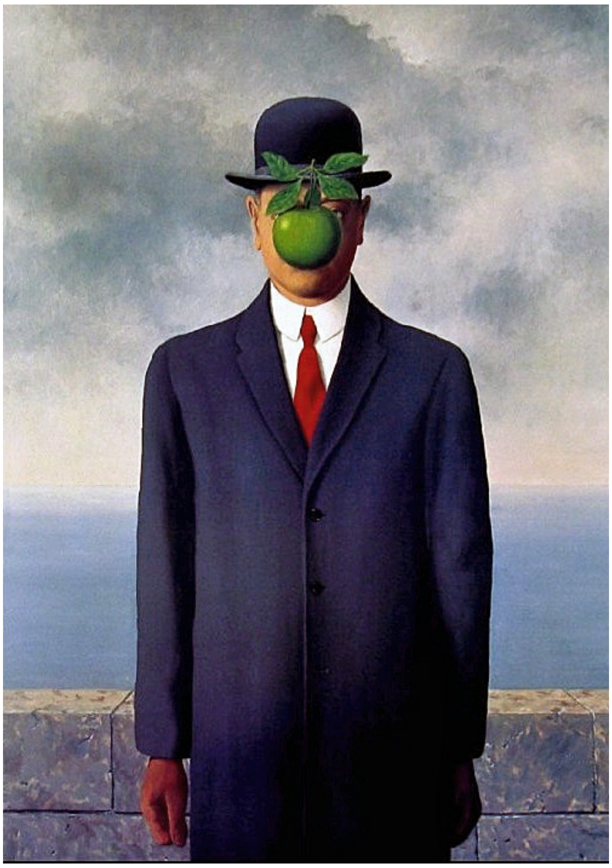
Liceo Statale Alessandro Volta

Colle Val d'Elsa (SI)

Indirizzo Scientifico Tradizionale



Tesina di Maturità

Matematica oltre i numeri

Studente: Valentina Firicano

Anno Scolastico 2016/2017

"Ebbene, qui abbiamo qualcosa di apparentemente visibile poiché la mela nasconde ciò che è nascosto e visibile allo stesso tempo, ovvero il volto della persona. Questo processo avviene infinitamente. Ogni cosa che noi vediamo ne nasconde un'altra; noi vogliamo sempre vedere quello che è nascosto da ciò che vediamo. Proviamo interesse in quello che è nascosto e in ciò che il visibile non ci mostra. Questo interesse può assumere la forma di un sentimento letteralmente intenso, un tipo di disputa, potrei dire, fra ciò che è nascosto e visibile e l'apparentemente visibile"
René Magritte, Il figlio dell'uomo, olio su tela, 1964

nùmero s.m.[dal lat. numĕrus; cfr. novero]. -1. Ciascuno degli enti astratti che rappresentano insiemi di unità, ordinati in una successione infinita (serie naturale dei n.) nella quale ogni elemento conta un'unità in più rispetto al precedente; tali enti, fatti corrispondere ciascuno a ciascuno degli oggetti che costituiscono un insieme, servono a contarli (numerarli), e quindi a indicarne la quantità (anch'essa detta numero): il n. dei libri, dei voti, delle automobili in circolazione, degli alunni di una scuola; il loro n. è di novanta; sono in n. di (arrivano al n. di, superano il n. di) trecento; oppure a indicare il posto occupato da un singolo oggetto in una serie (n. d'ordine): la sua sedia è il n. 15 della terza fila. In usi assol., seguito dal nome del numero, quando si consideri il numero in sé, come ente astratto, non riferito a oggetti: il n. 5, il n. 11, il n. 999, ecc.; si ritiene che il n. 13 porti fortuna (spesso numero è sottinteso: il 13 porta fortuna; il 3 è un n. perfetto).

Vocabolario Treccani

Indice

Introduzione

Perché abbiamo la certezza che i numeri siano infiniti?
E che la matematica sia vera, così come le sue componenti?
Perché la matematica è utile nello studio della natura?
La nostra fiducia nella matematica è razionale o un'idea condivisa e assunta per vera senza dimostrazioni valide?

La filosofia della matematica si sviluppa nel XX secolo e si propone come scopo quello di rispondere a domande di questo tipo. La matematica infatti è la più peculiare di tutte le scienze, poiché studia e fa uso esclusivamente di oggetti astratti; per questo i filosofi si sono sempre serviti di essa per affermare il proprio pensiero (da Pitagora, Aristotele fino a Kant e avanti ancora). Nel '900 però, anche questa certezza millenaria viene messa in discussione (come effettivamente tutto in quel secolo) e da lì ne derivano pensieri interessanti, alcuni dei quali saranno presentati in questa breve panoramica sulla materia.
Il filosofo della matematica ragiona sui termini e gli oggetti specifici della matematica, sulle relazioni e le sue specificità. Questa disciplina è strettamente relazionata alle branche dell'ontologia, metafisica ed epistemologia. Trovandosi però a lavorare con una materia affermata e che trova larghe applicazioni in tutte le altre scienze, la maggior parte dei filosofi che la studiano si limitano a darne un'interpretazione piuttosto che una critica[1][2]. Tra i pensatori più influenti del secolo troviamo Frege, con l'invenzione della logica matematica, Hilbert con la costruzione dei suoi problemi, Russell, Wittgenstein, Wigner etc. In particolare, la diffusione delle geometrie non-euclidee e la conseguente sfiducia nel Kantismo hanno portato numerosi filosofi a cercare un'alternativa valida al *sintetico a priori*. Le scuole di pensiero nate all'inizio del XX secolo sono *l'istituzionismo*, il *logicismo* e il *formalismo*.
Come precedentemente affermato, il fatto che questa disciplina si sia sviluppata proprio nel '900 è un'altra delle conseguenze della crisi intellettuale dell'epoca che coinvolse anche il crollo della fiducia nella ragione. Grande rilevanza in questo fenomeno ebbe la fisica, con la scoperta della relatività e gli studi sulla radioattività, ma anche l'avvento della psicanalisi da parte di Freud. Tutto ciò ebbe grande riscontro sul modo di pensare, ma anche alla figura stessa di intellettuale. Anche in campo artistico e letterario, questa

[1] "Rinunciare alle classi significa rinunciare alla matematica. Questo non funzionerebbe. La matematica è un'azienda solida e avviata. La filosofia è più traballante che mai. Rinunciare alla matematica per ragioni filosofiche sarebbe assurdo. Se noi filosofi siamo dannatamente perplessi dalle classi, che costituiscono la realtà matematica, questo è un nostro problema. Non dovremmo aspettare che la matematica se ne vada per renderci la vita più facile. Anche se rifiutiamo la matematica in modo delicato, spiegando come possa essere un'utilissima finzione, 'buona senza essere vera', la stiamo comunque rifiutando, e questo è comunque assurdo [...]. Rido della presunzione di rifiutare la matematica per ragioni filosofiche. Con che faccia andreste a dire ai matematici che devono andare a cambiare il loro modo di fare, e abiurare un numero incalcolabile di errori, ora che la filosofia ha scoperto che non esistono le classi? Avreste la faccia tosta di dirgli di seguire gli argomenti filosofici ovunque conducano? Se mettono in discussione le vostre credenziali, vi vanterete delle grandi scoperte filosofiche: che il movimento è impossibile, che un essere, tale che non è possibile concepirne uno maggiore, non si può pensare che non esista, che non si può pensare che qualcosa esista al di fuori del pensiero, [...], e avanti così, fino alla nausea? Io no di certo! " (cfr Lewis, 1998)

[2] "[...] Mi è impossibile, come filosofo, parlare di matematica perché mi occuperò soltanto di certi rompicapi che nascono dalle parole del nostro comune linguaggio quotidiano [...]. Conosco il nostro linguaggio di tutti i giorni: ecco una ragione per cui posso parlare di matematica in questi termini' ' (cfr L. Wittgenstein, 1993)

instabilità fu evidente; si prenda ad esempio il decadentismo, l'ermetismo (a seguire) e le avanguardie artistiche (futurismo, dadaismo, surrealismo etc.).
Un aspetto che vorrei mettere in evidenza consiste nella riflessione sul nostro primo approccio con la matematica. Da bambini infatti, ad ognuno di noi viene insegnato ad associare un numero ad una quantità di oggetti. L'atteggiamento infantile quindi nei confronti della materia è concreto e *quantitativo*; procedendo con gli studi, l'aspetto concreto viene meno tramite un processo di astrazione che tende a privarne degli elementi sensibili fino ad una totale perdita di questi, arrivando ad interiorizzare e lavorare solo con concetti astratti (primi tra tutti, i postulati).

La ragione per cui ho scelto di trattare questo argomento è strettamente collegata alla mia indecisione sull'università. Essendo ugualmente interessata a proseguire studi sia umanisti che scientifici, verso dicembre sono entrata in crisi. L'idea di dovermi specializzare in uno dei due settori trascurando l'altro non mi appagava particolarmente. Andando avanti con il programma di filosofia, notai però come numerosi filosofi avessero conseguito sia studi scientifici che umanisti, e come molti si fossero interessati alla matematica; parallelamente, parlando con alcuni studenti ed ex studenti di matematica sono venuta a sapere che molti di loro avevano pensato di frequentare la facoltà di filosofia. Questo particolare collegamento mi ha fatto riflettere sul profondo rapporto che da sempre esiste tra le due discipline, e mi ha appassionato notevolmente.

Capitolo 1 o 1 capitolo?

Argomentazione ontologica

Passaggi fallaci Alla domanda 'esistono i numeri?', si potrebbe rispondere semplicemente di sì, adducendo una motivazione di questo tipo, logica e apparentemente corretta:

1. La VB è composta da 21 ragazzi
2. Il numero dei ragazzi da cui è composta la VB è 21
3. C'è un numero che è il numero dei ragazzi da cui è composta la VB, ossia il 21
4. Ci sono dei numeri, tra cui il 21

Ho precedentemente specificato 'apparentemente', poiché questo ragionamento di fatto è sbagliato. Secondo Hartry Field, è il passaggio da (1) a (2) ad essere scorretto, in quanto si introduce un sostantivo del quale non sappiamo niente di certo. Eguagliando le proposizioni (1) e (2) si sta infatti assumendo che i numeri esistano.

Tre modi di intendere $\exists$ (esiste)

Senso leggero e senso forte Hofweber e Dorr svilupparono una prima strategia, quella cioè di sostenere che il quantificatore esistenziale '$\exists$' non abbia solo il ruolo di esprimere il proprio impegno ontologico, ma anche un'accezione più 'leggera'. Avrebbe quindi senso dire che i numeri esistano in senso leggero, ma non in senso forte. Secondo i teorici del doppio significato, non c'è niente di logicamente sbagliato nell'affermazione precedente, se assumiamo l'esistenza dei numeri in senso leggero. Alle perplessità su questa strategia, i filosofi impegnati in essa rispondono che la nozione di impegno ontologico è spiegata in riferimento ad alcuni usi; in analogia con il quantificatore esistenziale può essere accostata una qualunque categoria di espressioni linguistiche. Ad esempio, quando utilizziamo il plurale per indicare un'azione svolta in un gruppo di persone, possiamo voler dire che l'azione è stata sia collaborativa che individuale: quando diciamo che gli alunni hanno svolto un esercizio possiamo intendere che l'abbiano svolto in gruppo o singolarmente.
Possiamo chiamare *ruolo inferenziale* il modo in cui il quantificatore esistenziale viene utilizzato all'interno di una certa pratica linguistica, quella di passare da certi enunciati ad altri, dove il 'passaggio' da un insieme di premesse ad una conclusione viene chiamato 'inferenza'. Un altro modo per usare il quantificatore è per fissare determinate *condizioni del dominio di discorso*, ovvero fornire informazioni su com'è fatto il mondo, quali tipi di oggetti contiene, ossia cosa esiste. In questi casi, si può parlare anche di uso *referenziale* o *oggettuale* del quantificatore.

Esistenza e metafora Secondo Stephen Yablo esiste una distinzione tra usi seri del quantificatore, o *letterali* del linguaggio, e usi 'non seri' o *metaforici.* Quando ad esempio asseriamo che uno studente medio studia due ore al giorno non intendiamo letteralmente uno studente 'medio', in quanto non esiste alcuno studente medio; parafrasando la nostra affermazione possiamo dire che, facendo una media tra le ore di studio di un gruppo di

ragazzi in una settimana, questa risulta essere di due ore al giorno.
Questo tipo di parafrasi non è sempre fattibile, soprattutto parlando di matematica. Per questo, Yablo non intende negare l'esistenza di tali oggetti, ma solo che gli enunciati aritmetici non si impegnano necessariamente all'esistenza o meno dei numeri. Secondo il filosofo, i problemi ontologici sarebbero circolari e quindi senza una soluzione diretta. La critica più comune a questo approccio è che, mancando dei criteri definiti per stabilire quando il linguaggio quantificazionale vada inteso in senso metaforico, ha poco senso applicare questa distinzione.

L'eresia Meinonghiana La posizione dei meinonghiani (che prendono il nome dal filosofo Alexius Meinong) è riassunta nella tesi secondo cui:

Qualcosa non esiste

da cui segue la conclusione antiquiniana che:

Non tutto esiste.

Negare che tutto esista è contraddittorio per Quine, il quale intende il predicato 'esistere' come 'essere identici a qualcosa'

$$\exists y(x = y) \tag{1.1}$$

e, dal momento che ogni cosa è identica a se stessa, tutto esiste:

$$\forall x(x = x) \to \forall x \exists y(x = y). \tag{1.2}$$

Per evitare questa conclusione, Meinong introduce un altro modo di intendere l'esistenza come predicato primitivo, indicato dal simbolo Ex; il quantificatore 'per qualche x...' viene reso con il simbolo Σx e viene inteso in modo neutro: per almeno un oggetto, vale una certa condizione, ma questo non comporta che tale oggetto esista. Questo nuovo quantificatore può essere definito:

$$\exists x \Phi x = \Sigma x(Ex \ \& \ \Phi x) \tag{1.3}$$

Secondo il meinonghiano, dal momento che ogni cosa è identica a se stessa, ogni cosa è identica a qualcosa, dunque ogni cosa è una cosa. Una volta ammesso che delle cose non esistano, e quindi si possa quantificare su oggetti inesistenti, essi si possono anche contare. La matematica consiste nella descrizione di un mondo di oggetti astratti che non esistono, ma di cui si possono dire cose *vere*.

La tesi di Quine

Quine pensava che per risolvere le questioni ontologiche si dovesse:

1. formulare le nostre migliori teorie scientifiche in notazione canonica (cioè linguaggio logico del primo ordine);
2. prendere nota degli impegni ontologici delle teorie così riformulate;
3. accettare questi impegni ontologici (e solo questi).

Nel passaggio 1 è necessario, secondo Quine, riscrivere tutte le teorie che si vogliono analizzare in notazione logica così da poterne indagare gli impegni ontologici in modo definitivo. Il linguaggio quotidiano infatti, risulta essere estremamente impreciso ed incompleto, oltre che ambiguo. Nel caso 2, una volta compiuta la traduzione in notazione canonica, la risposta all'interrogativo circa gli impegni ontologici di una teoria ci è fornita dalla definizione di impegno ontologico [3]. La risposta a 3 è la conseguenza della tesi filosofica chiamata da Quine 'naturalismo'; esso implica l'abbandono dell'obbiettivo della filosofia prima e il riconoscimento che all'interno della scienza stessa la realtà debba essere caratterizzata e descritta.

L'argomentazione di Quine Applicando questa strategia generale ai numeri, il filosofo è in grado di argomentare a favore dell'esistenza dei numeri traducendo in notazione canonica gli enunciati. Secondo Quine, parafrasando enunciati di questo tipo nel modo più naturale possibile, siamo costretti ad impegnarci ontologicamente all'esistenza dei numeri. L'argomento più utilizzato per sostenere la tesi dell'esistenza delle entità matematiche è conosciuto come *argomento di indispensabilità* di Quine-Putnam. Esso si presenta come un argomento *a posteriori*, basato su premesse empiriche. Sempre a favore del suo pensiero, Quine formulò la tesi che porta il nome di *olismo della conferma* secondo cui, quando alcuni dati forniscono ragioni per credere che una teoria sia corretta, queste sono ragioni per credere a tutte le ipotesi su cui la teoria si basa. Contro l'olismo della conferma, la filosofa Penelope Maddy sostiene che le teorie scientifiche con maggior impegno ontologico nei confronti di entità matematiche sono teorie piene di assunzioni provvisorie, fatte solo perché permettono di ottenere risultati corretti.

[3]"Se un enunciato E del linguaggio del primo ordine implica un enunciato dalla forma $\exists x F x$, allora E implica che ci sono delle cose di tipo F (ed è quindi ontologicamente impegnato alle cose di tipo F).

Sono 2 mele o 2 pere?

Argomentazione metafisica

L'argomento metafisico cerca di rispondere alla domanda "Che cosa sono i numeri (e gli altri oggetti matematici)?", e cioè che tipo di identità essi siano. Cosa significa esattamente che i numeri sono 'oggetti astratti'? In questo capitolo cercherò brevemente di riportare le scoperte e pensieri più influenti, evidenziandone punti di forza ed incongruenze.

Quattro vie

La discussione più articolata della questione metafisica fu condotta da David Lewis; egli ricondusse le strategie per riconoscere oggetti astratti da oggetti concreti a quattro 'vie'.

Via dell'esempio Nella via dell'esempio, si fa distinzione tra enti concreti e astratti, tracciandola elencando casi paradigmatici di oggetti che rientrano nelle due categorie. La tabella riportata mostra un esempio esplicativo:

Concreto	**Astratto**
I ragazzi della VB	Numeri, insiemi, funzioni
La mia copia della tesina	La tesina
Il suono che produco parlando	Proposizioni

Il problema che sorge con la via dell'esempio è però evidente, infatti le differenze tra oggetti astratti sono molte e con questo metodo non ci viene spiegato quali siano quelle rilevanti per decidere dove collocare un oggetto. Risulta quindi un metodo poco efficace e di dubbia utilità ai fini della ricerca filosofica.

Via della negazione Questa via cerca di cogliere nell'assenza di certe caratteristiche tipiche degli oggetti materiali il tratto distintivo delle entità astratte. I *numeri* non possono essere né visti né percepiti, e non producono alcun effetto tangibile e diretto sul mondo; essi mancano di una *collocazione spazio-temporale.*

Nonostante questo metodo risulti apparentemente più efficace, anch'esso presenta delle mancanze; infatti, non tutti gli oggetti astratti sono soggetti al *criterio di mancanza di collocazione*: questa tesina è astratta (come assunto sopra), nonostante ciò è possibile datarla nel tempo. Per ovviare al problema, fu considerato un ulteriore criterio, quello di *inerzia causale.* Questo mette in relazione eventi in base alla causa (un evento ne causa un altro). Anche quest'ultimo però risulta inefficace; infatti, se prendiamo ad esempio un'entità astratta come la goniometria, è tuttavia (anche) grazie al mio apprendimento di essa che sono arrivata in quinta liceo. Si può in un certo senso dire allora che la goniometria abbia partecipato alla mia promozione in modo diretto.

Via dell'assimilazione Secondo questa via, la distinzione tra concreto e astratto è la stessa che c'è tra individui e universali. Il problema fondamentale di questo pensiero è che non è scontato che i numeri non siano insiemi (non avendo definito né uno né l'altro), e neppure che tutti gli universali[4] siano astratti.

Via dell'astrazione Infine, la via dell'astrazione ritiene che un oggetto astratto sia ciò che si ottiene dal concreto quando vengono tralasciate tutte le sue caratteristiche tranne una, che viene quindi *astratta* da esso. In questo caso il problema sta nell'ambiguità di tale affermazione: non si specifica infatti né cosa significhi esattamente né come funzioni il processo di astrazione a cui si fa riferimento.

Strutturalismo eliminativista

Problema di Benacerraf Secondo Benacerraf, la natura degli oggetti matematici è in realtà del tutto indifferente alla nostra conoscenza e allo studio di questi, bensì è la loro *struttura* a risultare determinante. Una struttura può essere considerata come la forma comune a vari sistemi, intesa come *proprietà* di più oggetti. Essa è costituita da oggetti matematici addizionali che in qualche modo si sovrappongono all'insieme, consentendo di visualizzarlo, lavorarci, usarlo come strumento di calcolo e di assegnare uno specifico significato all'insieme e i suoi elementi.
Un paragone efficace può essere fatto prendendo in considerazione un treno a vagoni. Il primo, la locomotiva, sarà unico e per forza primo (analogamente lo 0); stabilita poi una relazione tra i vari vagoni, indipendentemente dalla loro forma, dimensione etc. avremo una disposizione precisa, studiabile e dalla quale è possibile ricavare proprietà. Esempio: se l'oggetto di studio dell'aritmetica è la struttura, allora i numeri sono posti in struttura. Poco ci importa cosa essi siano o se realmente esistano, al fine di poter applicare le leggi aritmetiche ci basta sapere che $2+3=5$ e $2<3$. Lo strutturalismo eliminativista fu ben espresso dal filosofo e matematico Bertrand Russell, il quale affermò: "In matematica non sappiamo di cosa stiamo parlando".[5] Ciò non implica che essa sia falsa, semplicemente aggira il problema ammettendo che sia impossibile (sennonché inutile) conoscere gli oggetti matematici, ma non risulta importante per la loro manipolazione; per il nostro utilizzo ci basta conoscere alcune caratteristiche, che sono appunto deducibili dalla loro struttura. Concordando con Benacerraf, secondo gli eliminativisti la matematica non studia il dominio degli oggetti, bensì le caratteristiche che ne prescindono. L'idea dello strutturalismo è descrivere quali condizioni si realizzino se si prendono in considerazione sistemi di oggetti con una certa struttura, non di asserire l'esistenza di tali sistemi.La matematica si presenta quindi come uno studio di sistemi *possibili.*

Neo-fregeanismo

Riprendendo il concetto di astrazione prima accennato, un altro modo per concepire l'astrazione è quello delle *classi di equivalenza*: chiamando R una relazione qualsiasi, questa può avere proprietà di *riflessività, simmetria e transitività.* Dato un insieme A, una relazione con le proprietà di R determina una divisione di A in classi di equivalenza. In A ogni insieme deve appartenere ad una e una sola di queste classi di equivalenza. Il ragionamento astratto può essere concepito come un ragionamento su un oggetto per-

[4] Si fronteggiano due tipi di soluzione: una si ispira alla tradizione platonica, per la quale gli universali hanno esistenza oggettiva. [...] L'altra riconoscendo che nella realtà sussistono solo individui, afferma aristotelicamente che universale è ciò che è predicabile di più cose, e perciò universale, per un verso, è il concetto, segno naturale di una classe di individui, per un altro verso, è la «voce», capace per convenzione di significare le cose significate dal concetto (nominalista). Cfr. Dizionario Treccani, "universali"

[5] Riportando un testo esplicativo. "Invece di considerare 'o', 'numero' e 'successore' come termini di cui conosciamo il significato [...], possiamo lasciare che questi termini stiano per tre termini qualsiasi che soddisfino i cinque assiomi di Peano (vd.Introduzione). Nono sarebbero più termini che possiedono un significato definito ed indefinito allo stesso tempo: sarebbero 'variabili', termini riguardo ai quali noi facciamo certe ipotesi, cioè quelle elencate negli assiomi, ma che per il resto lasciamo indeterminati [...]. I nostri teoremi [...] riguarderebbero tutti gli insiemi di termini con una certa proprietà."

fettamente determinato, ma di cui non conosciamo l'identità, ma solo alcune proprietà: l'incompletezza riguarda le nostre informazioni sull'oggetto, non l'oggetto stesso.

L'intuizione di Frege Nel 1884 Frege sviluppò un pensiero che risultò essere talmente valido da essere definito da Dummett nel 1991 'il paragrafo filosofico più pregnante di tutti i tempi'.
Esso si presenta così:

> "Come potranno dunque esserci dati i numeri, se non abbiamo di essi alcuna rappresentazione o intuizione? Se le parole hanno un significato solo nel contesto di un enunciato, il nostro problema diventa questo: spiegare il senso di un enunciato in cui compare un termine numerico."

Per comprendere cosa sia un numero è necessario capire quale sia il significato della parola *numero*, poiché capire il senso di una parola significa capire il suo ruolo negli enunciati in cui compare. Comprendere la parola numero significa comprendere gli enunciati in cui si parla di numeri. Bisogna quindi ricondurre ogni enunciato a espressioni del tipo

Il numero degli F è identico al numero dei G.

Prendiamo ad esempio il giudizio *" La retta a è parallela alla retta b"*:

$$a//b \tag{2.1}$$

Questa proposizione può anche essere espressa come *"La direzione della retta a è uguale alla direzione della retta b*, e cioè:

$$Dir\ (a) = Dir\ (b) \leftrightarrow\ a//b \tag{2.2}$$

Analogamente, tramite il *principio di Hume* (il quale afferma che a due concetti spetta lo stesso numero nel caso in cui gli oggetti che cadono sotto quei concetti possano essere messi in una corrispondenza 1 a 1)

$$N(Fx) = N(Gx) \leftrightarrow\ F \approx G \tag{2.3}$$

Chi comprende questi due concetti, sa tutto su cosa siano numeri e direzioni, visto che questi principi li introducono (secondo i neo-fregeani). Se indichiamo con 'Ψ' una funzione avente come argomenti entità di un certi tipo e come valore oggetti e indichiamo con ' $\approx$ ' una relazione di equivalenza tra gli oggetti in questione, avremo:

$$\forall\alpha\forall\beta(\Psi(\alpha) = \Psi(\beta) \leftrightarrow \alpha \approx \beta) \tag{2.4}$$

Questo tipo di principi viene chiamato *principi di astrazione.*

Il barbiere e Giulio Cesare

Breve digressione sugli insiemi Per capire meglio cosa andremo a trattare in questo paragrafo è necessario fare una breve digressione su alcune proprietà che gli insiemi possiedono. Gli insiemi sono raggruppamenti di oggetti qualsiasi e l'insieme stesso è un ulteriore oggetto rispetto a ciò che esso raccoglie. Un insieme viene sempre distinto dai suoi contenuti, ma è tuttavia *definito* dagli stessi. Proprio per questo, non possono esistere insiemi diversi aventi gli stessi elementi: questo principio viene chiamato *assioma di estensionalità*

$$\forall x\forall y[x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$$

Un altro assioma fondamentale che ci serve per comprendere la seconda parte del paragrafo è il *principio di comprensione illimitata*, il quale afferma che data una qualsiasi proprietà, esiste un insieme contenente tutte le cose che godono di tale proprietà; indicando con $\{x|P(x)\}$ l'insieme determinato da una certa proprietà, si ottiene che

$$x \in \{x|P(x)\} \textit{ se e solo se } P(x) \tag{P}$$

Paradosso di Russell Tramite questi due assiomi è possibile ricavarne molti altri, formando così la *teoria ingenua degli insiemi.* Ma questa teoria risulta essere contraddittoria; una contraddizione del P si trova ad esempio quando consideriamo l'insieme di tutti gli insiemi normali. L'insieme $\{x|x \notin x\}$ è indicato con R. In base a P vale che per ogni x:

$$x \in x \leftrightarrow x \notin x$$

e se consideriamo il problema se R appartenga o meno a se stesso, la risposta è

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

Questo è il famoso *paradosso di Russell* (comunemente conosciuto nella versione del barbiere che taglia la barba solo a chi non se la sa tagliare da solo). Si può però dimostrare come , per ogni relazione R, non esiste un individuo che sta nella relazione R con tutti e soli gli individui che non stanno in tale relazione con se stessi

$$\sim \exists x \forall y (Rxy \leftrightarrow \sim Ryy)$$

Questo teorema è conosciuto come *teorema di Russell.*

Il problema di Giulio Cesare L'enunciato sulla direzione ci permette di decidere se $Dir(a) = q$ nel caso in cui q sia rappresentato come $Dir(b)$ ma non dice nulla circa gli altri casi. Nel caso dei numeri, il problema con il principio di Hume è che "non possiamo per mezzo della nostra definizione decidere se Giulio Cesare [...] sia o meno un numero ". Quando parliamo di numero parliamo di che sorta di oggetto si tratti. Per un concetto sortale quindi c'è bisogno di un *criterio d'identità* e uno di *applicabilità*, non forniti da Frege. Con il principio di Hume, la logica del secondo ordine[6] e il teorema di Frege è possibile derivare tutti i teoremi dell'aritmetica, quindi si può sostenere che l'aritmetica sia riducibile a logica e definizioni. Conseguentemente a queste, furono trovate anche nuove leggi, come la *legge fondamentale V*, che afferma che le estensioni di due concetti sono identiche se e solo se ogni oggetto che cade sotto un concetto cade anche sotto l'altro

$$\forall F \forall G \{x : Fx\} = \{x : Gx\} \leftrightarrow \forall x (Fx \leftrightarrow Gx) \tag{2.5}$$

Se definiamo la relazione $\in$ di appartenenza come relazione tra oggetti ed estensioni, allora possiamo ricavare dalla legge fondamentale V, un equivalente per le estensioni del *principio di comprensione illimitata* ; ma questo principio, come sappiamo dal *paradosso di Russell*, è inconsistente, per cui la soluzione di Frege non è soddisfacente. Secondo i discepoli di Hume, i principi di astrazione, formando un criterio d'identità per il tipo di oggetti che implicitamente definiscono, forniscono un criterio per stabilire se un oggetto appartiene a quel tipo di oggetti o sia diverso. Per questo, il problema di Giulio Cesare è semplicemente aggirabile: se fosse un numero, Giulio Cesare dovrebbe rispondere al principio di equivalenza (cosa che non accade).

Finzionalisti Secondo i finzionalisti, il discorso matematico non è vero 'alla lettera', ma descrive universi matematici fittizi. La differenza tra oggetti concreti e astratti è che se un oggetto astratto possiede una proprietà, allora la possiede necessariamente. Stephen Yablo propose di considerare gli oggetti astratti come 'strumenti rappresentazionali', ossia oggetti che fingiamo che esistano per poter descrivere certe situazioni, attribuendogli le proprietà necessarie a svolgere la propria funzione.

[6]Nella logica del secondo ordine i quantificatori lavorano sui termini di un insieme di riferimento e sulle parti dell'insieme di riferimento

Conclusione

Arrivati alla conclusione della tesina, dopo aver analizzato alcune correnti di pensiero che caratterizzano due dei tre campi di questa filosofia, sembra doveroso chiedersi come essa si presenti complessivamente. La matematica infatti risulta essere di un'elegante rigidità, chiara e precisa, senza ammissione di incoerenza; questa branca della filosofia invece, non risulta particolarmente elegante né pratica, in quanto fa uso di tantissimi giri di parole per arrivare ad un concetto, risultando poco precisa. In generale, non si potrebbe mai pretendere di rinunciare alla matematica anche se essa risultasse falsa, tanto è precisa che la assumeremmo come un'efficiente falsità, un'ottima finzione dell'uomo per riuscire a descrivere il mondo che lo circonda.
Riconosco che l'argomento sia impegnativo e abbastanza specifico, ma ci tenevo a raccontarvi questa storia e vi ringrazio per avermi seguito in questo mio viaggio personale, che pagina dopo pagina mi ha fatto crescere; e credo che qualcosa mi sia rimasto davvero.

Note matematiche

Questo è un breve indice delle notazioni che compaiono nella tesina e il corrispettivo significato

$\rightarrow$	implica
$\leftrightarrow$	se e solo se
$\exists$	esiste
$\forall$	per ogni
$\&$	et congiunzione (e)
Φ	formula generica
E	esiste meinonghiano
Σ	per qualche elemento (meinonghiano)
$//$	parallelo
Dir	la direzione di
N	numero (inteso come *il numero delle cose*)
Ψ	legge generica
$:, \vert, ()$	tale che

Bibliografia e ringraziamenti

Matteo Plebani, *Introduzione alla filosofia della matematica*, Carrocci editore, luglio 2011

Ruben Hersh, *Cos'è davvero la matematica*, capitoli 2, 13 e prefazione, Baldini e Castoldi, 2001

http://www.filosofico.net/filos52.htm
http://www.filosofico.net/matefilo.htm
http://ricerca.repubblica.it/repubblica/archivio/repubblica/2001/03/03/la-filosofia-dei-numeri.html
http://matematica.unibocconi.it/articoli/5-matematica-e-filosofia-della-matematica
https://it.wikipedia.org/wiki/Filosofia-della-matematica
https://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso-di-Russell
https://it.wikipedia.org/wiki/Struttura-(matematica)
https://it.wikipedia.org/wiki/Il-figlio-dell%27uomo-(Magritte)

Arrivata ormai alla fine del mio elaborato, ci terrei a ringraziare alcune persone che, in un modo o nell'altro, hanno contribuito alla realizzazione di questo lavoro:

Enrico Stagni, che mi ha gentilmente offerto consigli estremamente utili

Vittorio Valent, che mi ha seguito durante la stesura ed insegnato ad usare LaTeX

I professori che in questi anni sono riusciti a farmi appassionare alle loro materie, facendo nascere in me un sincero interesse verso le stesse.