \Phi(r,s)(X,Y)$$

Proposizione

Siano $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Allora per $n = 1, 2, \dots$ vale che

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \Phi(n-i,i)(A,B)$$

Proprietà

- $\Phi(0,0)(X,Y) = I_m$
- $\Phi(n,1)(X,Y) = \sum_{p=0}^{n} X^{n-p} Y X^p$
- La seguente quantità è ben definita

$$(\Phi(p,q)+\Phi(r,s))(X,Y) := \Phi(p,q)(X,Y) + \Phi(r,s)(X,Y)$$

Proposizione

Siano $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Allora per $n = 1, 2, \dots$ vale che

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \Phi(n-i,i)(A,B)$$

Proprietà

- $\Phi(0,0)(X,Y) = I_m$
- $\Phi(n,1)(X,Y) = \sum_{p=0}^{n} X^{n-p} Y X^p$
- La seguente quantità è ben definita

$$(\Phi(p,q) + \Phi(r,s))(X,Y) := \Phi(p,q)(X,Y) + \Phi(r,s)(X,Y)$$

Proposizione

Siano $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Allora per $n = 1, 2, \ldots$ vale che

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \Phi(n-i,i)(A,B)$$

Proprietà

- $\Phi(0,0)(X,Y) = I_m$
- $\Phi(n,1)(X,Y) = \sum_{p=0}^{n} X^{n-p} Y X^p$
- La seguente quantità è ben definita

$$(\Phi(p,q) + \Phi(r,s))(X,Y) := \Phi(p,q)(X,Y) + \Phi(r,s)(X,Y)$$

Proposizione

Siano $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Allora per $n = 1, 2, \ldots$ vale che

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \Phi(n-i,i)(A,B)$$

Dimostrazione.

Il caso $n = 0$ è banale. Supponiamo l'enunciato vero per n, allora:

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= [A\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i) + B\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i)](A,B) \\
&= [A\Phi(n,0) + B\Phi(0,n) + \\
&\sum_{i=1}^{n} A\Phi(n-i,i) + B\Phi(n+1-i,i-1)](A,B) \\
&= [\Phi(n+1,0) + \Phi(0,n+1) + \\
&\sum_{i=1}^{n}\Phi(n-i+1,i)](A,B) = \sum_{i=0}^{n+1}\Phi(n+1-i,i)(A,B).
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

Il caso $n = 0$ è banale. Supponiamo l'enunciato vero per n, allora:

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= [A\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i) + B\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i)](A,B) \\
&= [A\Phi(n,0) + B\Phi(0,n) + \\
&\sum_{i=1}^{n} A\Phi(n-i,i) + B\Phi(n+1-i,i-1)](A,B) \\
&= [\Phi(n+1,0) + \Phi(0,n+1) + \\
&\sum_{i=1}^{n}\Phi(n-i+1,i)](A,B) = \sum_{i=0}^{n+1}\Phi(n+1-i,i)(A,B).
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

Il caso $n = 0$ è banale. Supponiamo l'enunciato vero per n, allora:

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= [A\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i) + B\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i)](A,B) \\
&= [A\Phi(n,0) + B\Phi(0,n) + \\
&\sum_{i=1}^{n} A\Phi(n-i,i) + B\Phi(n+1-i,i-1)](A,B) \\
&= [\Phi(n+1,0) + \Phi(0,n+1) + \\
&\sum_{i=1}^{n}\Phi(n-i+1,i)](A,B) = \sum_{i=0}^{n+1}\Phi(n+1-i,i)(A,B).
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

Il caso $n = 0$ è banale. Supponiamo l'enunciato vero per n, allora:

$$(A+B)^{n+1} = [A\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i) + B\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i)](A,B)$$

$$= [A\Phi(n,0) + B\Phi(0,n) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} A\Phi(n-i,i) + B\Phi(n+1-i,i-1)](A,B)$$

$$= [\Phi(n+1,0) + \Phi(0,n+1) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi(n-i+1,i)](A,B) = \sum_{i=0}^{n+1}\Phi(n+1-i,i)(A,B).$$

□

Dimostrazione.

Il caso $n = 0$ è banale. Supponiamo l'enunciato vero per n, allora:

$$(A+B)^{n+1} = [A\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i) + B\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i)](A,B)$$
$$= [A\Phi(n,0) + B\Phi(0,n) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} A\Phi(n-i,i) + B\Phi(n+1-i,i-1)](A,B)$$
$$= [\Phi(n+1,0) + \Phi(0,n+1) +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\Phi(n-i+1,i)](A,B) = \sum_{i=0}^{n+1}\Phi(n+1-i,i)(A,B).$$

Dimostrazione.

Il caso $n = 0$ è banale. Supponiamo l'enunciato vero per n, allora:

$$\begin{aligned}(A+B)^{n+1} &= [A\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i) + B\sum_{i=0}^{n}\Phi(n-i,i)](A,B)\\ &= [A\Phi(n,0) + B\Phi(0,n) +\\ &\sum_{i=1}^{n} A\Phi(n-i,i) + B\Phi(n+1-i,i-1)](A,B)\\ &= [\Phi(n+1,0) + \Phi(0,n+1) +\\ &\sum_{i=1}^{n}\Phi(n-i+1,i)](A,B) = \sum_{i=0}^{n+1}\Phi(n+1-i,i)(A,B).\end{aligned}$$

$\square$

$$
\begin{aligned}
P(X + tH) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X + tH)^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} A_p \Phi(p-q, q)(X, tH) \\
&= \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q, q)(X, tH) \\
&= \left[\sum_{p=0}^{n} A_p \Phi(p, 0) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1, 1) \right] (X, tH) + G(tH) \\
&= P(X) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1, 1)(X, tH) + G(tH)
\end{aligned}
$$

con $G(tH) = \sum_{q=2}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q, q)(X, tH)$

$$
\begin{aligned}
P(X+tH) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X+tH)^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \left[\sum_{p=0}^{n} A_p \Phi(p,0) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1) \right](X,tH) + G(tH) \\
&= P(X) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1)(X,tH) + G(tH)
\end{aligned}
$$

con $G(tH) = \sum_{q=2}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH)$

$$
\begin{aligned}
P(X+tH) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X+tH)^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \left[\sum_{p=0}^{n} A_p \Phi(p,0) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1) \right] (X,tH) + G(tH) \\
&= P(X) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1)(X,tH) + G(tH)
\end{aligned}
$$

con $G(tH) = \sum_{q=2}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH)$

$$\begin{aligned}
P(X+tH) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X+tH)^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \left[\sum_{p=0}^{n} A_p \Phi(p,0) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1) \right] (X,tH) + G(tH) \\
&= P(X) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1)(X,tH) + G(tH)
\end{aligned}$$

con $G(tH) = \sum_{q=2}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH)$

$$
\begin{aligned}
P(X+tH) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X+tH)^p \\
&= \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \left[\sum_{p=0}^{n} A_p \Phi(p,0) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1)\right](X,tH) + G(tH) \\
&= P(X) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1)(X,tH) + G(tH)
\end{aligned}
$$

con $G(tH) = \sum_{q=2}^{n}\sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH)$

$$
\begin{aligned}
P(X+tH) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X+tH)^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH) \\
&= \left[\sum_{p=0}^{n} A_p \Phi(p,0) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1) \right] (X,tH) + G(tH) \\
&= P(X) + \sum_{p=1}^{n} A_p \Phi(p-1,1)(X,tH) + G(tH)
\end{aligned}
$$

con $G(tH) = \sum_{q=2}^{n} \sum_{p=q}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,tH)$

Lemma (4)

Siano X e H matrici non negative e sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$, allora

$$P(X + \alpha H) \geq P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H)$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
P(X+\alpha H) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X+\alpha H)^p = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \\
&= \sum_{p=0}^{n} A_p \Big(\Phi(p,0)(X,\alpha H) + \Phi(p-1,1)(X,\alpha H) \\
&\quad + \sum_{q=2}^{n} \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \Big) \\
&= P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H) + \sum_{p=2}^{n}\sum_{q=2}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \\
&\geq P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

$$P(X+\alpha H) = \sum_{p=0}^{n} A_p (X+\alpha H)^p = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} A_p \Big(\Phi(p,0)(X,\alpha H) + \Phi(p-1,1)(X,\alpha H)$$

$$+ \sum_{q=2}^{n} \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \Big)$$

$$= P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H) + \sum_{p=2}^{n}\sum_{q=2}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H)$$

$$\geq P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H)$$

Dimostrazione.

$$P(X+\alpha H) = \sum_{p=0}^{n} A_p (X+\alpha H)^p = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} A_p \Big(\Phi(p,0)(X,\alpha H) + \Phi(p-1,1)(X,\alpha H)$$

$$+ \sum_{q=2}^{n} \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \Big)$$

$$= P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H) + \sum_{p=2}^{n}\sum_{q=2}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H)$$

$$\geq P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H)$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
P(X+\alpha H) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X+\alpha H)^p = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \\
&= \sum_{p=0}^{n} A_p \Big(\Phi(p,0)(X,\alpha H) + \Phi(p-1,1)(X,\alpha H) \\
&\quad + \sum_{q=2}^{n} \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \Big) \\
&= P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H) + \sum_{p=2}^{n}\sum_{q=2}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \\
&\geq P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
P(X+\alpha H) &= \sum_{p=0}^{n} A_p (X+\alpha H)^p = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \\
&= \sum_{p=0}^{n} A_p \Big(\Phi(p,0)(X,\alpha H) + \Phi(p-1,1)(X,\alpha H) \\
&+ \sum_{q=2}^{n} \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \Big) \\
&= P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H) + \sum_{p=2}^{n}\sum_{q=2}^{n} A_p \Phi(p-q,q)(X,\alpha H) \\
&\geq P(X) + \alpha \mathcal{D}_X(H)
\end{aligned}
$$

□

Proposizione

Se esiste una Y matrice non negativa tale che $P(Y) \leq 0$, per ogni X tale che $Y > X \geq 0$ e $P(X) \geq 0$ definiamo λ e H tramite $\mathcal{D}_X(H) = -P(X)$ e

$$\lambda := \min \left\{ \frac{[P(X)]_{ij} + [P(X^+)]_{ij}}{[P(X)]_{ij}} : [P(X)]_{ij} > 0 \right\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- *$X^{++} := (X^+)^+$ è ben definito.*
- *$X^+ \leq X + \lambda H < Y$.*
- *$P(X + \lambda H) \geq 0$.*

Proposizione

Se esiste una Y matrice non negativa tale che $P(Y) \leq 0$, per ogni X tale che $Y > X \geq 0$ e $P(X) \geq 0$ definiamo λ e H tramite $\mathcal{D}_X(H) = -P(X)$ e

$$\lambda := \min \left\{ \frac{[P(X)]_{ij} + [P(X^+)]_{ij}}{[P(X)]_{ij}} : [P(X)]_{ij} > 0 \right\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $X^{++} := (X^+)^+$ *è ben definito.*
- $X^+ \leq X + \lambda H < Y$.
- $P(X + \lambda H) \geq 0$.

Proposizione

Se esiste una Y *matrice non negativa tale che* $P(Y) \leq 0$, *per ogni* X *tale che* $Y > X \geq 0$ *e* $P(X) \geq 0$ *definiamo* λ *e* H *tramite* $\mathcal{D}_X(H) = -P(X)$ *e*

$$\lambda := \min \left\{ \frac{[P(X)]_{ij} + [P(X^+)]_{ij}}{[P(X)]_{ij}} : [P(X)]_{ij} > 0 \right\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $X^{++} := (X^+)^+$ *è ben definito.*
- $X^+ \leq X + \lambda H < Y$.
- $P(X + \lambda H) \geq 0$.

Proposizione

Se esiste una Y matrice non negativa tale che $P(Y) \leq 0$, per ogni X tale che $Y > X \geq 0$ e $P(X) \geq 0$ definiamo λ e H tramite $\mathcal{D}_X(H) = -P(X)$ e

$$\lambda := \min \left\{ \frac{[P(X)]_{ij} + [P(X^+)]_{ij}}{[P(X)]_{ij}} : [P(X)]_{ij} > 0 \right\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $X^{++} := (X^+)^+$ *è ben definito.*
- $X^+ \leq X + \lambda H < Y$.
- $P(X + \lambda H) \geq 0$.

Proposizione

Se esiste una Y matrice non negativa tale che $P(Y) \leq 0$, per ogni X tale che $Y > X \geq 0$ e $P(X) \geq 0$ definiamo λ e H tramite $\mathcal{D}_X(H) = -P(X)$ e

$$\lambda := \min\left\{\frac{[P(X)]_{ij} + [P(X^+)]_{ij}}{[P(X)]_{ij}} : [P(X)]_{ij} > 0\right\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $X^{++} := (X^+)^+$ *è ben definito.*
- $X^+ \leq X + \lambda H < Y$.
- $P(X + \lambda H) \geq 0$.

Proposizione

Se esiste una Y matrice non negativa tale che $P(Y) \leq 0$, per ogni X tale che $Y > X \geq 0$ e $P(X) \geq 0$ definiamo λ e H tramite $\mathcal{D}_X(H) = -P(X)$ e

$$\lambda := \min \left\{ \frac{[P(X)]_{ij} + [P(X^+)]_{ij}}{[P(X)]_{ij}} : [P(X)]_{ij} > 0 \right\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $X^{++} := (X^+)^+$ *è ben definito.*
- $X^+ \leq X + \lambda H < Y$.
- $P(X + \lambda H) \geq 0$.

Proposizione

Se esiste una Y matrice non negativa tale che $P(Y) \leq 0$, per ogni X tale che $Y > X \geq 0$ e $P(X) \geq 0$ definiamo λ e H tramite $\mathcal{D}_X(H) = -P(X)$ e

$$\lambda := \min \left\{ \frac{[P(X)]_{ij} + [P(X^+)]_{ij}}{[P(X)]_{ij}} : [P(X)]_{ij} > 0 \right\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $X^{++} := (X^+)^+$ *è ben definito.*
- $X^+ \leq X + \lambda H < Y$.
- $P(X + \lambda H) \geq 0$.

Proposizione

Se esiste una Y *matrice non negativa tale che* $P(Y) \leq 0$*, per ogni* X *tale che* $Y > X \geq 0$ *e* $P(X) \geq 0$ *definiamo* λ *e* H *tramite* $\mathcal{D}_X(H) = -P(X)$ *e*

$$\lambda := \min \left\{ \frac{[P(X)]_{ij} + [P(X^+)]_{ij}}{[P(X)]_{ij}} : [P(X)]_{ij} > 0 \right\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $X^{++} := (X^+)^+$ *è ben definito.*
- $X^+ \leq X + \lambda H < Y$.
- $P(X + \lambda H) \geq 0$.

Dimostrazione.

- Per il lemma (3), $-D_X$ è una M-matrice non singolare e $X \leq X^+ < Y$
- Per il lemma (4), si ha $P(X+H) \geq P(X) + \mathcal{D}_X(H) = 0$, quindi $\lambda \geq 1$ e $X^+ \leq X_\lambda := X + \lambda H$
- Per il lemma (3), $-D_{X^+}$ è una M-matrice non singolare e $X^{++} = X^+ + K$ dove

$$\mathcal{D}_{X^+}(K) = P(X^+)$$

e inoltre vale $X^{++} < Y$.

Dimostrazione.

- Per il lemma (3), $-D_X$ è una M-matrice non singolare e $X \leq X^+ < Y$
- Per il lemma (4), si ha $P(X+H) \geq P(X) + \mathcal{D}_X(H) = 0$, quindi $\lambda \geq 1$ e $X^+ \leq X_\lambda := X + \lambda H$
- Per il lemma (3), $-D_{X^+}$ è una M-matrice non singolare e $X^{++} = X^+ + K$ dove

$$\mathcal{D}_{X^+}(K) = P(X^+)$$

e inoltre vale $X^{++} < Y$.

Dimostrazione.

- Per il lemma (3), $-D_X$ è una M-matrice non singolare e $X \leq X^+ < Y$
- Per il lemma (4), si ha $P(X+H) \geq P(X) + \mathcal{D}_X(H) = 0$, quindi $\lambda \geq 1$ e $X^+ \leq X_\lambda := X + \lambda H$
- Per il lemma (3), $-D_{X^+}$ è una M-matrice non singolare e $X^{++} = X^+ + K$ dove

$$\mathcal{D}_{X^+}(K) = P(X^+)$$

e inoltre vale $X^{++} < Y$.

Dimostrazione.

- Per il lemma (3), $-D_X$ è una M-matrice non singolare e $X \leq X^+ < Y$
- Per il lemma (4), si ha $P(X+H) \geq P(X) + \mathcal{D}_X(H) = 0$, quindi $\lambda \geq 1$ e $X^+ \leq X_\lambda := X + \lambda H$
- Per il lemma (3), $-D_{X^+}$ è una M-matrice non singolare e $X^{++} = X^+ + K$ dove

$$\mathcal{D}_{X^+}(K) = P(X^+)$$

e inoltre vale $X^{++} < Y$.

Dimostrazione.

- Per il lemma (3), $-D_X$ è una M-matrice non singolare e $X \leq X^+ < Y$
- Per il lemma (4), si ha $P(X+H) \geq P(X) + \mathcal{D}_X(H) = 0$, quindi $\lambda \geq 1$ e $X^+ \leq X_\lambda := X + \lambda H$
- Per il lemma (3), $-D_{X^+}$ è una M-matrice non singolare e $X^{++} = X^+ + K$ dove

$$\mathcal{D}_{X^+}(K) = P(X^+)$$

e inoltre vale $X^{++} < Y$.

Dimostrazione.

- Per il lemma (3), $-D_X$ è una M-matrice non singolare e $X \leq X^+ < Y$
- Per il lemma (4), si ha $P(X+H) \geq P(X) + \mathcal{D}_X(H) = 0$, quindi $\lambda \geq 1$ e $X^+ \leq X_\lambda := X + \lambda H$
- Per il lemma (3), $-D_{X^+}$ è una M-matrice non singolare e $X^{++} = X^+ + K$ dove

$$\mathcal{D}_{X^+}(K) = P(X^+)$$

e inoltre vale $X^{++} < Y$.

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}
$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$
\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\le -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \le 0
\end{aligned}
$$

Quindi $Y > X^{++} \ge X_\lambda$.

$$
\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\ge P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\ge P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \ge 0
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}
$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$
\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}
$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$
\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda)\\ &= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X)\\ &\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X)\\ &= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0\end{aligned}$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$\begin{aligned}P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H)\\ &\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H)\\ &\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H)\\ &= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0\end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}
$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$
\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_X(X^{++} - X_\lambda) &= \mathcal{D}_X(X + H + K) - \mathcal{D}_X(X + \lambda) \\
&= -P(X) + \mathcal{D}_X(K) + \lambda P(X) \\
&\leq -P(X) + \mathcal{D}_{X^+}(K) + \lambda P(X) \\
&= -P(X) - P(X^+) + \lambda P(X) \leq 0
\end{aligned}$$

Quindi $Y > X^{++} \geq X_\lambda$.

$$\begin{aligned}
P(X + \lambda H) &= P(X + H + (\lambda - 1)H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_{X^+}(H) \\
&\geq P(X^+) + (\lambda - 1)\mathcal{D}_X(H) \\
&= P(X^+) + P(X) - \lambda P(X) \geq 0
\end{aligned}$$

$\square$