Appunti del corso di Analisi su Varietà

Giada Franz Davide Lofano

14 luglio 2016

Indice

Introduzione v

1 Varietà differenziabili 1
1.1 Definizioni ed esempi di varietà differenziabili 1
1.2 Prodotti e mappe di varietà 3
1.3 Spazio tangente 3
1.4 Funzioni tra varietà 5
1.5 Fibrati vettoriali 6

2 Campi vettoriali 9
2.1 Definizioni di campi vettoriali e curve integrali 9
2.2 Flusso locale di un campo vettoriale 10
2.3 Flusso di un campo vettoriale 11

3 Derivate e prodotti di Lie 13
3.1 Derivata e parentesi di Lie 13
3.2 Proprietà delle parentesi di Lie 15
3.3 Commutazione di campi vettoriali 16

4 Distribuzioni e varietà integrali 21
4.1 Definizioni di distribuzioni e varietà integrali 21
4.2 Condizioni necessarie per l'esistenza di varietà integrali 22
4.3 Teorema di Frobenius 23

5 Calcolo tensoriale 25
5.1 Definizione e operazioni su spazi vettoriali 25
5.2 Push-forward e pull-back di trasformazioni lineari 28

6 Fibrati e campi tensoriali 31
6.1 Risultati locali su varietà 31
6.2 Fibrati tensoriali 31
6.3 Campi tensoriali 33
6.4 Tensore metrico 34
6.5 Pull-back e push-forward di campi tensoriali 35

7 Derivata di Lie sui tensori 37
7.1 Operatore differenziale sull'algebra dei tensori 37
7.2 Estensione della derivata di Lie ai campi tensoriali 39

8 Forme differenziali **43**
8.1 Forme esterne su spazi vettoriali 43
8.2 Determinanti e volumi 46
8.3 Operatore di Hodge star 49
8.4 Forme differenziali su varietà 50
8.5 Derivata esterna 50
8.6 Prodotto interno 53

9 Teorema di Stokes **57**
9.1 Orientazione 57
9.2 Integrazione su varietà 58
9.3 Varietà con bordo 60
9.4 Teorema di Stokes 60
9.5 Formula di coarea 63

10 Gruppi di Lie **65**
10.1 Gruppi e algebre di Lie 65
10.2 Omomorfismi fra gruppi di Lie 67
10.3 Forme invarianti 69

Indice analitico **71**

INTRODUZIONE

Questo documento raccoglie gli appunti del corso *Analisi su varietà* interno alla Normale tenuto dal professor Andrea Malchiodi nell'anno 2015/2016. Gli argomenti seguono fedelmente quelli trattati a lezione e si possono suddividere sostanzialmente in quattro macro-sezioni:

1. introduzione e definizioni basilari riguardanti le varietà;
2. campi vettoriali e derivate di Lie;
3. calcolo tensoriale fino a giungere al teorema di Stokes;
4. gruppi di Lie.

Ringraziamo Claudio Afeltra, Lorenzo Benedini, Alice Cortinovis, Fabio Ferri, Luca Minutillo Menga, Federico Scavia e Marco Trevisiol per il contributo nella stesura.

CAPITOLO 1

VARIETÀ DIFFERENZIABILI

1.1. Definizioni ed esempi di varietà differenziabili

Le varietà sono spazi localmente simili agli spazi euclidei, ma globalmente diversi.

Per motivi sia teorici che applicativi è utile sviluppare strumenti su *oggetti curvi*. Ad esempio si possono studiare i sistemi dinamici sulle varietà, oppure ricavare informazioni topologiche a partire da concetti analitici.

Il modello di riferimento sono le varietà immerse in $\mathbb{R}^m$, ma si può dare una nozione intrinseca di varietà.

Definizione 1.1.1. Una spazio topologico M è detto *localmente euclideo* di dimensione $n \in \mathbb{N}$ se è di Hausdorff ed è localmente omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.2. Se U è un aperto di M e $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo, la coppia (U, φ) è detta *carta*, o sistema di coordinate. Le componenti di φ si dicono *funzioni coordinate*. Una famiglia di carte che ricopre M è detta *atlante*.

Se (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) sono carte, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ è un omeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$, detto *cambio di carta* o *transizione*. Per poter fare uso degli strumenti del calcolo differenziale, si considera un insieme di carte tale che i cambi di carta siano differenziabili.

Nota 1.1.3. Data una carta (U, φ), quando non specificato, sottintenderemo che φ abbia componenti $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$.

Definizione 1.1.4. Una *struttura differenziabile* di classe C^k su uno spazio localmente euclideo è un atlante $\mathcal{F}$ massimale rispetto all'inclusione e tale che tutti i cambi di carta siano di classe C^k.

Nota 1.1.5. Se $\mathcal{F}$ non è massimale esso è contenuto in un'unica struttura differenziabile C^k, formata da tutte le carte con transizioni di classe C^k rispetto ad $\mathcal{F}$.

Definizione 1.1.6. Una *varietà differenziabile* n-dimensionale di classe C^k è una coppia $(M, \mathcal{F})$ tale che M sia uno spazio topologico localmente euclideo a base numerabile ed $\mathcal{F}$ sia una struttura differenziabile su M.

Esempio. Di seguito alcuni esempi di varietà differenziabili:

1. $\mathbb{R}^n$ con l'atlante formato da una sola carta (l'identità), o più in generale tutti gli aperti di $\mathbb{R}^n$.

2. S^n con un atlante formato da due carte: le proiezioni stereografiche da polo nord $N = (0, \dots, 0, 1)$ e sud $S = (0, \dots, 0, -1)$, cioè

$$\pi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right) \quad \text{su } U_1 = S^n \setminus \{N\}\,,$$
$$\pi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right) \quad \text{su } U_2 = S^n \setminus \{S\}\,.$$

   In particolare $\pi_S \circ \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ è la mappa $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$, chiamata *inversione di Kelvin*.

3. Lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ con l'atlante $(U_i, \varphi_i)_{i=0,\dots,n}$ tale che $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] : x_i \neq 0\}$ e $\varphi_i([x_0, \dots, x_n]) = \frac{1}{x_i}(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$.

Esempio. Dati $k \geq n$ interi sia $G_n(\mathbb{R}^k)$ la famiglia dei sottospazi n-dimensionali di $\mathbb{R}^k$, che si può dotare di una struttura differenziabile naturale con la quale viene detta *varietà grassmanniana*.

Dato $F \subseteq \mathbb{R}^k$ sottospazio n-dimensionale, sia G uno dei supplementari lineari, cioè $\mathbb{R}^k = F \oplus G$. Sia ora $U_G = \{H \subseteq \mathbb{R}^k$ sottospazio n-dimensionale tale che $\mathbb{R}^k = H \oplus G\}$ e sia $\varphi_{F,G} : U_G \to \mathscr{L}(F, G)$ tale che $\varphi_{F,G}(H) = \pi_F(H, G) \circ \pi_G(H, F)^{-1}$; dove $\pi_F(G) : \mathbb{R}^k \to G$ e $\pi_G(F) : \mathbb{R}^k \to F$ sono le proiezioni sui due sottospazi e $\pi_F(H, G)$ è la restrizione di $\pi_F(G)$ ad H e simmetricamente per l'altra.

Per prima cosa dimostriamo che $\pi_G(H, F)$ è invertibile e quindi che ha senso la scrittura sopra. Sia infatti $H \in U_G$ allora $\mathbb{R}^k = F \oplus G = H \oplus G$, quindi $\pi_G(H, F)$ e $\pi_G(F, H)$ sono una l'inversa dell'altra. Infatti, data $h \in H$, scrivendo $h = f + g$ con $f \in F$ e $g \in G$ si ha $f = h - g$; quindi

$$\pi_G(F, H) \circ \pi_G(H, F)(h) = h \quad \text{e} \quad \pi_G(H, F) \circ \pi_G(F, H)(f) = f\,.$$

Inoltre vale anche il viceversa, ovvero che se $\pi_G(H, F)$ è un isomorfismo, allora $\mathbb{R}^k = H \oplus G$. Infatti è chiaro che $H \cap G = \{0\}$ e, se $c \in \mathbb{R}^k$, allora

$$c = (\pi_G(H, F)^{-1} \circ \pi_G(F)(c)) + (c - \pi_G(H, F)^{-1} \circ \pi_G(F)(c))$$

e la prima parentesi è un elemento di H mentre la seconda un elemento di G.

Usando questi fatti si può dimostrare che $\varphi_{F,G}$ è biettiva e quindi che $\{(U_G, \varphi_{F,G}) : \mathbb{R}^k = F \oplus G\}$ è un atlante sui sottospazi n-dimensionali, con il quale risultano quindi una varietà $(n(k-n))$-dimensionale.

Nota 1.1.7. Esistono varietà omeomorfe ma non diffeomorfe. Ad esempio, come scoprì Milnor, ci sono ventotto varietà omeomorfe a S^7 tra di loro non diffeomorfe, dette *sfere esotiche*. Su S^1, S^2, S^3, S^5 ed S^6 questo non accade, mentre per S^4 il problema è tuttora aperto.

Nota 1.1.8. La richiesta che le varietà siano a base numerabile ha alcune importanti conseguenze:

1. le varietà sono metrizzabili;

2. le varietà sono spazi topologici normali;

3. le varietà sono paracompatte[1], dunque in particolare esistono partizioni dell'unità;

4. le varietà sono σ-compatte, ossia sono un'unione numerabile di compatti.

Esercizio 1.1.9. *Se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è di classe C^k, $M = g^{-1}(\{0\})$ e $\nabla g \neq 0$ su M, allora M è una varietà C^k di dimensione $n-1$.*

Esercizio 1.1.10. *Lo spazio $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ a determinante 1 è una varietà di dimensione $n^2 - 1$.*

Esercizio 1.1.11. *La funzione $t \mapsto t^3$ induce su $\mathbb{R}$ una struttura differenziabile diversa da quella ordinaria, ma le varietà ottenute sono diffeomorfe.*

1.2. Prodotti e mappe di varietà

Definizione 1.2.1. Date $(M_1, \mathcal{F}_1)$ e $(M_2, \mathcal{F}_2)$ varietà C^k, si può definire la *varietà prodotto* $(M_1 \times M_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, che è lo spazio topologico prodotto con la struttura differenziale generata dall'atlante $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \ : \ (U_i, \varphi_i) \text{ sono carte di } \mathcal{F}_i\}$.

Nota 1.2.2. Ovviamente si ha che $\dim(M_1 \times M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2)$.

In modo analogo si può definire il prodotto di più fattori.

Definizione 1.2.3. Se M ed N sono varietà C^k e $r \leq k$, una funzione $f : M \to N$ si dice di classe C^r se per ogni $x \in M$ ci sono una carta (U, φ) di M con $x \in U$ ed una carta (V, ψ) di N con $f(U) \subseteq V$ tali che $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sia di classe C^r.

L'ipotesi che $r \leq k$ serve affinché la definizione non dipenda dalle carte scelte, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.4. *Una funzione continua $f : M \to N$ è di classe C^r se e solo se tutti i suoi rappresentanti locali sono di classe C^r.*

Proposizione 1.2.5. *La composizione di due funzioni C^r è C^r.*

Definizione 1.2.6. Un *diffeomorfismo* C^r è una funzione C^r invertibile e con inversa C^r.

1.3. Spazio tangente

Data una varietà n-dimensionale immersa in $\mathbb{R}^m$, per ogni suo punto esiste un sottospazio affine di dimensione n detto *spazio tangente*. Vogliamo mostrare come estendere questa costruzione alle varietà astratte. Vi sono diversi approcci per fare ciò; noi vedremo lo spazio tangente ad un punto come "insieme delle velocità delle curve passanti per quel punto".

Definizione 1.3.1. Siano M una varietà, $x \in M$, $c, \tilde{c} : (-1, 1) \to M$ curve di classe C^1 tali che $c(0) = \tilde{c}(0) = x$ e (U, φ) una carta con $x \in U$. Allora diciamo che c e $\tilde{c}$ sono tangenti in x rispetto a φ se $(\varphi \circ c)'(0) = (\varphi \circ \tilde{c})'(0)$.

Proposizione 1.3.2. *La definizione precedente non dipende dalla carta.*

[1] Uno spazio topologico X si dice *paracompatto* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto localmente finito.

Si può dunque dare la seguente definizione.

Definizione 1.3.3. Due curve $c, \tilde{c} : (-1,1) \to M$ di classe C^1 tali che $c(0) = \tilde{c}(0) = x$ si dicono *tangenti* se le loro espressioni locali in carta sono tangenti.

Tutto ciò ci permette di definire lo spazio tangente.

Definizione 1.3.4. Lo spazio tangente ad un punto $x \in M$, indicato con T_xM, è l'insieme delle classi di equivalenza delle curve $c : (-1,1) \to M$ di classe C^1 con $c(0) = x$ con la relazione "essere tangenti in x". L'unione disgiunta degli spazi tangenti ad M è detta *spazio tangente*, o *fibrato tangente*, ed è indicata con TM.

Nota 1.3.5. Su T_xM c'è un'evidente struttura lineare che lo rende uno spazio vettoriale con la stessa dimensione di M.

Ora vediamo due definizioni alternative.

Controvarianza: Per definire il tangente si possono usare le proprietà di trasformazione dei vettori.

Infatti, se (U, φ) e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ sono due carte e chiamiamo $(y^1, \dots, y^n) = (\varphi \circ c)(t)$ e $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n) = (\tilde{\varphi} \circ c)(t)$, allora il vettore tangente associato a $c'(0)$ si scrive nei due sistemi di coordinate come $(V^1, \dots, V^n) = (\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}t}(0), \dots, \frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}t}(0))$ e $(\tilde{V}^1, \dots, \tilde{V}^n) = (\frac{\mathrm{d}\tilde{y}^1}{\mathrm{d}t}(0), \dots, \frac{\mathrm{d}\tilde{y}^n}{\mathrm{d}t}(0))$. Usando il cambio di carta si trova che la funzione $y \mapsto \tilde{y}$ è un diffeomorfismo locale e la relazione tra le due coordinate è

$$\tilde{V}^i = \frac{\mathrm{d}\tilde{y}^i}{\mathrm{d}t}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j}(\varphi(x)) \frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j}(\varphi(x)) V^j \, .$$

Questo tipo di trasformazione è detto *controvarianza* e può essere usato per definire lo spazio tangente.

Con questa notazione, dato un sistema di coordinate (U, φ), un vettore $v \in T_xM$ (con $x \in U$) si scrive così:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial y^i}(\varphi(x)) \, ,$$

dove $\frac{\partial}{\partial y^i}(\varphi(x)) = [\varphi(x) + te_i]_{\varphi(x)}$, essendo e_i l'i-esimo vettore della base canonica.

Derivazioni: Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ sia $\mathrm{D}_v f$ la derivata direzionale lungo v di f. Allora D_v è lineare in f ed vale la regola di Leibniz $\mathrm{D}_v(fg) = f\mathrm{D}_v g + g\mathrm{D}_v f$. Si definiscono *derivazioni* gli operatori lineari $A : C^r(U) \to \mathbb{R}$ che godono della regola di Leibniz. Si può dimostrare che in questo modo si ottiene una definizione equivalente di spazio tangente.

Una funzione regolare agisce sui vettori tangenti alla varietà, permettendo di estendere il concetto di differenziale alle varietà.

Lemma 1.3.6. *Se c e $\tilde{c}$ sono curve tangenti in $x \in M$ e $f : M \to N$ è di classe C^1 allora $f \circ c$ e $f \circ \tilde{c}$ sono curve tangenti in $f(x)$.*

Dimostrazione. Basta passare in carta. □

Definizione 1.3.7. Data $f : M \to N$ di classe C^1 si definisce *mappa tangente* (o *differenziale*) di f la mappa $Tf : TM \to TN$ (indicata anche con $\mathrm{d}f$) tale che $Tf([c]_x) = [f \circ c]_{f(x)}$ (la definizione è ben posta per il lemma precedente). La restrizione di Tf allo spazio tangente ad un punto x è indicata con $T_x f$.

Nota 1.3.8. Dato $v \in T_x M$, chiamiamo $Tf(v)$ il *push-forward* di v tramite f, che si indica anche come $f_* v$.

Nota 1.3.9. L'applicazione $T_x f : T_x M \to T_x N$ è lineare.

Teorema 1.3.10 (Mappe composte)**.** *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ sono C^r, allora $g \circ f$ è C^r e $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$;*

2. *$T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{TM}$;*

3. *se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo allora Tf è invertibile e $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.*

Dimostrazione. Il punto 1 si dimostra passando in carta, il 2 è banale, il 3 è conseguenza immediata dei due precedenti. □

Ora vogliamo dotare il fibrato tangente di una struttura differenziabile.

Data una carta (U, φ) abbiamo le carte $T\varphi : TU \to T(\varphi(U))$ tale che $T\varphi([c]_x) = [\varphi \circ c]_{\varphi(x)}$. Si verifica facilmente che $T\varphi$ è biunivoca.

Proposizione 1.3.11. *Se $k \geq 1$ e $(M, \mathcal{F})$ è una varietà C^{k+1} allora $T\mathcal{F} = \{(TU, T\varphi) : (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$ è un atlante C^k su TM, detto* atlante naturale.

Dimostrazione. Dato che $\mathcal{F}$ ricopre M, $T\mathcal{F}$ ricopre TM. Inoltre per il Teorema 1.3.10 (Mappe composte) abbiamo che $T\varphi_i \circ (T\varphi_j)^{-1} = T(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$, che è un diffeomorfismo C^k. Inoltre TM è di Hausdorff e a base numerabile con la topologia indotta da $T\mathcal{F}$. □

Similmente si dimostra il seguente risultato.

Proposizione 1.3.12. *Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo C^{r+1}, $Tf : TM \to TN$ è un diffeomorfismo C^r.*

1.4. Funzioni tra varietà

Ora definiamo alcuni tipi particolari di funzioni tra varietà.

Definizione 1.4.1. Sia $f : M \to N$ di classe C^1.

1. Se il differenziale di f è iniettivo in ogni punto, f è detta *immersione*.

2. Se f è un'immersione iniettiva, (M, f) è detta *sottovarietà*.

3. Se f è un'immersione ed un omeomorfismo con l'immagine, f è detta *embedding*.

Proposizione 1.4.2. *Se $f : M \to N$ è di classe C^1 e $T_x f$ è invertibile allora f è un diffeomorfismo in un intorno di x.*

Dimostrazione. Basta passare in carta ed applicare il teorema della funzione implicita. □

Proposizione 1.4.3. *Se $f : M \to N$ è di classe C^1 e $T_x f$ è iniettivo allora f è localmente iniettiva.*

Dimostrazione. Passando in carta si può supporre $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ e $x = 0$. Allora, dato che $Tf = \mathrm{D}f$, si ha che

$$f(p) - f(q) = \int_0^1 \mathrm{D}f(q + s(p-q))[p-q]\,\mathrm{d}s = (\mathrm{D}f(0) + \mathrm{o}(1))[p-q]\,,$$

per $p, q \to 0$. Quindi $f(p) \neq f(q)$ per p, q piccoli. □

Esercizio 1.4.4. *Si dimostri che $U(n)$ (il gruppo delle trasformazioni unitarie di $\mathbb{C}^n$) è una sottovarietà non compatta di $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$.*

Esercizio 1.4.5. *Si dimostri che $\mathbb{RP}^1$ è una sottovarietà di $\mathbb{RP}^2$.*

Esercizio 1.4.6. *Si dimostri che $P = \{Q \in \mathrm{O}(3) \ :\ \det Q = 1,\ Q = Q^T\} \setminus \{\mathrm{id}\}$ è una sottovarietà compatta di $\mathrm{O}(3)$. Si descrivano inoltre gli elementi di P in termini geometrici.*

1.5. Fibrati vettoriali

L'idea è associare (in modo ragionevole) ad ogni punto di M varietà uno spazio vettoriale opportuno.

Definizione 1.5.1. Un *fibrato vettoriale* di rango $k \in \mathbb{N}$ consiste di uno spazio totale E, una base M (E ed M varietà) ed una proiezione $\pi : E \to M$ (mappa regolare) tale che per ogni $x \in M$ la sua fibra $E_x \coloneqq \pi^{-1}(x)$ ha una struttura di spazio vettoriale.

Si richiede inoltre una "banalità locale", cioè che localmente E sia un prodotto: per ogni $x \in M$ esiste U intorno di x e un diffeomorfismo $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tale che $\pi_1 \circ \tilde{\varphi} = \pi$, dove $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ è la proiezione sulla prima coordinata, e per ogni $y \in U$ vale che $\tilde{\varphi}_y \coloneqq \tilde{\varphi}|_{E_y} : E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo. La coppia $(U, \tilde{\varphi})$ è detta *carta di fibrato.*

Nota 1.5.2. Un fibrato vettoriale è localmente uno spazio prodotto, ma in generale questa proprietà non è vera globalmente. Se è vera globalmente il fibrato è detto *banale.*

Esempio (Nastro di Möbius)**.** Il nastro di Möbius di può vedere come un fibrato vettoriale su S^1, che però non è banale.

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale di rango k, sia $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ricoprimento tramite aperti che banalizza localmente il fibrato e siano $\tilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ le banalizzazioni locali.

Definizione 1.5.3. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definiamo la *mappa di transizione* $\tilde{\varphi}_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^k)$ tramite le formule $\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x, v) = (x, \tilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)v)$ con $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $v \in \mathbb{R}^k$. Oppure analogamente $\tilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x) = (\tilde{\varphi}_\beta|_{E_x})(\tilde{\varphi}_\alpha|_{E_x})^{-1}$.

Proposizione 1.5.4. *Valgono le seguenti proprietà della funzione di transizione*

- $\tilde{\varphi}_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$ *per ogni* $x \in U_\alpha$*;*

- $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)\tilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$ *per ogni* $x \in U_\alpha \cap U_\beta$*;*
- $\tilde{\varphi}_{\alpha\gamma}(x)\tilde{\varphi}_{\gamma\beta}(x)\tilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$ *per ogni* $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Nota 1.5.5. È possibile ricostruire un fibrato vettoriale tramite relazioni di equivalenza in base alle funzioni di transizione.

In particolare si ottiene che $E = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^k / \sim$ dove $(x, v) \sim (y, w)$ se e solo se $x = y$ e $w = \tilde{\varphi}_{\beta\alpha} v$.

Esempio (Fibrato tangente di una varietà)**.** Dati (U_1, φ_1) carta di M con coordinate $(x^1, \dots, x^n)$ e $p \in U$, un vettore v di T_pM si esprime come $v = \sum_{i=1}^n V_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi_1(p))$. Sia (U_2, φ_2) una nuova carta, con $p \in U_2$ e coordinate $(y^1, \dots, y^n)$. Se V_2^j sono le componenti di v nella carta (U_2, φ_2), abbiamo (per la controvarianza) che

$$V_2^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(\varphi_1(p)) V_1^j \,.$$

La funzione di transizione da φ_1 a φ_2 è quindi

$$\tilde{\varphi}_{21}(p)(V^1, \dots, V^n) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(\varphi_1(p)) V^j \right)_{i=1,\dots,n} .$$

Se (U_3, φ_3) è una terza carta, con $p \in U_3$ e con coordinate $(z^1, \dots, z^n)$, allora

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}(\varphi_1(p)) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial z^i}{\partial y^l}(\varphi_2(p)) \frac{\partial y^l}{\partial x^j}(\varphi_1(p))$$

e quindi $\tilde{\varphi}_{31} = \tilde{\varphi}_{32} \circ \tilde{\varphi}_{21}$.

Si può fare la stessa cosa per distribuzioni k-dimensionali di M varietà.

Esempio. Consideriamo la sfera S^2 come unione di $U_1 = S^2 \setminus \{S\}$ e $U_2 = S^2 \setminus \{N\}$, con S ed N polo sud e nord come già visti. Usando le coordinate stereografiche, su $U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiamo in coordinate polari $\tilde{\varphi}_{21}(r, \theta) = r^k \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{N}$.

Questa costruzione definisce un fibrato di rango 2 su S^2.

Definizione 1.5.6. Siano $U \times \mathbb{R}^k$ e $U' \times \mathbb{R}^l$ banalizzazioni locali di fibrati vettoriali E ed E'. Una mappa $f : U \times \mathbb{R}^k \to U' \times \mathbb{R}^l$ è detta una *mappa locale* di fibrati vettoriali se ha la forma $f(p, v) = (f_1(p), f_2(p)(v))$, dove $f_1 : U \to U'$ e $f_2 : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ sono mappe regolari.

Inoltre f è detta un *isomorfismo locale* di fibrati vettoriali se $f_2(p) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$.

Definizione 1.5.7. Siano E, E' due fibrati vettoriali. Una mappa $f : E \to E'$ è detta una *mappa* (rispettivamente un *isomorfismo locale*) di fibrati vettoriali se, per ogni $v \in E$ e per ogni banalizzazione locale $(W', \tilde{\psi})$ di E' tale che $\pi'(f(v)) \in W'$, esiste una banalizzazione locale $(W, \tilde{\varphi})$ con $\pi(f(W)) \subseteq \pi'(W')$ tale che il rappresentante locale $f_{\tilde{\psi}\tilde{\varphi}} := \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ è una mappa locale di fibrati vettoriali (rispettivamente un isomorfismo locale).

Se la mappa f è biettiva, f è detta un *isomorfismo* di fibrati vettoriali.

Definizione 1.5.8. Sia $\pi : E \to B$ un fibrato vettoriale. Una *sezione locale* di π è una mappa (regolare) $\xi : U \to E$ con U aperto in B tale che $\pi(\xi(b)) = b$ per ogni $b \in U$.

Se $U = B$, la mappa ξ è detta *sezione globale*.

Nota 1.5.9. Le sezioni (diciamo C^r) formano uno spazio vettoriale. Usando carte di fibrato è possibile sommare nelle seconde componenti delle banalizzazioni locali.

In particolare la sezione nulla (che esiste sempre) associa in ogni carta di fibrato il punto $b \in B$ al punto $(b, 0)$ ed è in corrispondenza naturale con B.

La caratteristica di Eulero è un indicatore dell'esistenza di sezioni globali non nulle ovunque.

Proposizione 1.5.10. *Sia $f : E \to E'$ una mappa di fibrati. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *f preserva la sezione nulla (cioè, in modo improprio, $f(B) \subseteq B'$);*

2. *f induce univocamente una mappa $f_B : B \to B'$ tale che il seguente diagramma commuta:*
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ B & \xrightarrow{f_B} & B' \end{array}$$
(cioè $\pi' \circ f = f_B \circ \pi$);

Inoltre una mappa $g : E \to E'$ è una mappa di fibrato se e solo se esiste $g_B : B \to B'$ tale che $\pi' \circ g = g_B \circ \pi$ e g ristretta ad ogni fibra è continua e lineare.

Dimostrazione. Sono tutte facili verifiche, eventualmente passando in carta. □

CAPITOLO 2

CAMPI VETTORIALI

2.1. Definizioni di campi vettoriali e curve integrali

Definizione 2.1.1. Sia M una varietà C^k. Un *campo vettoriale* su M è una funzione $X : M \to TM$ tale che $X(p) \in T_pM$ per ogni $p \in M$. Un campo vettoriale è detto di classe C^r (con $r < k$) se le sue componenti sono di classe C^r.

Se (U, φ) è una carta con $(x^1, \dots, x^n)$ coordinate locali, allora possiamo scrivere

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\,,$$

dove $(X^1, \dots, X^n)(x) = T\varphi(X(\varphi^{-1}(x)))$ e $\frac{\partial}{\partial x^i} = (T\varphi)^{-1}(e_i)$, dove $e_1, \dots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. In particolare $\frac{\partial}{\partial x^i}$ è il campo vettoriale corrispondente alla derivazione $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Chiamiamo $\chi^r(M)$ l'insieme dei campi vettoriali C^r su M, mentre indichiamo con $\chi(M)$ l'insieme dei campi C^∞ su M.

Nota 2.1.2. Osserviamo che un campo vettoriale X agisce linearmente sugli endomorfismi di $C^\infty(M)$. Infatti, data $f \in C^\infty(M)$, possiamo definire l'applicazione $X(f) \in C^\infty(M)$ tale che $X(f)(p) \coloneqq \mathrm{d}f(X(p))$.

Tale applicazione dai campi vettoriali agli endomorfismi di $C^\infty(M)$ è facilmente iniettiva, ma non è surgettiva, poiché un endomorfismo indotto da un campo vettoriale deve rispettare la regola di Leibniz; infatti date $f, g \in C^\infty(M)$ vale

$$X(fg)(p) = \mathrm{d}(fg)(X(p)) = g \cdot \mathrm{d}f(X(p)) + f \cdot \mathrm{d}g(X(p)) = g \cdot X(f) + f \cdot X(g)\,.$$

Definizione 2.1.3. Una *curva integrale* di un campo vettoriale X è una curva differenziabile c tale che $c'(t) = X(c(t))$ per ogni t.

Se (U, φ) è una carta allora le coordinate $c^i(t)$ di c soddisfano le equazioni differenziali $\frac{\mathrm{d}c^i}{\mathrm{d}t} = X^i(c^1(t), \dots, c^n(t))$ per $i = 1, \dots, n$. Questo è un sistema autonomo, anche se in generale si possono considerare anche campi vettoriali dipendenti dal tempo.

Ora richiamiamo dei risultati sulle equazioni differenziali ordinarie che daremo per noti.

Teorema 2.1.4 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $X : U \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Allora per ogni $x_0 \in U$ esiste $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto con $0 \in I$ e $c : I \to \mathbb{R}^n$ tali che $c(0) = x_0$ e $c'(t) = X(c(t))$. Inoltre se esistono $c_1, c_2 : I_1, I_2 \to \mathbb{R}^n$ come sopra, allora esse coincidono su $I_1 \cap I_2$.*

Teorema 2.1.5 (Differenziabilità del flusso). *Se, nelle stesse ipotesi del teorema precedente, X è di classe C^k, allora esistono un intorno aperto $U_0 \subseteq U$, un numero $a > 0$ ed una funzione $F : U_0 \times (-a, a) \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k tali che per ogni $u \in U_0$ la curva $c_u(t) = F(u, t)$ sia una curva integrale di X tale che $c_u(0) = u$.*

2.2. Flusso locale di un campo vettoriale

Definizione 2.2.1. Sia M una varietà e $X \in \chi^r(M)$. Allora un *flusso locale* di X in $p \in M$ è una tripla (U_0, a, F) tale che:

1. $p \in U_0 \subseteq M$, U_0 è aperto e $a > 0$;
2. $F : U_0 \times I_a \to M$ è di classe C^r, dove $I_a = (-a, a)$;
3. per ogni $u \in U_0$ si ha che $c_u = F(u, \cdot) : I_a \to M$ è una curva integrale di X con dato iniziale u;
4. se per $t \in I_a$ chiamiamo $F^t(u) = F(u, t)$, allora $F^t(U_0)$ è aperto ed F^t è un diffeomorfismo C^r con l'immagine.

Prima di dimostrare l'esistenza di un flusso locale, mostriamone le proprietà di unicità e di omomorfismo locale.

Proposizione 2.2.2. *Due curve integrali di un campo vettoriale con la stessa condizione iniziale coincidono sull'intersezione dei loro domini.*

Dimostrazione. Osserviamo che non si può applicare direttamente il teorema di Cauchy-Lipschitz perché la curva potrebbe non appartenere ad una sola carta.

Siano c_1, c_2 le due curve considerate e sia $K = \{t \in I : c_1(t) = c_2(t)\} \subseteq I$, dove I è l'intersezione dei domini delle due curve (ed è dunque un intervallo di $\mathbb{R}$). L'insieme K è chiuso perché M è di Hausdorff, è aperto perché per ogni $t \in K$ si può prendere una carta che lo contiene ed applicare in carta il Teorema 2.1.4 (Cauchy-Lipschitz), ed è non vuoto perché per ipotesi $0 \in K$. Dunque, dato che I è connesso, $K = I$. □

Proposizione 2.2.3. *Se la tripla (U_0, a, F) soddisfa le ipotesi 1, 2 e 3 nella Definizione 2.2.1, allora $F^{s+t} = F^s \circ F^t = F^t \circ F^s$ per ogni $t, s, t + s \in I_a$.*

Inoltre F^0 è l'identità e, se $U_t = F^t(U_0)$ e $U_t \cap U_0 \neq \emptyset$, si ha che $F^t|_{U_{-t} \cap U_0} : U_{-t} \cap U_0 \to U_0 \cap U_t$ è un diffeomorfismo con inverso $F^{-t}|_{U_0 \cap U_t}$.

Dimostrazione. Abbiamo che $F^{s+t}(u) = c_u(s + t)$ e $F^t(F^s(u)) = F^t(c_u(s))$ sono entrambe curve integrali che passano per $c_u(s)$ per $t = 0$, dunque coincidono per la Proposizione 2.2.2, perciò $F^{s+t} = F^t \circ F^s$. Da ciò si deduce facilmente il resto. □

Proposizione 2.2.4 (Esistenza e unicità di flussi locali). *Sia X campo vettoriale di classe C^r, allora per ogni $p \in M$ esiste un flusso locale di X in p. Inoltre se (U_0, a, F), (U_0', a', F') sono flussi locali devono coincidere su $(U_0 \cap U_0') \times (I_a \cap I_{a'})$.*

Dimostrazione. **unicità:** Per ogni $u \in U_0 \cap U_0'$, se $I = I_a \cap I_{a'}$, allora $F|_{\{u\} \times I} = F'|_{\{u\} \times I}$ per la Proposizione 2.2.2, da cui l'unicità.

esistenza: Sia (U, φ) carta di M; consideriamo il rappresentate locale X_φ di X (cioè $X_\varphi(\varphi(q)) = T\varphi(X(q)))$, che genera un flusso locale $(U_\varphi, a_\varphi, F_\varphi)$. Supponiamo $U_\varphi \subseteq \varphi(U)$ e $F_\varphi(U_\varphi \times I_{a_\varphi}) \subseteq \varphi(U)$ e chiamiamo $\tilde{U} = \varphi^{-1}(U_\varphi)$.

Poniamo $F : \tilde{U} \times I_{a_\varphi} \to M$ tale che $F(u,t) = \varphi^{-1}(F_\varphi(\varphi(u), t))$. Per continuità esistono $b \in (0, a_\varphi)$ e $V \subseteq \tilde{U}$ tali che $F(V \times I_b) \subseteq \tilde{U}$. Allora (V, b, F) verifica 1, 2, 3 della Definizione 2.2.1. Per avere 4 notiamo che F^t ha inversa F^{-t} di classe C^r.

□

Esercizio 2.2.5. *Sia M varietà C^k, $X \in \chi^k(M)$. Sia $p \in M$ tale che $X(p) \neq 0$. Dimostrare che esiste (U, φ) carta tale che $X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}|_U$, dove $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$.*

Esercizio 2.2.6. *Sia $F : M \times \mathbb{R} \to M$ regolare tale che $F^{t+s} = F^t \circ F^s$ e $F^0 = F(\cdot, 0) = \mathrm{id}_M$. Mostrare che esiste un unico campo vettoriale X tale che F^t coincide con il flusso indotto da X.*

2.3. Flusso di un campo vettoriale

Definizione 2.3.1. Siano M una varietà e X un campo vettoriale. Sia $\mathscr{D}_X \subseteq M \times \mathbb{R}$ l'insieme degli (x,t) tali che esiste $c : I \to M$ curva integrale, con $c(0) = x$ e $t \in I$.

Il campo X è detto *completo* se $\mathscr{D}_X = M \times \mathbb{R}$ e completo per tempi positivi (rispettivamente negativi) se $\mathscr{D}_X \supseteq M \times \mathbb{R}^+$ (rispettivamente $\mathbb{R}^-$).

Chiamiamo $(T(x)^-, T(x)^+)$ l'intervallo massimale di una curva che passa per x al tempo 0.

Esempio.
1. Se $M = \mathbb{R}^2$, allora $X = (1,0)$ è completo, poiché $c_{(x,y)}(t) = (x+t, y)$ è una curva integrale definita su tutto $\mathbb{R}$ e passante per (x,y) al tempo 0.
2. Se $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\}$, allora $X = (1,0)$ è completo per tempi positivi.
3. Se $M = \mathbb{R}$ e $X(x) = 1 + x^2$, allora $c(t) = \tan t$ è una curva integrale con $c(0) = 0$, da cui $T^\pm(0) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Proposizione 2.3.2. *Siano M una varietà e $X \in \chi^r(M)$, con $r \geq 1$. Allora:*

1. *$M \times \{0\} \subseteq \mathscr{D}_X$;*
2. *$\mathscr{D}_X$ aperto;*
3. *esiste un'unica $F_X : \mathscr{D}_X \to M$ di classe C^r tale che $t \mapsto F_X(p,t)$ è una curva integrale che passa per p a tempo 0;*
4. *per $(p,t), (p, t+s) \in \mathscr{D}_X$ vale che $F_X(p, t+s) = F_X(F_X(p,t), s)$.*

Dimostrazione. I punti 1 e 2 seguono dalla Proposizione 2.2.4 (Esistenza e unicità di flussi locali). L'esistenza di F_X, cioè il punto 3, si ottiene incollando curve integrali e il punto 4 segue dall'unicità globale. Infine la regolarità C^r globale di F_X, segue da quella locale ricoprendo una data traiettoria con un numero finito di piccoli intorni. □

Definizione 2.3.3. Chiamiamo $t \mapsto F_X(p,t)$, con $(p,t) \in \mathscr{D}_X$, la *curva integrale massimale* passante per p a tempo 0.

Se X è completo, F_X è detto il *flusso generato da X*. In questo caso abbiamo una famiglia ad un parametro di diffeomorfismi.

Proposizione 2.3.4. *Supponiamo che X sia a supporto compatto in M. Allora X è completo.*

Dimostrazione. Se $p \notin \mathrm{supp}(X)$, allora $T^{\pm}(p) = \pm\infty$ con $F_X(p,t) = p$.

Se $p \in \mathrm{supp}(X)$, supponiamo per assurdo $T^{+}(p) < \infty$. Sia t_n una successione che converge crescendo a $T^{+}(p)$, allora per compattezza esiste t_{n_k} tale che $F_X(p, t_{n_k})$ converge a $\bar{p} \in M$. Però $\mathscr{D}_X$ è aperto, quindi contiene un intorno di $(\bar{p}, 0)$. Di conseguenza esiste $\tau > 0$ (indipendente da k sufficientemente grande) tale che il flusso che passa per $c(t_{n_k})$ a tempo 0 è definito almeno per un tempo τ. Allora potevamo estendere $c(t)$ fino a $t_{n_k} + \tau$, il che è assurdo per k abbastanza grande. □

Corollario 2.3.5. *Se M è compatta, allora X è completo.*

Esercizio 2.3.6. *Sia X campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ di classe C^r e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e propria (cioè controimmagine di compatti è compatta). Supponiamo che esistano $K, L > 0$ tali che $|X(f)(p)| \leq K|f(p)| + L$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che X è completo.*

CAPITOLO 3

DERIVATE E PRODOTTI DI LIE

3.1. Derivata e parentesi di Lie

La derivata di Lie è uno strumento che ci permette di calcolare variazioni di varie quantità (per esempio funzioni) quando ci muoviamo sulla varietà.

Siano f una funzione regolare su $\mathbb{R}^n$ e $p, v \in \mathbb{R}^n$. Allora $\mathrm{D}_v f(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+hv)-f(p)}{h}$ è la derivata direzionale in p lungo v. Questa si può ritrovare considerando $\gamma(t) = p + tv$ e calcolando $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))|_{t=0}$.

Ora vogliamo studiare il caso generale su varietà. Siano $p \in M$ ed f una funzione regolare definita in un intorno di p e sia $v \in T_pM$. Osserviamo innanzitutto che per definizione esiste c curva C^1 tale che $[c]_p = v$.

Definizione 3.1.1. Definiamo la *derivata direzionale* di f in p lungo v come $v(f)(p) \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(c(t))|_{t=0}$.

Se (U, φ) è una carta e $(\varphi \circ c)(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$, allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c)(t)|_{t=0} = \mathrm{D}_{[(c^1)'(0), \dots, (c^n)'(0)]}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\,,$$

quindi la derivata direzionale non dipende dalla scelta di $c \in [c]_p$.

Una curva integrale di un campo vettoriale X ha velocità $X(p)$ in p. Scegliamo allora come $c(t)$ una curva integrale di X, così la formula precedente diventa:

$$X(f)(p) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[f(F_X(p,h)) - f(p) \right]$$

e questa si chiama derivata di Lie di f rispetto ad X.

Questo approccio consente di estendere la definizione ai campi vettoriali, e non solo...

Sia ${F_X}^h(p) = F_X(p,h)$ la sezione del flusso locale in p generato da X. Allora $F = {F_X}^h$ è di classe C^r ed esiste la mappa tangente $F_*(v) = TF(v) \in T_{F(q)}M$, per $q \in M$, $v \in T_qM$.

Sia $p \in M$ e Y campo vettoriale definito in un intorno di p. Per $h \in \mathbb{R}^+$ abbastanza piccolo, abbiamo due vettori tangenti in p: $Y(p)$ e $(T{F_X}^h)(Y({F_X}^{-h}(p)))$.

Definizione 3.1.2. Definiamo la *derivata di Lie* in p di Y rispetto a X come

$$\mathcal{L}_X Y(p) = \lim_{h\to 0} \frac{Y(p) - ({F_X}^h)_* Y(p)}{h}\,.$$

Proposizione 3.1.3. *1. La derivata di Lie è lineare, cioè $\mathcal{L}_X Y$ è lineare in Y per ogni $X, Y \in \chi(M)$.*

2. *Vale la seguente regola per la derivata di Lie di un prodotto:* $\mathcal{L}_X(fY) = (Xf)Y + f\mathcal{L}_X Y$ *per ogni* $X, Y \in \chi(M)$*,* $f \in C^\infty(M)$*.*

Dimostrazione. **1** Ovvia.

2 Vale la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(fY)(p) =& \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(p)\cdot Y(p) - (F_X^h)_*(fY)(F_X^{-h}(p))\right] = \\ =& \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(p)\cdot Y(p) - f(F_X^{-h}(p))\cdot (F_X^h)_* Y(F_X^{-h}(p))\right] = \\ =& \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(p)\cdot [Y(p) - (F_X^h)_* Y(F_X^{-h}(p))] + \\ &+ [f(p) - f(F_X^{-h}(p))]\cdot (F_X^h)_* Y(F_X^{-h}(p))\} = \\ =& f(p)\cdot \mathcal{L}_X Y(p) + X(f)(p)\cdot Y(p)\,.\end{aligned}$$

□

Vediamo ora la scrittura della derivata di Lie in coordinate. Siano $p \in M$ e (U, φ) una carta con $p \in U$ e sia $(x^1, \dots, x^n)$ il sistema di coordinate corrispondente. Data $F = (F^1, \dots, F^n) : \tilde{U} \Subset U \to U$[1], abbiamo che

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^j}(x) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial F^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l}(F(x))\,.$$

Ci interessa $F = F_X^h$ con h piccolo. Abbiamo che $F(x) = x + hX(x) + \mathrm{o}(h)$, dove $\frac{\mathrm{o}(h)}{h} \to 0$ in C^1_{loc}. Allora

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x + hX(h) + \mathrm{o}(h)) + h\sum_{l=1}^n \frac{\partial X^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l}(x + hX(x) + \mathrm{o}(h)) + \mathrm{o}(h)\,,$$

da cui

$$\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^j} = -\sum_{l=1}^n \frac{\partial X^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l}\,.$$

Se nelle coordinate (x^i) indotte da φ abbiamo $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, allora

$$\mathcal{L}_X Y = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\,.$$

Questo campo vettoriale risulta essere il commutatore di X, Y.

Definizione 3.1.4. Dati $X, Y \in \chi^r(M)$, definiamo $[\,X,\,Y\,] \in \chi^{r-1}(M)$ il campo vettoriale tale che $[\,X,\,Y\,] = XY - YX$, che si chiama *commutatore* o *parentesi di Lie*. Intendiamo che, per ogni $f : M \to \mathbb{R}$ regolare, vale $[\,X,\,Y\,](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Dobbiamo però verificare che $[\,X,\,Y\,]$, appena definito come un endomorfismo di $C^\infty(M)$ (vedi la Nota 2.1.2), sia effettivamente un campo vettoriale su M. Per farlo

[1] Indichiamo $A \Subset B$, se $A \subset K \subset B$ con K compatto.

mostriamo che $\mathcal{L}_X Y$ agisce esattamente come $[X, Y]$ su $C^\infty(M)$, da cui otterremo che $[X, Y]$ è effettivamente un campo vettoriale che coincide con $\mathcal{L}_X Y$.

In una carta (U, φ), se $X(f) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}$, allora

$$\begin{aligned} Y(X(f)) = \sum_{j=1}^n Y^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \\ = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(Y^j(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} X^i \right) \frac{\partial f}{\partial x^i} + Y^j(x) X^i(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies [X, Y](f) = (XY - YX)(f) = \\ \sum_{i,j=1}^n \left(\left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j} + (X^i Y^j - X^j Y^i) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) = \mathcal{L}_X Y(f) \,. \end{aligned}$$

Nota 3.1.5. C'è un modo intrinseco per vedere che $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$:

1. $f \in C^\infty$ e $X \in \chi(M)$, allora $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((F_X^t)^* f) = (F_X^t)^* \mathcal{L}_X f$;
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_X^t)^* Y = (F_X^t)^* (\mathcal{L}_X Y)$.

3.2. Proprietà delle parentesi di Lie

Proposizione 3.2.1. *La parentesi di Lie soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *è bilineare;*
2. *è antisimmetrica, cioè $[X, Y] = -[Y, X]$ per ogni $X, Y \in \chi(M)$;*
3. (identità di Jacobi) *per ogni X, Y, Z vale:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \,.$$

Dimostrazione. Le proprietà 1 e 2 sono ovvie; vediamo allora la 3. Data $f \in C^\infty(M)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] f = X [Y, Z] f - [Y, Z] X f = X(YZ - ZY) f - (YZ - ZY) X f = \\ = XYZf - XZYf - YZXf + ZYXf \,. \end{aligned}$$

Risulta ora ovvio che sommando gli altri due termini si ha completa cancellazione. □

Nota 3.2.2. L'identità di Jacobi si interpreta anche nel modo seguente

$$\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z] \,.$$

Lemma 3.2.3. *Sia $\varphi : M \to N$ un diffeomorfismo e sia $X \in \chi(M)$, allora per $f \in C^\infty(M)$ vale che*

$$\mathcal{L}_{\varphi_* X}(f \circ \varphi^{-1}) = \varphi_* (\mathcal{L}_X f) \,.$$

Dimostrazione. Dato $n \in N$, vale

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\varphi_* X}(f \circ \varphi^{-1})(n) &= \mathrm{D}_{(\varphi_* X)(n)}(f \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{D}_{(T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1})(n)}(f \circ \varphi^{-1}) = \\ &= \mathrm{D}_{(X \circ \varphi^{-1})(n)} f(\varphi^{-1}(n)) = \varphi_*(\mathcal{L}_X f)(n)\,.\end{aligned}$$

□

Proposizione 3.2.4. *Sia $\varphi : M \to N$ un diffeomorfismo e siano $X, Y \in \chi(M)$, allora $\mathcal{L}_X$ è naturale rispetto al push-forward, cioè*

$$\mathcal{L}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y) = \varphi_*(\mathcal{L}_X Y)\,,$$

equivalentemente

$$[\,\varphi_* X,\, \varphi_* Y\,] = \varphi_*\,[\,X,\, Y\,]\ .$$

Dimostrazione. Sia $n \in N$ e sia $g \in C^\infty(V)$ con V aperto di N tale che $n \in V$. Sia inoltre $Z \in \chi(M)$, allora per il Lemma 3.2.3, posto $m = \varphi^{-1}(n)$, vale che

$$(\varphi_* Z)(g)(n) = Z(g \circ \varphi)(m)\,,$$

dove con la notazione del lemma abbiamo utilizzato $Z = X$ e $g = f \circ \varphi^{-1}$.

Quindi, ponendo $Z = [\,X,\, Y\,]$, abbiamo

$$\begin{aligned}(\varphi_*\,[\,X,\, Y\,])(g)(n) &= [\,X,\, Y\,]\,(g \circ \varphi)(m) = X(Y(g \circ \varphi))(m) - Y(X(g \circ \varphi))(m) = \\ &= X((\varphi_* Y)(g) \circ \varphi)(m) - Y((\varphi_* X)(g) \circ \varphi)(m) = \\ &= (\varphi_* X)((\varphi_* Y)(g))(n) - (\varphi_* Y)((\varphi_* X)(g))(n) = [\,\varphi_* X,\, \varphi_* Y\,]\,[g](n)\,,\end{aligned}$$

da cui abbiamo concluso perché se due campi coincidono applicati a tutte le funzioni C^∞, allora coincidono come campi vettoriali. □

3.3. Commutazione di campi vettoriali

Lemma 3.3.1. *Sia $\varphi : M \to N$ una mappa di classe C^r fra varietà e siano $X \in \chi^r(M)$, $Y \in \chi^r(N)$. Allora $(T\varphi)X = Y \circ \varphi$ se e solo se $\varphi \circ F_X^t = F_Y^t \circ \varphi$.*

In particolare, se φ è un diffeomorfismo (e se $(T\varphi)X = Y \circ \varphi$), abbiamo che $F_Y^t = \varphi \circ F_X^t \circ \varphi^{-1}$. Inoltre $(F_X^t)_* X = X$ (dove i flussi sono definiti).

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi \circ F_X^t = F_Y^t \circ \varphi$. Sia $p \in M$, allora

$$\varphi \circ F_X^t(p) = F_Y^t(\varphi(p))\,.$$

Derivando in t otteniamo perciò

$$\begin{aligned}&T\varphi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_X^t(p)\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_Y^t\right)(\varphi(p)) \\ &\implies (T\varphi \circ X \circ F_X^t)(p) = Y \circ F_Y^t \circ \varphi(p) = Y \circ \varphi \circ F_X^t(p) \\ &\implies (T\varphi)X = Y \circ \varphi\,.\end{aligned}$$

Ora viceversa supponiamo che $(T\varphi)X = Y \circ \varphi$. Sia $c(t) = F_X(p, t)$ (curva integrale di X che passa per p al tempo 0), allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \circ c)(t) = T\varphi\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right) = T\varphi(X(c(t))) = Y((\varphi \circ c)(t))\,.$$

Perciò $\varphi \circ c$ è una curva integrale per Y che passa per $\varphi(p)$ al tempo 0. Di conseguenza, per unicità, abbiamo

$$\varphi \circ F_X^{\,t}(p) = (\varphi \circ c)(t) = F_Y(\varphi(p), t) = F_Y^{\,t} \circ \varphi(p)\,.$$

Per dimostrare che $(F_X^{\,t})_* X = X$, scegliamo come φ il diffeomorfismo dato da $F_X^{\,s}$ con s fissato. Per la prima parta della proposizione $(F_X^{\,t})_* X = X$ se e solo se $F_X^{\,s} \circ F_X^{\,t} = F_X^{\,t} \circ F_X^{\,s}$, ma questo è vero per la commutatività. $\square$

Proposizione 3.3.2. *Siano $X, Y \in \chi^r(M)$ e siano $F_X^{\,t}, F_Y^{\,t}$ flussi (definiti localmente o globalmente) indotti da X e Y. Allora sono equivalenti:*

1. $[\,X,\,Y\,] = 0$;
2. $(F_X^{\,t})_* Y = Y$;
3. $(F_Y^{\,t})_* X = X$;
4. $F_X^{\,t} \circ F_Y^{\,s} = F_Y^{\,s} \circ F_X^{\,t}$.

Dimostrazione. Per il Lemma 3.3.1 la commutazione $F_X^{\,t} \circ F_Y^{\,s} = F_Y^{\,s} \circ F_X^{\,t}$ equivale a $Y = (F_X^{\,t})_* Y$. Quindi abbiamo mostrato che 4 è equivalente a 2 e allo stesso modo che è equivalente anche a 3.

Se ora supponiamo $(F_X^{\,t})_* Y = Y$, allora $[\,X,\,Y\,] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_X^{\,t})^* Y|_{t=0} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_X^{\,t})_* Y|_{t=0} = 0$. Viceversa, se $[\,X,\,Y\,] = 0$ allora $\mathcal{L}_X Y = 0$, da cui

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_X^{\,t})_* Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(F_X^{\,t+s})_* Y|_{s=0} = -(F_X^{\,t})_* \,[\,X,\,Y\,] = 0\,.$$

Perciò $(F_X^{\,t})_* Y$ è costante in t ed è uguale a Y, perché $(F_X^{\,0})_* Y = Y$. $\square$

Abbiamo visto che se $X(p) \neq 0$, allora esiste (U, φ) carta locale tale che $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ in un intorno di p. Consideriamo Y tale che $Y(p) \neq 0$ e $Y(p)$ è linearmente indipendente da $X(p)$. Ci chiediamo se esiste (U, φ) tale che $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$ in U. Se consideriamo il commutatore $\left[\,\frac{\partial}{\partial x^1},\,\frac{\partial}{\partial x^2}\,\right]$, questo è identicamente nullo per il teorema di Schwarz, infatti data $f \in C^\infty(U)$, abbiamo che

$$\left[\,\frac{\partial}{\partial x^1},\,\frac{\partial}{\partial x^2}\,\right] f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} = 0\,.$$

Proposizione 3.3.3. *Siano $X_1, \ldots, X_k \in \chi(M)$ linearmente indipendenti in un intorno U di $p \in M$. Se $[\,X_\alpha,\,X_\beta\,] = 0$ per ogni $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$, allora in $\tilde{U} \Subset U$, con $p \in \tilde{U}$, esistono coordinate $(\tilde{U}, x)$ tali che $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $M = \mathbb{R}^n$ con coordinate $(y^1, \ldots, y^n)$, $p = 0$ e $X_\alpha(0) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(0)$ per $\alpha = 1, \ldots, k$. Sia $F_{X_\alpha}^{\,t}$ il flusso generato da X_α e sia

$$\Psi(a^1, \ldots, a^n) \coloneqq F_{X_1}^{\,a_1}(F_{X_2}^{\,a_2}(\ldots(F_{X_k}^{\,a_k}(0, \ldots, 0, a^{k+1}, \ldots, a^n))))\,.$$

Vale allora che

$$\Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial a^\alpha}(0)\right) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(0)\,, & \text{per } \alpha = k+1, \ldots, n\,; \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F_{X_\alpha}^{\,t}(0)\right)|_{t=0} = X_\alpha(0) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(0)\,, & \text{per } \alpha = 1, \ldots, k\,. \end{cases}$$

Inoltre, poiché $[X_i, X_j] = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, k$, per la Proposizione 3.3.2 per $\alpha = 1, \dots, k$ possiamo scrivere

$$\Psi(a^1, \dots, a^n) = F_{X_\alpha}^{a_\alpha}(F_{X_1}^{a_1}(\dots(\widehat{F_{X_\alpha}^{a_\alpha}}(\dots(0, \dots, 0, a^{k+1}, \dots a^n))),$$

quindi vale in generale $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial a^\alpha}$ in un intorno dell'origine. □

Il commutatore dà una misura della non commutazione di due campi vettoriali. In particolare seguiamo in ordine X, Y, $-X$ e $-Y$ ciascuno per tempo h, allora il commutatore ci darà una stima di quanto il punto in cui arriviamo è lontano dal punto di partenza.

Proposizione 3.3.4. *Dato $p \in M$, sia $c(h) = F_Y{}^{-h} F_X{}^{-h} F_Y{}^h F_X{}^h(p)$. Allora $c'(0) = 0$.*

Dimostrazione. Definiamo $\alpha_1(t, h) = F_Y{}^t F_X{}^h(p)$, $\alpha_2(t, h) = F_X{}^{-t} F_Y{}^h F_X{}^h(p)$ e $\alpha_3(t, h) = F_Y{}^{-t} F_X{}^{-h} F_Y{}^h F_X{}^h(p)$. Notiamo innanzitutto che $c(t) = \alpha_3(t, t)$, $\alpha_3(0, t) = \alpha_2(t, t)$ e $\alpha_2(0, t) = \alpha_1(t, t)$. Inoltre data $f : M \to \mathbb{R}$ regolare, vale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f \circ \alpha_1}{\partial t} &= (Yf) \circ \alpha_1\,, & \frac{\partial f \circ \alpha_2}{\partial t} &= -(Xf) \circ \alpha_2\,, \\ \frac{\partial f \circ \alpha_3}{\partial t} &= -(Yf) \circ \alpha_3\,, & \frac{\partial f \circ \alpha_1}{\partial h}(0, h) &= (Xf)(\alpha_1(0, h))\,. \end{aligned}$$

Utilizzando quanto detto abbiamo

$$\begin{aligned} (f \circ c)'(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f \circ \alpha_3(t, t)]|_{t=0} = \mathrm{D}_1(f \circ \alpha_3)(0, 0) + \mathrm{D}_2(f \circ \alpha_3)(0, 0) = \\ &= \mathrm{D}_1(f \circ \alpha_3)(0, 0) + [\mathrm{D}_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) + \mathrm{D}_2(f \circ \alpha_2)(0, 0)] = \\ &= \mathrm{D}_1(f \circ \alpha_3)(0, 0) + \mathrm{D}_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) + \mathrm{D}_1(f \circ \alpha_1)(0, 0) + \mathrm{D}_2(f \circ \alpha_1)(0, 0) = \\ &= -(Yf) \circ \alpha_3(0, 0) - (Xf) \circ \alpha_2(0, 0) + (Yf) \circ \alpha_1(0, 0) + (Xf) \circ \alpha_1(0, 0) = \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di f ci dà la tesi $c'(0) = 0$. □

Proposizione 3.3.5. *Data $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tale che $c(0) = p$ e $c'(0) = 0$, possiamo definire un vettore $c''(0) \in T_pM$ come $(c''(0))(f) \coloneqq (f \circ c)''(0)$.*

Esercizio 3.3.6. *Usando la condizione $c'(0) = 0$, verificare che $c''(0)$ così definito è una derivazione.*

Teorema 3.3.7. *Se $c(t)$ è come nella Proposizione 3.3.4, allora $c''(0) = 2\,[X, Y]\,(p)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che, data $f : M \to \mathbb{R}$ regolare, vale $(f \circ c)(t) = (f \circ \alpha_3)(t, t)$. Dunque

$$(f \circ c)''(0) = \mathrm{D}_{1,1}(f \circ \alpha_3)(0, 0) + 2\mathrm{D}_{2,1}(f \circ \alpha_3)(0, 0) + \mathrm{D}_{2,2}(f \circ \alpha_3)(0, 0)\,.$$

D'altra parte, abbiamo che

- il primo termine equivale a

$$\mathrm{D}_{1,1}(f \circ \alpha_3)(0, 0) = \mathrm{D}_1(-Yf \circ \alpha_3)(0, 0) = YYf(p)\,;$$

- il secondo termine invece

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{2,1}(f\circ\alpha_3)(0,0) &= \mathrm{D}_2(-Yf\circ\alpha_3)(0,0) = \left[\mathrm{D}_1(-Yf\circ\alpha_2)+\mathrm{D}_2(-Yf\circ\alpha_2)\right](0,0) = \\ &= XYf(p) - \mathrm{D}_2(Yf\circ\alpha_2)(0,0) = \\ &= XYf(p) - [\mathrm{D}_1(Yf\circ\alpha_1)(0,0) + D_2(Yf\circ\alpha_1)(0,0)] = \\ &= XYf(p) - YYf(p) - XYf(p)\,;\end{aligned}$$

- analogamente si dimostra che per il terzo termine vale

$$\mathrm{D}_{2,2}(f\circ\alpha_3)(0,0) = YYf(p) + 2XYf(p) - 2YXf(p)\,.$$

E sommando i tre contributi otteniamo proprio quanto voluto. □

Esercizio 3.3.8. *Sia M compatta e $X, Y \in \chi^r(M)$, con $r \geq 2$. Siano ${F_X}^t, {F_Y}^t$ i flussi generati da X e Y (definiti globalmente). Dimostrare che se $[\,X,\,Y\,] = 0$ allora ${F_{X+Y}}^t = {F_X}^t \circ {F_Y}^t$.*

Esercizio 3.3.9. *Sia $f : M \to \mathbb{R}$ regolare e sia $p \in M$ tale che $\mathcal{L}_X f(p) = 0$ per ogni $X \in \chi(M)$ (cioè p è un punto critico di f). Dati $X_p, Y_p \in T_pM$, siano $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(M)$ tali che $\tilde{X}(p) = X_p$ e $\tilde{Y}(p) = Y_p$ (è facile costruirne). Definiamo $H_f(X_p, Y_p) := \tilde{X}(\tilde{Y}(f))(p)$.*

Mostrare che H_f è ben definita (ovvero non dipende dalla scelta delle estensioni $\tilde{X}, \tilde{Y}$) ed è simmetrica, cioè $H_f(X_p, Y_p) = H_f(Y_p, X_p)$.

CAPITOLO 4

DISTRIBUZIONI E VARIETÀ INTEGRALI

4.1. Definizioni di distribuzioni e varietà integrali

Dato $X \in \chi(M)$ e $p \in M$, abbiamo chiamato $F_X^t(p)$ la curva integrale di X passante per p al tempo 0. In particolare, se $X(p) \neq 0$, si ottiene una distribuzione.

Definizione 4.1.1. Una *distribuzione unidimensionale* Δ in un aperto U di M è una scelta regolare di un sottospazio unidimensionale Δ_p di T_pM per ogni $p \in U$.

Più in generale possiamo definire distribuzioni k-dimensionali come segue.

Definizione 4.1.2. Una *distribuzione k-dimensionale* in $U \subseteq M^n$ aperto ($k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$) è una mappa regolare $p \mapsto \Delta_p$ tale che Δ_p è un sottospazio k-dimensionale di T_pM per ogni $p \in U$.

In questo caso, mappa regolare significa che esistono $X_1, \dots, X_k \in \chi(U)$ tali che $X_i(q) \neq 0$ e $\Delta_q = \operatorname{span}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ per ogni $q \in U$.

Definizione 4.1.3. Una *varietà integrale* per Δ è una sottovarietà N di M tale che, se $i : N \to M$ è l'inclusione, allora $(Ti)(T_pN) = \Delta_p$ per ogni $p \in N$.

Esempio. Sia $X \in \chi(U)$ con $X(p) \neq 0$ per $p \in U$. Allora $\Delta_q = \operatorname{span}\{X(q)\}$, $q \in \tilde{U} \Subset U$, è una distribuzione 1-dimensionale e curve integrali di X sono varietà integrali di Δ.

Invece per $k > 1$ le distribuzioni k-dimensionali non sempre ammettono varietà integrali (tranne per $k = n$).

Esempio. Sia $M = \mathbb{R}^3$ e $k = 2$ e consideriamo la distribuzione $\Delta_p = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial x}(p) + y\frac{\partial}{\partial z}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p)\}$. In particolare, se $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, Δ_{p_0} è il piano di equazione $\{z = y_0 x\}$. Vogliamo mostrare che per questa distribuzione non esiste una varietà integrale.

Supponiamo per assurdo che esista una varietà integrale N e supponiamo inoltre $0 \in N$. Consideriamo la curva $\gamma_1(s) = (0, s, 0)$, allora per ogni s il vettore $\dot{\gamma}_1(s)$ appartiene a $\Delta_{\gamma_1(s)} = T_{\gamma_1(s)}N$ e perciò γ_1 è una curva in N[1]. Consideriamo ora un punto $(0, y_0, 0)$ con $|y_0|$ abbastanza piccolo e la curva $\gamma_2(s) = (0, y_0, 0) + s(1, 0, y_0)$. Allora $\dot{\gamma}_2(s) \in \Delta_{\gamma_2(s)} = T_{\gamma_2(s)}N$ e analogamente γ_2 è una curva di N.

Di conseguenza N dovrebbe essere localmente unione di rette. Consideriamo allora $\bar{p} = (1, 0, 0)$ e sia $\gamma_3(s)$ la curva che descrive $N \cap \{x = 1\}$. Si ha che $\gamma_3(s) = (1, s, s)$; perciò $\dot{\gamma}_3(0)$ ha componente z diversa da 0 e di conseguenza $\gamma_3(0) \neq \Delta_{\gamma_3(0)}$.

[1]Sottovarietà regolari sono gli zeri di funzioni regolari con gradiente non nullo sulla varietà, perciò $N = \{g = 0\}$ con $\nabla g(q) \neq 0$ per ogni $q \in N$. Se la velocità di una curva γ sta nel tangente, allora $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g(\gamma(s)) = 0$ (perché $T_pN = \{v \ : \ \langle \nabla g(p), v \rangle = 0\}$).

4.2. Condizioni necessarie per l'esistenza di varietà integrali

Vogliamo ora studiare quando una distribuzione proviene da una varietà integrale. Sia Δ una distribuzione k-dimensionale in M.

Definizione 4.2.1. Un campo vettoriale $X \in \chi(M)$ è detto appartenere a Δ se $X(p) \in \Delta_p$ per ogni $p \in M$.

Sia N una varietà integrale per Δ e sia $i : N \to M$ l'inclusione. Se $X, Y \in \chi(M)$ appartengono a Δ, possiamo definire campi vettoriali corrispondenti su N.

Lemma 4.2.2. *Sia $i : N \to M$ un'immersione e sia $X \in \chi(M)$ tale che $X(i(p)) \in (Ti)(T_pN)$. Allora esiste $\bar{X} \in \chi(N)$ tale che $(Ti)\bar{X}(p) = X(i(p))$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $(Ti)(p)$ è iniettivo per ogni $p \in N$ e perciò $(Ti)(p)$ è un isomorfismo tra T_pN e $(Ti)(T_pN)$. Quindi per ogni $p \in N$ esiste un unico $\bar{X}(p)$ tale che $(Ti)(\bar{X}(p)) = X(i(p))$. Basta perciò verificare che $\bar{X}(p)$ è regolare in $p \in N$.

È facile vedere che esistono carte (V, ψ) e (U, φ) in N ed M rispettivamente tali che

$$\varphi \circ i \circ \psi^{-1}(a^1, \dots, a^k) = (a^1, \dots, a^k, 0, \dots, 0)\,.$$

Questo mostra che $(Ti)(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \frac{\partial}{\partial y^j}|_{i(p)}$ per $j = 1, \dots, k$, dove $\psi = (x^1, \dots, x^k)$ e $\varphi = (y^1, \dots, y^n)$. Allora, se $X = \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{\partial}{\partial y^j}$ con $\alpha_j \in C^\infty$ e $\bar{X} = \sum_{j=1}^k \beta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, allora per linearità di Ti abbiamo $\beta^j = \alpha^j$ per $j = 1, \dots, k$. Quindi β^j è regolare in x e $\bar{X} \in \chi(N)$. □

Siano $X, Y \in \chi(M)$ che appartengono a Δ, allora per il Lemma 4.2.2 esistono $\bar{X}, \bar{Y} \in \chi(N)$ tale che $(Ti)\bar{X} = X$ e $(Ti)\bar{Y} = Y$. Notiamo che $Ti[\bar{X}, \bar{Y}](p) = [Ti\bar{X}, Ti\bar{Y}](i(p)) = [X, Y](i(p))$ per ogni $p \in N$. Per ipotesi, dato $v \in T_pN$, allora $(Ti)v \in \Delta_{i(p)}$; di conseguenza $[X, Y](i(p))$ deve appartenere a $\Delta_{i(p)}$ per ogni $p \in N$.

Definizione 4.2.3. Una distribuzione k-dimensionale Δ è detta *integrabile* se per ogni $X, Y \in \Delta$ vale che $[X, Y] \in \Delta$.

Proposizione 4.2.4. *Se $X_1, \dots, X_k \in \chi(M)$ generano Δ, distribuzione k-dimensionale in un intorno di un certo punto $p \in M$, allora Δ è integrabile se e solo se $[X_i, X_j]$ è una combinazione lineare del tipo $\sum_{\alpha=1}^k c_{ij}^\alpha X_\alpha$, per ogni $i, j = 1, \dots, k$.*

Dimostrazione. L'integrabilità implica l'esistenza dei c_{ij}^α facilmente.

Viceversa, supponiamo che $[X_i, X_j] = \sum_{\alpha=1}^k c_{ij}^\alpha X_\alpha$. Siano $X, Y \in \Delta$, allora $X = \sum_{i=1}^k a^i X_i$ e $Y = \sum_{j=1}^k b^j Y_j$ con $a^i, b^j \in C^\infty(M)$. Per linearità basta verificare che $[a^i X_i, b^j Y_j] \in \Delta$. Ma per Leibniz e poiché $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$, vale che

$$[a^i X_i, b^j Y_j] = a^i b^j [X_i, X_j] + a^i (X_i b^j) Y_j - b^j (Y_j a^i) X_i\,,$$

dove la parte a destra appartiene a Δ e quindi si conclude. □

4.3. Teorema di Frobenius

Teorema 4.3.1 (Frobenius). *Sia Δ una distribuzione (regolare) k-dimensionale in M. Allora, se Δ è integrabile, per ogni $p \in M$ esiste una carta (U, φ) tale che $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(U) = (\,-\varepsilon,\, \varepsilon\,)^n$ e tale che per ogni $a^{k+1}, \ldots, a^n$ con $|a^j| < \varepsilon$ l'insieme $\{q \in U \ :\ x^j(q) = a^j, j = k+1, \ldots, n\}$ è una varietà integrale di Δ.*

Inoltre, localmente vicino a p, ogni varietà integrale di Δ è di questo tipo.

Dimostrazione. Possiamo supporre $M = \mathbb{R}^n$ e $\Delta_0 = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial t^1}(0), \ldots, \frac{\partial}{\partial t^k}(0)\}$. Sia $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la proiezione sulle prime k coordinate. Allora $T\pi|_{\Delta_0} : \Delta_0 \to T_0\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo e per continuità $T\pi|_{\Delta_q} : \Delta_q \to \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo per q vicino a 0. Quindi possiamo scegliere $X_1, \ldots, X_k \in \Delta$ (vicino a 0) tali che $(T\pi)X_i(q) = \frac{\partial}{\partial t^i}|_{\pi(q)}$ per $i = 1, \ldots, k$. Perciò $(T\pi)([\,X_i,\, X_j\,])(q) = \left[\,\frac{\partial}{\partial t^i},\, \frac{\partial}{\partial t^j}\,\right](\pi(q)) = 0$ e, poiché $T\pi$ è un isomorfismo, $[\,X_i,\, X_j\,](q) = 0$ per ogni q vicino a 0 e per ogni $i, j = 1, ...k$. Quindi per la Proposizione 3.3.3 esistono coordinate (x^i) vicino a 0 tali che $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ vicino a 0, per $i = 1, \ldots, k$. Notiamo ora che gli insiemi $\{q \in U \ :\ x^j(q) = a^j, j = k+1, \ldots, n\}$ sono varietà integrali di Δ, poiché i vettori tangenti sono combinazioni di $\frac{\partial}{\partial x^i}$ per $i = 1, \ldots, k$ e quindi di X_i con $i = 1, \ldots, k$.

Sia ora N una varietà integrale connessa di Δ vicino a 0 e sia $i : N \to U$ la sua inclusione. Consideriamo (nelle coordinate (x^i) definite sopra) la funzione $x^m \circ i : N \to \mathbb{R}$ per $m = k+1, \ldots, n$. Per ogni $v \in T_qN$ vale $v(x^m \circ i) = (Ti)(v)(x^m) = 0$, perché Δ_q è generata da $\frac{\partial}{\partial x^i}(q)$ per $i = 1, \ldots, k$. Quindi, dato che N è connessa, x^m è costante su N per $m = k+1, \ldots, n$. $\square$

Esercizio 4.3.2 (Parcheggio). *Consideriamo un'auto m in un parcheggio infinito. La posizione è descritta da coordinate (x, y, θ) con $x, y \in \mathbb{R}$, $\theta \in S^1$. Supponiamo di poter sterzare solo tutto a sinistra o tutto a destra, in modo che l'auto descriva (in avanti o indietro) delle traiettorie circolari di curvatura ± 1. Dimostrare che partendo da $(x, y, \theta) = (0, 0, 0)$ si può arrivare arbitrariamente vicini a configurazioni qualsiasi muovendosi come sopra (con traiettorie spezzate).*

CAPITOLO 5

CALCOLO TENSORIALE

5.1. Definizione e operazioni su spazi vettoriali

Dati $V_1, \ldots, V_k, W$ spazi vettoriali, denotiamo con $\mathscr{L}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ lo spazio delle mappe k-multilineari da $V_1 \times \ldots \times V_k$ in W. In tutta la trattazione considereremo spazi vettoriali di dimensione finita. Denotiamo inoltre con $V^* = \mathscr{L}(V, \mathbb{R})$ lo spazio duale di V. Se V è n-dimensionale ed $e_1, \ldots, e_n$ è una sua base, esiste una base $e^1, \ldots, e^n$ di V^* tale che $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$ [1]. In particolare, dati $v \in V$ e $\alpha \in V^*$, abbiamo che $v = \sum_{i=1}^n \langle e^i, v \rangle e_i$ e $\alpha = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, e_i \rangle e^i$.

Definizione 5.1.1. Dato V spazio vettoriale definiamo

$$T^r_s(V) \coloneqq \mathscr{L}^{r+s}(\underbrace{V^*, \ldots, V^*}_{r \text{ copie}}, \underbrace{V, \ldots, V}_{s \text{ copie}}, \mathbb{R})\,.$$

Gli elementi di $T^r_s(V)$ sono detti *tensori* su V, *controvarianti* di ordine r e *covarianti* di ordine s (oppure tensori di tipo (r, s)).

Nota 5.1.2. Analogamente possiamo definire $T^r_s(V, W) = \mathscr{L}^{r+s}(V^*, \ldots, V^*, V, \ldots, V, W)$.

Definizione 5.1.3. Dati $t_1 \in T^{r_1}_{s_1}(V)$ e $t_2 \in T^{r_2}_{s_2}(V)$, il *prodotto tensore* di t_1 e t_2 è il tensore $t_1 \otimes t_2 \in T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$ definito come

$$\begin{aligned} t_1 \otimes t_2(\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2}, f_1, \ldots, f_{s_1}, g_1, \ldots, g_{s_2}) &\coloneqq \\ &t_1(\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, f_1, \ldots, f_{s_1}) t_2(\gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2}, g_1, \ldots, g_{s_2})\,, \end{aligned}$$

con $\beta^j, \gamma^j \in V^*$ e $f_i, g_i \in V$.

Esempio. Vediamo alcuni casi interessanti:

1. $T^1_0(V) = \mathscr{L}(V^*, \mathbb{R}) \cong V$, infatti un elemento $v \in V$ agisce su V^* tramite l'applicazione $\alpha \mapsto \langle \alpha, v \rangle$. In questo senso scriveremo $v \in T^1_0$ e in generale quando parleremo di elementi di V come tensori sottintenderemo questa corrispondenza.

2. $T^0_1(V) \cong V^*$. Analogamente al caso precedente, nel seguito daremo per scontata questa corrispondenza e diremo $\alpha \in T^0_1$ per un elemento $\alpha \in V^*$.

3. $T^0_2(V) \cong \mathscr{L}(V, V^*)$, tramite l'isomorfismo dato dalla relazione $t(v, w) = \langle f(v), w \rangle$, con $t \in T^0_2(V)$ ed $f \in \mathscr{L}(V, V^*)$.

[1] Dati $\alpha \in V^*$ e $v \in V$, indichiamo con $\langle \alpha, v \rangle$ l'elemento α applicato a v.

4. $T_1^1(V) \cong \mathscr{L}(V, V)$, tramite la relazione $t(\alpha, v) = \langle \alpha, \tilde{f}(v) \rangle$, con $t \in T_1^1(V)$ e $\tilde{f} \in \mathscr{L}(V, V)$.

Proposizione 5.1.4. *Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale con base $e_1, \ldots, e_n$. Sia $e^1, \ldots, e^n$ la base duale di V^*. Allora elementi del tipo $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}$ formano una base di $T_s^r(V)$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che elementi come sopra sono linearmente indipendenti e generano linearmente $T_s^r(V)$.

Supponiamo che non valga la lineare indipendenza, allora esiste una loro combinazione lineare a coefficienti non nulli che si annulla:

$$\sum t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s} = 0\,.$$

Applichiamo questo tensore a $(e^{k_1}, \ldots, e^{k_r}, e_{l_1}, \ldots, e_{l_s})$, allora otteniamo $t^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s} = 0$. Questo per ogni $(k_1, \ldots, k_r)$ e $(l_1, \ldots, l_s)$, che è assurdo.

Dato ora $t \in T_s^r(V)$, possiamo scrivere

$$t = \sum t(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_s})\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}\,,$$

da cui abbiamo anche che gli elementi cercati generano $T_s^r(V)$. □

Definizione 5.1.5. I coefficienti $t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ sono detti *componenti* di t rispetto alla base $e_1, \ldots, e_n$ di V.

Esempio.

1. Se $t \in T_2^0(V)$, le sue componenti sono $t_{ij} = t(e_i, e_j)$, che formano una matrice $n \times n$. A questa matrice associamo la forma bilineare ovvia. Nel caso di $\mathbb{R}^2$, se $t_{ij} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, associamo quindi la forma

   $$t(x, y) = Ax_1y_1 + Bx_1y_2 + Cx_2y_1 + Dx_2y_2\,.$$

   Il tensore t è detto *simmetrico* se $t(e_i, e_j) = t(e_j, e_i)$. In questo caso anche la matrice associata è simmetrica. Questo genera la forma quadratica $Q(e) = t(e, e)$, dalla quale possiamo riottenere t come $t(e_i, e_j) = \frac{1}{4}[Q(e_i + e_j) - Q(e_i - e_j)]$.

2. In generale $t \in T_0^r(V)$ è detto *simmetrico* se $t(\alpha^1, \ldots, \alpha^r) = t(\alpha^{\sigma(1)}, \ldots, \alpha^{\sigma(r)})$ per ogni permutazione σ e per tutti gli $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in V^*$. Inoltre possiamo ancora associare al tensore t il polinomio $P(\alpha) = t(\alpha, \ldots, \alpha)$, omogeneo di grado r.

   Vale una definizione analoga per i tensori covarianti simmetrici.

3. Data σ permutazione di $\{1, \ldots, k\}$, lo spazio $\mathscr{L}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ è isomorfo allo spazio $\mathscr{L}^k(V_{\sigma(1)}, \ldots, V_{\sigma(k)}, W)$. Tale isomorfismo si vede come

   $$A \in \mathscr{L}^k(V_1, \ldots, V_k, W) \mapsto A' \in \mathscr{L}^k(V_{\sigma(1)}, \ldots, V_{\sigma(k)}, W)$$

   tale che $A'(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(k)}) = A(e_1, \ldots, e_k)$.

Definizione 5.1.6. La *delta di Kronecker* è il tensore $\delta \in T_1^1(V)$ definito come

$$\delta(\alpha, e) \coloneqq \langle \alpha, e \rangle\,.$$

Nota 5.1.7. La δ corrisponde all'identità su V quando consideriamo $T_1^1(V) \cong \mathscr{L}(V,V)$.

Inoltre, fissando una base, risulta che $\delta = \sum_{i,j} \delta^i_j \, e_i \otimes e^j$, dove δ^i_j sono i classici simboli di Kronecker.

Definizione 5.1.8. Il *prodotto interno* di un tensore con un vettore $v \in V$ è una mappa $i_v : T^r_s(V) \to T^r_{s-1}(V)$ tale che

$$i_v t(\beta^1, \ldots, \beta^r, v_1, \ldots, v_{s-1}) \coloneqq t(\beta^1, \ldots, \beta^r, v, v_1, \ldots, v_{s-1})\,.$$

Analogamente possiamo definire il *prodotto interno* con un covettore $\beta \in V^*$ come una mappa $i^\beta : T^r_s(V) \to T^{r-1}_s(V)$ tale che

$$i^\beta t(\beta^1, \ldots, \beta^{r-1}, v_1, \ldots, v_s) \coloneqq t(\beta, \beta^1, \ldots, \beta^{r-1}, v_1, \ldots, v_s)\,.$$

Nota 5.1.9. Le mappe $i_v : T^r_s(V) \to T^r_{s-1}(V)$ e $i^\beta : T^r_s(V) \to T^{r-1}_s(V)$ sono lineari, così come le mappe $v \mapsto i_v$ e $\beta \mapsto i^\beta$.

Vediamo ora i prodotti interni in componenti. Per linearità, ci basta esplicitarli per i tensori della base.

$$i_{e_k}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}) = \delta^{j_1}_k \; e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}\,,$$

$$i^{e^k}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}) = \delta^k_{i_1} \; e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}\,.$$

Definizione 5.1.10. La *contrazione* del k-esimo indice controvariante con l'l-esimo indice covariante (contrazione di tipo (k,l)) è la mappa lineare $C^k_l : T^r_s(V) \to T^{r-1}_{s-1}(V)$ definita da

$$\begin{aligned} C^k_l(t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \; e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}) &\coloneqq \\ = t^{i_1\ldots i_{k-1} p i_{k+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{l-1} p j_{l+1}\ldots j_s} \; e_{i_1} \otimes \ldots \otimes \hat{e}_{i_k} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes \hat{e}^{j_l} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}\,, \end{aligned}$$

dove per convenzione quando si scrivono indici alti e bassi ripetuti si intende che si somma da 1 ad n (notazione di Einstein). In questo particolare caso si sta quindi sommando su p.

Esercizio 5.1.11. *La contrazione (k,l) è indipendente dalla base $e_1, \ldots, e_n$ di V.*

Supponiamo ora che V sia dotato di un prodotto interno $\ll \cdot, \cdot \gg$ simmetrico e definito positivo. Siano $e_1, \ldots, e_n$ una base di V e $e^1, \ldots, e^n$ la base del duale V^*. Sia inoltre $g_{ij} \coloneqq \ll e_i, e_j \gg$ la matrice dei coefficienti del prodotto interno.

Allora abbiamo due isomorfismi (musicali) che sono:

1. $\flat : V \to V^*$ (*bemolle*) tale che $x \mapsto \ll x, \cdot \gg$;

2. $\sharp : V^* \to V$ (*diesis*) che è il suo inverso.

La matrice dei coefficienti di $\flat$ è g_{ij} stessa, poiché $(x^\flat)_i = g_{ij} x^j$. Invece la matrice dei coefficienti di $\sharp$ è g^{ij}, cioè la matrice inversa di g_{ij}; infatti $(\alpha^\sharp)^i = g^{ij} \alpha_j$.

L'operatore $\flat$ è detto *operatore di abbassamento di indice*, mentre $\sharp$ *operatore di innalzamento*. Questo perché permettono di passare da tensori del tipo (r,s) a tensori del tipo $(r-1, s+1)$ e $(r+1, s-1)$ rispettivamente.

Esempio. Se t è di tipo $(0,2)$, possiamo definire $t' \in T^1_1(V)$ tramite $t'(\alpha, e) = t(\alpha^\sharp, e)$ e avremo che $(t')^i_j = g^{ik} t_{kj}$.

Esempio. Vediamo ora degli esempi riguardanti le varie operazioni definite.

1. Dati $t \in T^2_1(V)$ e $x = x^i e_i$, risulta che il prodotto interno di t con x è

$$\begin{aligned} i_x t &= x^p \; i_{e_p}(t^{kl}_j \; e_k \otimes e_l \otimes e^j) = x^p \; t^{kl}_j \; i_{e_p}(e_k \otimes e_l \otimes e^j) = \\ &= x^p \; t^{kl}_j \; \delta^j_p \; e_k \otimes e_l = x^j \; t^{kl}_j \; e_k \otimes e_l \, . \end{aligned}$$

   Mentre il prodotto interno di t con $\alpha = \alpha_p e^p$ è

$$i^\alpha t = \alpha_p \; t^{kl}_j \; i^{e^p}(e_k \otimes e_l \otimes e^j) = \alpha_k \; t^{kl}_j \; e_l \otimes e^j \, .$$

2. Se $t \in T^2_3(V)$, facendo una contrazione $(2,1)$, ottengo

$$C^2_1(t^{ij}_{klm} \; e_i \otimes e_j \otimes e^k \otimes e^l \otimes e^m) = t^{ij}_{klm} \; \delta^k_j \; e_i \otimes e^l \otimes e^m = t^{ik}_{klm} \; e_i \otimes e^l \otimes e^m \, .$$

3. Se $t \in T^1_1(V)$ la sua *traccia* è definita da $C^1_1(t) = t^i_i$.

4. Siano g_{ij} i coefficienti di $\ll \cdot, \cdot \gg$, con inversa g^{ij}. Alzando e abbassando gli indici otteniamo $g^{jk} g_{kl} = \delta^j_l$ e $g_{jk} g^{kl} = \delta^l_j$.

   Tramite un prodotto, si può definire anche la traccia di $t \in T^2_0(V)$ dalla traccia del tensore $(1,1)$ associato. Se $t = t^{ij} \; e_i \otimes e_j$, possiamo perciò definire $\mathrm{tr}(t) = \mathrm{tr}(g_{ij} t^{jk}) = g_{ik} t^{ik}$.

Esercizio 5.1.12. *Calcolare il prodotto interno di* $t = e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 + 3e_2 \otimes e_2 \otimes e^1$ *con* $e = -e_1 + 2e_2$ *e* $\alpha = 2e^1 + e^2$*, dove in questo caso* $V = \mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 5.1.13. *Siano* V, W *due spazi vettoriali con* $\dim(V) = n$ *e* $\dim(W) = m$*. Dimostrare che* $T^r_s(V, W)$ *ha dimensione* $n^{r+s} m$*.*

5.2. Push-forward e pull-back di trasformazioni lineari

Definiamo innanzitutto il duale di una trasformazione lineare.

Definizione 5.2.1. Siano V, W spazi vettoriali e $\varphi \in \mathscr{L}(V, W)$. Il *duale*, o *trasporto*, di φ è $\varphi^* \in \mathscr{L}(W^*, V^*)$ definita come

$$\varphi^* \beta(e) = \beta(\varphi(e)) \, ,$$

per ogni $\beta \in W^*$ ed $e \in V$.

Vediamo ora le relazioni fra i coefficienti di φ e φ^*. Siano $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{f_1, \ldots, f_m\}$ basi di V^n e W^m. Supponiamo $\varphi(e_i) = A^a_i f_a$ e diciamo che A^a_i [2] è la matrice associata a φ. Dato $v = v^i e_i \in V$, vale che $\varphi(v)^a = A^a_i v^i$. La matrice moltiplica a sinistra, quindi

$$\varphi^* f^a(e_i) = f^a(\varphi(e_i)) = f^a(A^b_i f_b) = A^b_i \delta^a_b = A^a_i \, .$$

Perciò vale che $\varphi^*(f^a) = A^a_i e^i$.

[2] Supponiamo che il pedice sia la colonna e l'apice la riga.

Se $\beta = \beta_a f^a \in W^*$, allora $\varphi^*(\beta) = \beta_a \varphi^*(f^a) = \beta_a A^a_i e^i$. Di conseguenza $(\varphi^*(\beta))_i = \beta_a A^a_i$, cioè la matrice moltiplica a destra.

Definiamo di seguito push-forward e pull-back di isomorfismi fra spazi vettoriali, vedendo poi che tale definizione si può estendere a tutte le trasformazioni nel caso di tensori solo controvarianti o solo covarianti rispettivamente.

Definizione 5.2.2. Se $\varphi \in \mathscr{L}(V, W)$ è un isomorfismo, il *push-forward* $\varphi_* = T^r_s(\varphi)$ è la mappa in $\mathscr{L}(T^r_s(V), T^r_s(W))$ definita da

$$\varphi_*(t)(\beta^1, \dots, \beta^r, f_1, \dots, f_s) = t(\varphi^*(\beta^1), \dots, \varphi^*(\beta^r), \varphi^{-1}(f_1), \dots, \varphi^{-1}(f_s)),$$

con $\beta^i \in W^*$ e $f_j \in W$.

Nota 5.2.3. Si verifica che φ_* è effettivamenete una mappa lineare.

Nota 5.2.4. Nel caso di tensori $(1, 0)$, cioè $\varphi_* = T^1_0(\varphi)$, si ha $T^1_0(V) \cong V$ e $T^1_0(W) \cong W$, allora $T^1_0(\varphi) \in \mathscr{L}(V, W)$ ed è proprio φ.

Proposizione 5.2.5. *Siano $\varphi \in \mathscr{L}(V, W)$, $\psi \in \mathscr{L}(W, Z)$ isomorfismi. Allora*

1. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$;

2. *se $i : V \to V$ è l'identità, allora $i_* : T^r_s(V) \to T^r_s(V)$ è l'identità;*

3. *$\varphi_* : T^r_s(V) \to T^r_s(W)$ è un isomorfismo e $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$;*

4. *se $t_1 \in T^{r_1}_{s_1}(V)$, $t_2 \in T^{r_2}_{s_2}(V)$, allora $\varphi_*(t_1 \otimes t_2) = \varphi_*(t_1) \otimes \varphi_*(t_2)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto il punto 1. Abbiamo infatti che

$$\begin{aligned}\psi_*(\varphi_*(t))(\gamma^1, \dots, \gamma^r, g_1, \dots, g_s) &= \varphi_*(t)(\psi^*(\gamma^1), \dots, \psi^*(\gamma^r), \psi^{-1}(g_1), \dots, \psi^{-1}(g_s)) = \\ &= t(\varphi^* \circ \psi^*(\gamma^1), \dots, \varphi^* \circ \psi^*(\gamma^r), \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(g_1), \dots, \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(g_s)) = \\ &= t((\psi \circ \varphi)^*(\gamma^1), \dots, (\psi \circ \varphi)^*(\gamma^r), (\psi \circ \varphi)^{-1}(g_1), \dots, (\psi \circ \varphi)^{-1}(g_s)) = \\ &= (\psi \circ \varphi)_* \, t(\gamma^1, \dots, \gamma^r, g_1, \dots, g_s),\end{aligned}$$

con $\gamma^i \in Z^*$ e $g_j \in Z$. Poi la 2 è ovvia, la 1 implica la 3 e la 4 segue dalla definizione di prodotto tensore. □

Definizione 5.2.6. Dato $\varphi \in \mathscr{L}(V, W)$ isomorfismo, $(\varphi^{-1})_* \in \mathscr{L}(T^r_s(W), T^r_s(V))$ è detto *pull-back* di φ ed è indicata con φ^*.

Proposizione 5.2.7. *Sia $\varphi \in \mathscr{L}(V, W)$ un isomorfismo e siano $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ basi di V e W. Sia A^a_i la matrice dei coefficienti di φ rispetto alle basi (cioè $\varphi(e_i) = A^a_i f_a$). Sia B^i_a la matrice dei coefficienti di φ^{-1}. Allora $[B^i_a]$ è l'inversa di $[A^a_i]$. Inoltre, siano $t \in T^r_s(V)$, $q \in T^r_s(W)$ tensori con componenti $t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ e $q^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$, allora*

$$(\varphi_* t)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = A^{a_1}_{i_1} \dots A^{a_r}_{i_r} \, t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \, B^{j_1}_{b_1} \dots B^{j_s}_{b_s},$$

$$(\varphi^* q)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = B^{i_1}_{a_1} \dots B^{i_r}_{a_r} \, q^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \, A^{b_1}_{j_1} \dots A^{b_s}_{j_s}.$$

Dimostrazione. Facilmente vale che

$$e_i = \varphi^{-1}(\varphi(e_i)) = \varphi^{-1}(A_i^a f_a) = A_i^a \varphi^{-1}(f_a) = A_i^a B_a^j e_j \,,$$

perciò $A_i^a B_a^j = \delta_i^j$. E analogamente si vede che $A_i^b B_a^i = \delta_a^b$. Vediamo ora che

$$\begin{aligned}(\varphi_* t)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} &= (\varphi_* t)(f^{a_1}, \dots, f^{a_r}, f_{b_1}, \dots, f_{b_s}) = \\ &= t(\varphi^*(f^{a_1}), \dots, \varphi^*(f^{a_r}), \varphi^{-1}(f_{b_1}), \dots, \varphi^{-1}(f_{b_s})) = \\ &= t(A^{a_1}_{i_1} e^{i_1}, \dots, A^{a_r}_{i_r} e^{i_r}, B^{j_1}_{b_1} e_{j_1}, \dots, B^{j_s}_{b_s} e_{j_s})\end{aligned}$$

E per linearità otteniamo l'enunciato, mentre l'altra formula si ricava nello stesso modo. □

A questo punto, come preannunciato, definiamo push-forward e pull-back per tutte le trasformazioni nel caso di tensori solo controvarianti o solo covarianti.

Definizione 5.2.8. Sia $\varphi \in \mathscr{L}(V, W)$ (non necessariamente invertibile). Definiamo il suo *pull-back* $\varphi^* \in \mathscr{L}(T_s^0(W), T_s^0(V))$ tramite $\varphi^* t(e_1, \dots, e_s) = t(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_s))$ con $t \in T_s^0(W)$.

Analogamente si definisce il *push-forward* per tensori che siano solo controvarianti.

Vediamo ora l'analogo della Proposizione 5.2.5 nel caso di pull-back fra tensori solo covarianti.

Proposizione 5.2.9. *Siano $\varphi \in \mathscr{L}(V, W)$ e $\psi \in \mathscr{L}(W, Z)$, allora*

1. $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$;
2. $i^* : T_s^0(V) \to T_s^0(V)$ *è l'identità;*
3. *se φ è un isomorfismo, lo è anche φ^* e* $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$;
4. *se* $t_1 \in T^0_{s_1}(V)$, $t_2 \in T^0_{s_2}(V)$, *allora* $\varphi^*(t_1 \otimes t_2) = \varphi^*(t_1) \otimes \varphi^*(t_2)$.

CAPITOLO 6

FIBRATI E CAMPI TENSORIALI

6.1. Risultati locali su varietà

Lo scopo è estendere l'algebra tensoriale a fibrati vettoriali (locali e poi globali).

Sia M una varietà, $U \subseteq M$ un aperto e V uno spazio vettoriale. Allora $U \times V$ e $U \times T^r_s(V)$ sono fibrati vettoriali locali.

Se $\varphi : U \times V \to U' \times V'$ è una mappa locale di fibrato e se φ ristretta alle fibre è un isomorfismo, allora φ induce una mappa di fibrato locale sui fibrati tensoriali corrispondenti.

Definizione 6.1.1. Sia $\varphi : U \times V \to U' \times V'$ una mappa locale di fibrato, come sopra. Definiamo $\varphi_* : U \times T^r_s(V) \to U' \times T^r_s(V')$ come $\varphi_*(u,t) = (\varphi_0(u), \varphi_*(t))$, dove φ_0 è la mappa definita sulla sezione nulla.

Lemma 6.1.2. *Sia* $\mathrm{GL}(V,W)$ *l'insieme degli isomorfismi fra* V *e* W*, che è un aperto in* $\mathscr{L}(V,W)$*. Sia* $\mathcal{A} : \mathscr{L}(V,W) \to \mathscr{L}(W^*,V^*)$ *tale che* $\varphi \mapsto \varphi^*$ *e* $\mathcal{B} : \mathrm{GL}(V,W) \to \mathrm{GL}(W,V)$ *tale che* $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$*. Allora* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *sono di classe* C^∞ *e* $\mathrm{D}\mathcal{B}(\varphi)[\psi] = -\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1}$*.*

Proposizione 6.1.3. *Se* $\varphi : U \times V \to U' \times V'$ *è una mappa locale di fibrato tale che* φ_u *(restrizione alla fibra su* u*) è un isomorfismo per ogni* $u \in U$*, allora* $\varphi_* : U \times T^r_s(V) \to U' \times T^r_s(V')$ *è una mappa locale di fibrati e* $(\varphi_u)_* = (\varphi_*)_u$ *è un isomorfismo per ogni* $u \in U$*.*

Inoltre se φ *è un isomorfismo locale di fibrati, lo è anche* φ_**.*

Dimostrazione. Il fatto che φ_* sia un isomorfismo sulle fibre segue dalla Proposizione 5.2.5, perciò bisogna solo verificare che $(\varphi_u)_* = (\varphi_*)_u$ è regolare. Però, φ_u è regolare in u per definizione e, per il Lemma 6.1.2, φ_u^* e $(\varphi_u)^{-1}$ sono regolari. Ricordiamo che $\varphi_* t(\beta^1, \dots, \beta^r, f_1, \dots, f_s) = t(\varphi^*(\beta^1), \dots, \varphi^*(\beta^s), \varphi^{-1}(f_1), \dots, \varphi^{-1}(f_s))$; allora segue immediatamente la regolarità di $(\varphi_u)_*$ valutando l'equazione precedente sulla fibra ed avendo a destra una funzione regolare. □

6.2. Fibrati tensoriali

Definizione 6.2.1. Sia $\pi : E \to B$ un fibrato vettoriale con fibra $E_b \coloneqq \pi^{-1}(b)$ per ogni $b \in B$. Definiamo il *fibrato tensoriale* relativo come

$$T^r_s(E) = \bigsqcup_{b \in B} T^r_s(E_b)\,,$$

dove $\sqcup$ indica l'unione disgiunta, e poniamo $\pi^r_s : T^r_s(E) \to B$ definito da $\pi^r_s(e) = b$ per ogni $e \in T^r_s(E_b)$. Inoltre, dato $A \subseteq B$, sia $T^r_s(E)|_A = \bigcup_{b\in A} T^r_s(E_b)$.

Definizione 6.2.2. Se $\pi' : E' \to B'$ è un altro fibrato vettoriale e se $(\varphi, \varphi_0) : E \to E'$ è una mappa fra fibrati vettoriali tale che $\varphi_b := \varphi|_{E_b}$ è un isomorfismo per ogni $b \in B$, sia $\varphi_* : T^r_s(E) \to T^r_s(E')$ il *push-forward* di φ definito da $\varphi_*|_{T^r_s(E_b)} = (\varphi_b)_*$.

Sia $(E|_U, \varphi)$ una carta locale di π, con $U \subseteq B$ aperto. Allora $\varphi_*|_{T^r_s(E)|_U}$ è una biezione su un fibrato locale e quindi è una carta locale. Inoltre $(\varphi_*)_b = (\varphi_b)_*$ è un isomorfismo lineare e quindi la carta preserva la struttura lineare di ogni fibra. Queste carte sono dette *carte naturali* di $T^r_s(E)$.

Teorema 6.2.3. *Se $\pi : E \to B$ è un fibrato vettoriale, l'insieme delle carte naturali di $\pi^r_s(E) : T^r_s(E) \to B$ è un atlante sul fibrato tensoriale.*

Dimostrazione. Perché il teorema sia vero deve valere che:

1. l'atlante ricopre il fibrato;
2. date carte di fibrato $(U_i, \tilde{\varphi}_i)$, $(U_j, \tilde{\varphi}_j)$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora $\tilde{\varphi}_i((U_i \times V) \cap (U_j \times V))$ è un fibrato locale (dove $V \cong E_b$) e $\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}$ è un isomorfismo locale di fibrati vettoriali.

La 1 segue dal fatto che partiamo da un atlante per E. Per la 2, abbiamo che $\alpha := \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}$ è un isomorfismo locale di fibrati; perciò, per la Proposizione 6.1.3, anche $\alpha_* = (\tilde{\varphi}_j)_* \circ (\tilde{\varphi}_i)_*^{-1}$ è un isomorfismo locale di fibrati. □

Nota 6.2.4. Si vede che se E ha una base numerabile, allora anche $T^r_s(E)$ ha una base numerabile.

Proposizione 6.2.5. *Sia $f : E \to E'$ una mappa tra fibrati che sia un isomorfismo su ogni fibra. Allora anche $f_* : T^r_s(E) \to T^r_s(E')$ è una mappa fra fibrati che è un isomorfismo su ogni fibra.*

Dimostrazione. Siano $(U, \tilde{\varphi})$ e $(V, \tilde{\psi})$ carte di fibrato su E ed E' tali che $f(U) \subseteq V$ e sia $f_{\tilde{\varphi}\tilde{\psi}} := \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ la mappa locale di fibrato corrispondente. Allora, usando l'atlante naturale, $(f_*)_{\tilde{\varphi}_*\tilde{\psi}_*} = (f_{\tilde{\varphi}\tilde{\psi}})_*$. □

Rivediamo ora le proprietà push-forward, già affrontate nella Proposizione 5.2.5, in questo nuovo contesto.

Proposizione 6.2.6. *Siano $f : E \to E'$ e $g : E' \to E''$ mappe tra fibrati che sono isomorfismi su ogni fibra. Allora*

1. *$g \circ f$ è ancora un isomorfismo su ogni fibra e $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;*
2. *se $i : E \to E$ è l'identità, allora $i_* : T^r_s(E) \to T^r_s(E)$ è l'identità;*
3. *se $f : E \to E'$ è un isomorfismo tra fibrati, lo è anche f^{-1} e $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.*

Dimostrazione. Per la 1 basta verificare la proprietà sui rappresentanti locali. La 2 è ovvia e insieme alla 1 implica la 3. □

Vogliamo ora studiare un caso particolarmente interessante, cioè quello in cui $E = TM$ con M varietà differenziabile.

Definizione 6.2.7. Sia M una varietà e sia $\tau_M : TM \to M$ il fibrato tangente. Allora $T^r_s(M) \coloneqq T^r_s(TM)$ è detto *fibrato dei tensori* su M controvarianti di ordine r e covarianti di ordine s (o di tipo (r,s)).

Quindi in particolare $T^1_0(M)$ si identifica con lo stesso TM e $T^0_1(M)$ con il fibrato cotangente, cioè le mappe lineari su vettori di TM. In particolare il fibrato cotangente si denota con $\tau^*_M : T^*M \to M$.

6.3. Campi tensoriali

Ricordiamo che una sezione γ di un fibrato $\pi : E \to B$ associa ad ogni $b \in B$ un elemento $\gamma(b) \in E$ tale che $\pi(\gamma(b)) = b$. Indichiamo con $\Gamma^\infty(E)$ (o $\Gamma^\infty(\pi)$) le sezioni di classe C^∞. Quando $E = T^r_s(M)$ parleremo di campi tensoriali.

Definizione 6.3.1. Un *campo tensoriale* di tipo (r,s) su una varietà M è una sezione di $T^r_s(M)$. Indicheremo $\Gamma^\infty(T^r_s(M))$ con $\mathcal{T}^r_s(M)$.

Elementi di $\mathcal{T}^1_0(M)$ sono i campi vettoriali (cioè $\chi(M)$), mentre elementi di $\mathcal{T}^0_1(M)$ sono detti *1-forme differenziali* (denotate $\chi^*(M)$).

Vediamo ora alcune operazioni sui campi tensoriali, riportando in questo contesto le operazioni che abbiamo già visto sui tensori.

Se $f \in C^\infty(M)$, $X_i \in \chi(M)$, $\alpha^i \in \chi^*(M)$, $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$ e $t' \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(M)$, possiamo definire

- $ft \in \mathcal{T}^r_s(M)$ come $(ft)(p) \coloneqq f(p)t(p)$;
- $t(\alpha^1, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_s) \in C^\infty(M)$ tale che
$$p \mapsto t(p)(\alpha^1(p), \dots, \alpha^r(p), X_1(p), \dots, X_s(p))\,;$$
- $t \otimes t' \in \mathcal{T}^{r+r'}_{s+s'}(M)$ tale che $p \mapsto t(p) \otimes t'(p)$.

Osserviamo che $ft = f \otimes t$, poiché possiamo vedere $f \in C^\infty(M)$ come un tensore in $\mathcal{T}^0_0(M)$. Analogamente possiamo ridefinire contrazioni e prodotti interni.

Vediamo ora la scrittura di un campo tensoriale in coordinate. Data (U, φ) carta di M, sappiamo che $\frac{\partial}{\partial x^i} = (T\varphi)^{-1}(e_i)$, dove $e_1, \dots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$; in particolare $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \chi(U) = \mathcal{T}^1_0(U)$.

Sia ora $\mathrm{d}x^i \in \chi^*(U) = \mathcal{T}^0_1(U)$ tale che $\mathrm{d}x^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i_j$, ovvero $\mathrm{d}x^i = \varphi^*(e^i)$ dove $e^1, \dots, e^n$ è la base duale di $e_1, \dots, e_n$. Notiamo che, come suggerisce la notazione, $\mathrm{d}x^i$ corrisponde al differenziale della funzione coordinata $x^i : U \to \mathbb{R}$.

Consideriamo ora $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$ e poniamo $t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \coloneqq t(\mathrm{d}x^{i_1}, \dots, \mathrm{d}x^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}) \in C^\infty(U)$, allora per linearità

$$t|_U = t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}\,.$$

Vediamo quindi i cambi di coordinate. Sia $\psi = (y^1, \dots, y^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un altro sistema di coordinate e supponiamo $\frac{\partial}{\partial y^i} = a^j_i \frac{\partial}{\partial x^j}$. Applichiamo il campo vettoriale alla funzione coordinata x^k, per ottenere $\frac{\partial x^k}{\partial y^i} = a_i^j \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = a_i^j \delta_j^k = a_i^k$ e quindi $\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$. Allo stesso modo $\mathrm{d}y^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j$.

Quindi se chiamiamo $\tilde{t}^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s} := t(\mathrm{d}y^{k_1},\dots,\mathrm{d}y^{k_r},\frac{\partial}{\partial y^{l_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial y^{l_s}})$ le componenti del tensore t rispetto alle coordinate $(y^1,\dots,y^n)$, abbiamo che

$$\tilde{t}^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s} = t\left(\mathrm{d}y^{k_1},\dots,\mathrm{d}y^{k_r},\frac{\partial}{\partial y^{l_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial y^{l_s}}\right) = \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\cdot\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}\,t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\,,$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà di linearità del tensore.

Nota 6.3.2. Osserviamo che i campi tensoriali possono essere definiti anche in un altro modo equivalente.

Lo spazio $\chi^*(M)$ può essere visto come $\mathscr{L}_{C^\infty(M)}(\chi(M),C^\infty(M))$. Infatti gli elementi di $\chi^*(M)$ sono $C^\infty(M)$-lineari, cioè dato $\alpha\in\chi^*(M)$ vale che $\alpha(fX)=f\alpha(X)$ per ogni $X\in\chi(M)$ e $f\in C^\infty(M)$.

Allo stesso modo $\mathcal{T}^r_s(M)$ può essere definito come

$$\mathscr{L}^{r+s}_{C^\infty(M)}(\underbrace{\chi^*(M),\dots,\chi^*(M)}_{r\text{ copie}},\underbrace{\chi(M),\dots,\chi(M)}_{s\text{ copie}},C^\infty(M))\,.$$

Definiamo infine l'algebra dei tensori su una varietà M.

Definizione 6.3.3. Sia $\mathcal{T}(M)$ la somma diretta dei $\mathcal{T}^r_s(M)$ per $r\geq 0$ ed $s\geq 0$. Risulta che $\mathcal{T}(M)$ è uno spazio vettoriale con prodotto $\otimes$ ed è detto *algebra dei tensori* su M.

Nota 6.3.4. Se $\varphi : M\to N$ è un diffeomorfismo, allora $\varphi_* : \mathcal{T}(M)\to\mathcal{T}(N)$ è un isomorfismo di algebre.

6.4. Tensore metrico

Notiamo che contrazioni e prodotti interni si possono sempre fare, ma per alzare e abbassare gli indici serve un prodotto scalare.

Definizione 6.4.1. Una *metrica* (o *tensore metrico*) su una varietà M è un campo tensoriale $g\in\mathcal{T}^0_2(M)$ che sia simmetrico e definito positivo, cioè $g(p)(v,v)>0$ per ogni $v\in T_pM$ diverso da 0.

Un tensore metrico permette di abbassare e alzare gli indici di un campo tensoriale, tramite per esempio $t^{ik}\mapsto t^{ij}g_{jk}$, che è una mappa $\mathcal{T}^2_0(M)\to\mathcal{T}^1_1(M)$.

Data $f\in C^\infty(M)$, con $f\mapsto\mathrm{d}f\in\chi^*(M)$, abbiamo che $\mathrm{d}f(v)=v(f)$ con $v\in T_pM$. Quindi tale funzione f ci dà in modo naturale una 1-forma. Per avere un gradiente ci serve una metrica che faccia cambiare il tipo di un tensore e nel particolar caso della 1-forma.

Definizione 6.4.2. Sia M una varietà con metrica g e sia $f\in C^\infty(M)$. Il campo vettoriale $(\mathrm{d}f)^\sharp$ è detto il *gradiente* di f, che denoteremo ∇f.

Vediamo ora la scrittura di tale gradiente in coordinate. Sia $g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ e siano $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ elementi di $\chi(M)$, allora

$$\langle X^\flat,Y\rangle = g(X,Y) = X^iY^jg\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X^iY^jg_{ij}\,,$$

perciò $X^\flat = X^i g_{ij}\,\mathrm{d}x^j$. Analogamente, data $\alpha \in \mathcal{T}^0_1(M)$ con $\alpha = \alpha_i\,\mathrm{d}x^i$, allora

$$(\alpha^\sharp)^i = g^{ij}\alpha_j \implies \alpha^\sharp = g^{ij}\alpha_j \frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

Perciò, se $\alpha = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$, abbiamo che

$$\nabla f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

6.5. Pull-back e push-forward di campi tensoriali

Ancora una volta possiamo rivedere i concetti di push-forward e pull-back, in questo caso di campi tensoriali, e riportarne le solite proprietà.

Definizione 6.5.1. Sia $\varphi : M \to N$ diffeomorfismo fra varietà e sia $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Il *push-forward* di t tramite φ è $\varphi_* t \coloneqq (T\varphi)_* \circ t \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{T}^r_s(N)$.

Se invece $t \in \mathcal{T}^r_s(N)$, definiamo il suo *pull-back* come $\varphi^* t \coloneqq (\varphi^{-1})_* t$.

Proposizione 6.5.2. *Sia $\varphi : M \to N$ un diffeomorfismo e $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Allora*

1. *$\varphi_* t \in \mathcal{T}^r_s(N)$;*
2. *$\varphi_* : \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^r_s(N)$ è un isomorfismo lineare;*
3. *se $\psi : N \to P$ è un diffeomorfismo, allora $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$;*
4. *$\varphi_*(t \otimes t') = \varphi_* t \otimes \varphi_* t'$, con $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$ e $t' \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(M)$.*

Nota 6.5.3. Come abbiamo già avuto modo di osservare, se $t \in \mathcal{T}^r_0(M)$, il suo push-forward $\varphi_* t$ è ben definito anche se φ non è un diffeomorfismo. Analogamente, se $t \in \mathcal{T}^0_r(N)$, il suo pull-back $\varphi^* t$ è ben definito anche se φ non è un diffeomorfismo.

Vediamo ora la scrittura del push-forward in coordinate. Sia $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$ e $\varphi : M \to N$ un diffeomorfismo tale che $x^j = y^j \circ \varphi$ per $j = 1, \dots, n$, con x e y sistemi di coordinate su M ed N rispettivamente. Allora abbiamo che

$$(\varphi_* t)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \left(\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \circ \varphi^{-1}\right) \dots \left(\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \circ \varphi^{-1}\right) \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}} t^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} \circ \varphi^{-1}\,,$$

e similmente vale per $\varphi^* t$.

Esempio. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(x, y, z) = (2x + z, xyz)$ e sia $t \in \mathcal{T}^0_2(\mathbb{R}^2)$ tale che $t = (u + 2v)\,\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + u^2\,\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v$. Allora $\varphi^*(\mathrm{d}u) = 2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z$ e $\varphi^*(\mathrm{d}v) = yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, da cui ricaviamo

$$\begin{aligned}
\varphi^*(t) =&(2x + z + 2xyz)(2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) \otimes (2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) + \\
&+ (2x + z)^2 (2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) \otimes (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z) = \\
=&2(2x + z)^2 yz\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + 2[2x + z + 2xyz + (2x + z)^2 yz]\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}z + \\
&+ 2(2x + z)^2 xz\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + [4x + 2z + 4xyz + yz(2x + z)^2]\,\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x + \\
&+ xz(2x + z)^2\,\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}y + [2x + z + 2xyz + xy(2x + z)^2]\,\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

CAPITOLO 7

DERIVATA DI LIE SUI TENSORI

7.1. Operatore differenziale sull'algebra dei tensori

Ci sono due possibili approcci:

1. approccio dinamico, che usa i flussi ed è quello che abbiamo usato per definire la derivata di Lie sui campi vettoriali;

2. approccio algebrico, che è invece quello che seguiremo noi e che utilizza la proprietà di Leibniz delle derivate.

Esempio. Vediamo come definire per esempio la derivata di Lie per 1-forme. Se $Y \in \chi(M)$ e $\alpha \in \chi^*(M)$, richiediamo che $\mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathcal{L}_X\alpha)(Y) + \alpha(\mathcal{L}_X Y)$, dove sappiamo cosa vuol dire la derivata di Lie su funzioni (in questo caso $\alpha(Y)$) e su campi (in questo caso Y), perciò la ricaviamo anche per le forme: $(\mathcal{L}_X\alpha)Y = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \alpha(\mathcal{L}_X Y)$.

Definizione 7.1.1. Un *operatore differenziale* sull'algebra dei tensori $\mathcal{T}(M)$ è una famiglia di mappe $\mathcal{D}^r_s$ da $\mathcal{T}^r_s(M)$ in sé tale che:

1. $\mathcal{D}$ sia una derivazione tensoriale, cioè commuta con le contrazioni.

   Vogliamo quindi che $\mathcal{D}$ sia $\mathbb{R}$-lineare e che, dati $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \chi^*(M)$ e $X_1, \dots, X_s \in \chi(M)$, valga

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s)) = {} & (\mathcal{D}t)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) + \\ & + \sum_{j=1}^{r} t(\alpha_1, \dots, \mathcal{D}\alpha_j, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) + \\ & + \sum_{k=1}^{s} t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_k, \dots, X_s)\,.\end{aligned}$$

2. $\mathcal{D}$ è locale (naturale rispetto alle restrizioni), dove supponiamo che $\mathcal{D}$ sia definito su $\mathcal{T}(U)$ in $\mathcal{T}(U)$ per ogni $U \subseteq M$ aperto.

   Chiediamo cioè che, se $U \subseteq V \subseteq M$ sono aperti e $t \in \mathcal{T}^r_s(V)$, allora $(\mathcal{D}t)|_U = \mathcal{D}(t|_U)$, ovvero che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^r_s(V) & \xrightarrow{i_U} & \mathcal{T}^r_s(U) \\ {\scriptstyle\mathcal{D}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathcal{D}}\big\downarrow \\ \mathcal{T}^r_s(V) & \xrightarrow{i_U} & \mathcal{T}^r_s(U) \end{array}$$

Teorema 7.1.2. *Supponiamo che per ogni $U \subseteq M$ aperto esistano mappe $\mathcal{E}_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ e $\mathcal{F}_U : \chi(U) \to \chi(U)$ che siano $\mathbb{R}$-lineari e derivazioni (naturali rispetto alle restrizioni), cioè*

1. $\mathcal{E}_U(f \otimes g) = (\mathcal{E}_U f) \otimes g + f \otimes (\mathcal{E}_U g)$ *per* $f, g \in C^\infty(U)$*;*
2. $\mathcal{F}_U(f \otimes X) = (\mathcal{E}_U f) \otimes X + f \otimes \mathcal{F}_U X$ *per* $f \in C^\infty(U)$ *e* $X \in \chi(U)$*;*
3. *se* $f \in C^\infty(M)$*, allora* $\mathcal{E}_U(f|_U) = (\mathcal{E}_M f)|_U$*;*
4. *per* $X \in \chi(M)$*, vale* $\mathcal{F}_U(X|_U) = (\mathcal{F}_M X)|_U$*.*

Allora esiste unico un operatore differenziale $\mathcal{D}$ che coincide con $\mathcal{E}_U$ su $C^\infty(U)$ e con $\mathcal{F}_U$ su $\chi(U)$ per ogni U aperto di M.

Dimostrazione. Innanzitutto definiamo $\mathcal{D}$ su $\chi^*(U)$ come

$$(\mathcal{D}\alpha)(X) \coloneqq \mathcal{E}_U(\alpha(X)) - \alpha(\mathcal{F}_U X)$$

per ogni $X \in \chi(U)$ e per ogni $\alpha \in \chi^*(U)$, ricordandoci che vogliamo che valga $(\mathcal{D}\alpha) \cdot X = \mathcal{D}(\alpha \cdot X) - \alpha \cdot (\mathcal{D}X)$.

Verifichiamo che $\mathcal{D}\alpha$ sia $C^\infty(M)$-lineare su $\chi(U)$ e che quindi sia effettivamente un elemento di $\chi^*(U)$. Abbiamo infatti che

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}\alpha)(fX) &= \mathcal{E}_U(\alpha(fX)) - \alpha(\mathcal{F}_U(fX)) = \mathcal{E}_U(f\alpha(X)) - \alpha[(\mathcal{E}_U f) \otimes X + f \otimes \mathcal{F}_U X] = \\ &= (\mathcal{E}_U f) \otimes \alpha(X) + f \otimes \mathcal{E}_U(\alpha(X)) - \alpha[(\mathcal{E}_U f) \otimes X] - \alpha[f \otimes \mathcal{F}_U X] = \\ &= f[\mathcal{E}_U(\alpha(X)) - \alpha(\mathcal{F}_U X)] = f(\mathcal{D}\alpha)(X)\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà 1 e 2.

Abbiamo perciò definito $\mathcal{D}\alpha \in \chi^*(U)$ per ogni $\alpha \in \chi^*(U)$. Possiamo quindi estendere la definizione in U ai tensori, utilizzando la proprietà 1, tramite

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_U t)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) \coloneqq\ & \mathcal{E}_U(t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s)) + \\ & - \sum_{j=1}^{r} t(\alpha_1, \dots, \mathcal{D}\alpha_j, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) + \\ & - \sum_{k=1}^{s} t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, \mathcal{F}_U X_k, \dots, X_s)\,,\end{aligned}$$

per ogni $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \chi^*(M)$ e $X_1, \dots, X_s \in \chi(M)$. Usando ancora le proprietà 1 e 2 si vede come prima che $\mathcal{D}_U$ su $\mathcal{T}^r_s(U)$ è $C^\infty(M)$-multilineare.

Per concludere, se $V \subseteq U$ aperto, per le proprietà 3 e 4 abbiamo $\mathcal{D}_V(t|_U) = (\mathcal{D}_U t)|_V$, per ogni $t \in \mathcal{T}(U)$. Quindi definiamo $\mathcal{D}$ su $\mathcal{T}^r_s(M)$ come $(\mathcal{D}t)(m) = (\mathcal{D}_U t)(m)$ per un qualunque U aperto che contiene m. Per l'unicità di $\mathcal{D}_U$, si ha anche l'unicità di $\mathcal{D}$ e inoltre vale anche la proprietà 2 richiesta. □

Corollario 7.1.3. *Dato $\mathcal{D}$ operatore differenziale sull'algebra dei tensori, valgono*

1. $\mathcal{D}(t_1 \otimes t_2) = (\mathcal{D}t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes (\mathcal{D}t_2)$*, con* $t_1 \in \mathcal{T}^{r_1}_{s_1}(M)$ *e* $t_2 \in \mathcal{T}^{r_2}_{s_2}(M)$*;*
2. $\mathcal{D}\delta = 0$*, dove δ è la delta di Kronecker.*

Dimostrazione. Il punto 1 segue dalla proprietà 1 richiesta all'operatore differenziale.

Verifichiamo quindi il punto 2. Siano $X \in \chi(U)$ e $\alpha \in \chi^*(U)$; allora, ancora per le proprietà di operatore differenziale, abbiamo

$$(\mathcal{D}\delta)(\alpha, X) = \mathcal{D}(\delta(\alpha, X)) - \delta(\mathcal{D}\alpha, X) - \delta(\alpha, \mathcal{D}X) = \mathcal{D}(\alpha X) - (\mathcal{D}\alpha)X - \alpha(\mathcal{D}X) = 0\,,$$

da cui $\mathcal{D}\delta = 0$ per l'arbitrarietà di X ed α. □

7.2. Estensione della derivata di Lie ai campi tensoriali

Trattiamo ora il caso particolare della derivata di Lie. Dati $X \in \chi(M)$ e $U \subseteq M$ aperto, definiamo $\mathcal{E}_U$ ed $\mathcal{F}_U$ come $\mathcal{L}_X|_U$. Allora, per Leibniz, le ipotesi del Teorema 7.1.2 sono soddisfatte e possiamo dare quindi la seguente definizione.

Definizione 7.2.1. Se $X \in \chi(M)$, definiamo $\mathcal{L}_X$ come l'unico operatore differenziale su $\mathcal{T}(M)$ (ancora detto *derivata di Lie*), tale che $\mathcal{L}_X$ coincide con le derivate di Lie rispetto a X su $C^\infty(M)$ e $\chi(M)$.

Proposizione 7.2.2. *Sia $\varphi : M \to N$ un diffeomorfismo e sia $X \in \chi(M)$. Allora $\mathcal{L}_X$ è naturale rispetto al push-forward, cioè $\mathcal{L}_{\varphi_* X}(\varphi_* t) = \varphi_*(\mathcal{L}_X t)$ per ogni $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$.*

Dimostrazione. Dato $U \subseteq M$ aperto, definiamo $\mathcal{D} : \mathcal{T}^r_s(U) \to \mathcal{T}^r_s(U)$ tale che $\mathcal{D}t = \varphi^* \mathcal{L}_{\varphi_* X|_U}(\varphi_* t)$. La derivata di Lie (su funzioni e campi vettoriali) è naturale rispetto ai push-forward per il Lemma 3.2.3 e la Proposizione 3.2.4, quindi $\mathcal{D}$ definita come sopra è una derivazione su funzioni $C^\infty(U)$ e su $\chi(U)$ che coincide con $\mathcal{L}_X t$ su di essi. Mostriamo che $\mathcal{D}$ è un operatore differenziale, verificandone le due proprietà:

1 Dati $X_1, \dots, X_s \in \chi(U)$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \chi^*(U)$, ricordiamo che

$$\varphi_*(t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s)) = (\varphi_* t)(\varphi_*\alpha_1, \dots, \varphi_*\alpha_r, \varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_s)\,,$$

perciò abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s)) = {} & \varphi^* \mathcal{L}_{\varphi_* X}(\varphi_*(t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s))) = \\
= {} & \varphi^* \mathcal{L}_{\varphi_* X}((\varphi_* t)(\varphi_*\alpha_1, \dots, \varphi_*\alpha_r, \varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_s))) = \\
= {} & \varphi^* [(\mathcal{L}_{\varphi_* X}\varphi_* t)(\varphi_*\alpha_1, \dots, \varphi_*\alpha_r, \varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_s) + \\
& + \sum_{j=1}^{r} (\varphi_* t)(\varphi_*\alpha_1, \dots, \mathcal{L}_{\varphi_* X}\varphi_*\alpha_j, \dots, \varphi_*\alpha_r, \varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_s) + \\
& + \sum_{k=1}^{s} (\varphi_* t)(\varphi_*\alpha_1, \dots, \varphi_*\alpha_r, \varphi_* X_1, \dots, \mathcal{L}_{\varphi_* X}\varphi_* X_k, \dots, \varphi_* X_s)]\,.
\end{aligned}$$

Sapendo che $\varphi^* = (\varphi^{-1})_*$, dall'ultima espressione ottengo

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s)) = {} & (\mathcal{D}t)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) + \\
& + \sum_{j=1}^{r} t(\alpha_1, \dots, \mathcal{D}\alpha_j, \dots \alpha_r, X_1, \dots, X_s) + \\
& + \sum_{k=1}^{s} t(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_k, \dots, X_s)\,,
\end{aligned}$$

che è proprio la proprietà richiesta.

2 Sia $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$, allora

$$(\mathcal{D}t)|_U = [(\varphi_*)^{-1}\mathcal{L}_{\varphi_* X}\varphi_* t]|_U = (\varphi_*)^{-1}[\mathcal{L}_{\varphi_* X}\varphi_* t]|_U = (\varphi_*)^{-1}\mathcal{L}_{\varphi_* X|_U}\varphi_* t|_U = \mathcal{D}(t|_U)\,.$$

Allora, per l'unicità data dal Teorema 7.1.2, abbiamo che gli operatori differenziali $\varphi^*\mathcal{L}_{\varphi_* X|_U}(\varphi_* t)$ e $\mathcal{L}_X t$ coincidono e otteniamo perciò quanto cercato. □

Nota 7.2.3. Con la stessa notazione del Capitolo 3 (Derivate e prodotti di Lie), sia F_X^u il flusso generato da $X \in \chi(M)$. Allora come già accennato nel caso di campi vettoriali, se $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$, vale $\mathcal{L}_X t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}((F_X^u)^* t)$. Ricordiamo che F_X^u è un diffeomorfismo e quindi è legale fare pull-back di tensori di ogni tipo. se sistemare

Vediamo ora le formule in coordinate; cioè, dato $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$ e $X \in \chi(M)$, vogliamo le componenti di $\mathcal{L}_X t$. Sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta con coordinate $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, rispetto alle quali $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $t = t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}$.

Ricordiamo innanzitutto che per $f \in C^\infty(M)$ vale

$$\mathcal{L}_X f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\,,$$

mentre per $Y \in \chi(M)$ abbiamo

$$\mathcal{L}_X Y = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

Calcoliamo quindi la formula in coordinate di $\mathcal{L}_X \alpha$ con $\alpha = \alpha_i\,\mathrm{d}x^i \in \chi^*(M)$, per poi ricavare la formula per qualsiasi tensore sfruttando la definizione. Sfruttando la definizione di $\mathcal{L}_X \alpha$ e quanto detto fino ad ora, abbiamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X \alpha)_i &= \mathcal{L}_X \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \mathcal{L}_X \left(\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) - \alpha \left(\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \mathcal{L}_X(\alpha_i) - \alpha \left(-\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\,,\end{aligned}$$

perciò

$$\mathcal{L}_X \alpha = \left(X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^i\,.$$

Passiamo quindi al calcolo in coordinate di $\mathcal{L}_X t$. Vale che

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X t)^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} =& \mathcal{L}_X t\left(\mathrm{d}x^{i_1},\dots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) = \\
=& \mathcal{L}_X\left(t\left(\mathrm{d}x^{i_1},\dots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\right) - \\
&-\sum_{h=1}^{r} t\left(\mathrm{d}x^{i_1},\dots,\mathcal{L}_X\,\mathrm{d}x^{i_h},\dots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) - \\
&-\sum_{h=1}^{s} t\left(\mathrm{d}x^{i_1},\dots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\mathcal{L}_X\frac{\partial}{\partial x^{j_h}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) = \\
=& \mathcal{L}_X t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} - \sum_{h=1}^{r} t\left(\mathrm{d}x^{i_1},\dots,\frac{\partial X^{i_h}}{\partial x^l}\,\mathrm{d}x^l,\dots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) - \\
&-\sum_{h=1}^{s} t\left(\mathrm{d}x^{i_1},\dots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,-\frac{\partial X^m}{\partial x^{j_h}}\frac{\partial}{\partial x^m},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) = \\
=& X^k\frac{\partial t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}}{\partial x^k} - \sum_{h=1}^{r}\frac{\partial X^{i_h}}{\partial x^l} t^{i_1\dots i_{h-1} l i_{h+1},\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} + \sum_{h=1}^{s}\frac{\partial X^m}{\partial x^{j_h}} t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1\dots j_{h-1} m j_{h+1}\dots j_s}\,,
\end{aligned}$$

che è la formula cercata.

Esempio. 1. Calcoliamo in $\mathbb{R}^2$ la derivata di Lie $\mathcal{L}_X t$ con $t = x\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}y + y\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}y$ e $X = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Per linearità in X, $\mathcal{L}_X t = \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}} t + \mathcal{L}_{x\frac{\partial}{\partial y}} t$ e abbiamo che

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}} t = \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}}\left[x\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}y\right] + \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}}\left[y\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}y\right].$$

Chiamiamo ora $\tilde{t} = x\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}y$ e $\hat{t} = y\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}y$. Visto che $\tilde{t}^2_{12} = x$ e le altre componenti sono 0, abbiamo

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}}\tilde{t}\right)^2_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{t}^2_{12} = 1$$

e le altre componenti sono nulle. Dato che $\hat{t}^2_{22}$ è l'unica componente non nulla di $\hat{t}$, abbiamo che facendo il conto

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}}\hat{t}\right)^2_{22} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{t}^2_{22} = 0$$

e per le altri componenti è 0. Di conseguenza

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}} t = \frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}y\,.$$

Analogamente, sfruttando la formula in coordinate come appena fatto, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x\frac{\partial}{\partial y}} t =& \mathcal{L}_{x\frac{\partial}{\partial y}}\left[x\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}y\right] + \mathcal{L}_{x\frac{\partial}{\partial y}}\left[y\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}y\right] = \\
=& x\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}x + x\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}y + y\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}y + y\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

E unendo le due espressioni abbiamo quindi

$$\mathcal{L}_X t = x\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}x + x\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}y + (y+1)\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}y + y\frac{\partial}{\partial y}\otimes \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}x\,.$$

2. (Campi di Killing) Sia M una varietà con metrica g. Una campo vettoriale $X \in \chi(M)$ è detto *di Killing* se $\mathcal{L}_X g \equiv 0$. Il significato geometrico è che una metrica dà una lunghezza della curva e di conseguenza una distanza sulla varietà (prendendo l'inf delle lunghezze delle curve che collegano due punti) e un campo di Killing genera un flusso di isometrie sulla varietà.

   Vediamo che equazioni deve rispettare X. Siano $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $g = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ in coordinate (dove $g_{ij} = g_{ji}$). Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g = {} & \mathcal{L}_X(g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j) = \\ & = (\mathcal{L}_X g_{ij}) \otimes \mathrm{d}x^i \otimes x^j + g_{ij} \otimes (\mathcal{L}_X\,\mathrm{d}x^i) \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij} \otimes \mathrm{d}x^i \otimes (\mathcal{L}_X\,\mathrm{d}x^j) = \\ & = X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij} \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^k = \\ & = \left[X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right] \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j\,,\end{aligned}$$

   dove nell'ultima uguaglianza abbiamo semplicemente cambiato nome agli indici ripetuti. Le equazioni tra parentesi quadre sono dette *equazioni di Killing*. Si può vedere che $\mathcal{L}_X g = 0$ se e solo se $\mathcal{L}_X$ commuta con le operazioni $\sharp$ e $\flat$ (di alzamento e abbassamento di indici).

Esercizio 7.2.4. *Sia g una metrica su M e sia $g^\sharp$ il tensore ottenuto alzando un indice. Sia X un campo vettoriale. Calcolare in coordinate $(\mathcal{L}_X g^\sharp)^\flat - \mathcal{L}_X g$, che sarà legato alle equazioni di Killing.*

CAPITOLO 8

FORME DIFFERENZIALI

In questo capitolo tratteremo le forme differenziali su varietà, che sono campi tensoriali del tipo $(0,k)$ totalmente antisimmetrici. Hanno applicazioni per esempio in geometria perché possono dare informazioni sulla topologia delle varietà.

8.1. Forme esterne su spazi vettoriali

Definizione 8.1.1. Dati V, W spazi vettoriali (finito dimensionali), le *mappe antisimmetriche* in $T_k^0(V,W)$ sono quelle per cui vale $t(e_1,\dots,e_k) = \operatorname{sgn}(\sigma)t(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)})$ per ogni $e_1,\dots,e_k \in V$ e per ogni $\sigma \in S_k$. Si indicano con $\Lambda^k(V,W)$ (per brevità indicheremo anche $\Lambda^k(V,\mathbb{R}) = \Lambda^k(V)$) e vengono dette *$k$-forme esterne*.

Dato $t \in T_k^0(V,W)$ è possibile ottenere un elemento di $\Lambda^k(V,W)$ tramite antisimmetrizzazione. Se per esempio $k = 2$, dato $t \in T_2^0(V,W)$, possiamo definire il suo antisimmetrizzato come $\underline{A}t(e_1,e_2) = \frac{1}{2}[t(e_1,e_2) - t(e_2,e_1)]$.

Vediamo quindi la definizione generale.

Definizione 8.1.2. La *mappa alternante* $\underline{A} : T_k^0(V,W) \to \Lambda^k(V,W)$ è definita da

$$\underline{A}t(e_1,\dots,e_k) \coloneqq \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)t(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)})\,,$$

per ogni $e_1,\dots,e_k \in V$.

Proposizione 8.1.3. *La mappa $\underline{A}$ è lineare e suriettiva su $\Lambda^k(V,W)$. Inoltre è l'identità sulle k-forme, cioè $\underline{A}|_{\Lambda^k(V,W)} = \mathrm{id}|_{\Lambda^k(V,W)}$, ed è idempotente, cioè $\underline{A}\circ\underline{A} = \underline{A}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\underline{A}$ è l'identità sulle k-forme. Sia $t \in \Lambda^k(V,W)$, allora

$$\begin{aligned}\underline{A}t(e_1,\dots,e_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)t(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)}) = \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}(\sigma))^2 t(e_1,\dots,e_k) = t(e_1,\dots,e_k)\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $t \in \Lambda^k(V,W)$ e che $\operatorname{card}S_k = k!$. □

Nota 8.1.4. Visto che $\underline{A}^2 = \underline{A}$, abbiamo $\|\underline{A}\| \le \|\underline{A}\|^2$ e quindi $\|\underline{A}\| \ge 1$. D'altronde, le permutazioni preservano la norma, perciò $\|\underline{A}t\| \le \|t\|$ e di conseguenza $\|\underline{A}\| \le 1$. Unendo le due disuguaglianze otteniamo proprio $\|\underline{A}\| = 1$.

Parliamo di forme esterne e parleremo di algebre esterne perché si può fare un prodotto esterno, detto wedge, che definiamo di seguito.

Definizione 8.1.5. Se $\alpha \in T^0_k(V)$ e $\beta \in T^0_l(V)$. Il *prodotto wedge* $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(V)$ è definito da

$$\alpha \wedge \beta \coloneqq \frac{(k+l)!}{k!\; l!}\; \underline{A}(\alpha \otimes \beta)\,.$$

Esempio. Se $\alpha, \beta \in \Lambda^1(V) \cong T^0_1(V)$, allora $(\alpha \wedge \beta)(e_1, e_2) = \alpha(e_1)\beta(e_2) - \alpha(e_2)\beta(e_1)$.

Esercizio 8.1.6. *Un* mescolamento *di tipo* (k,l) *è una permutazione* $\sigma \in S_{k+l}$ *tale che* $\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$ *e* $\sigma(k+1) < \ldots < \sigma(k+l)$*. Indichiamo* $\operatorname{mesc}(k,l)$ *l'insieme dei mescolamenti di tipo* (k,l)*. Mostrare che, se* $\alpha \in \Lambda^k(V)$ *e* $\beta \in \Lambda^l(V)$*, allora*

$$(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \operatorname{mesc}(k,l)} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(k)})\beta(e_{\sigma(k+1)}, \ldots, e_{\sigma(k+l)})\,.$$

Proposizione 8.1.7. *Se* $\alpha \in T^0_k(V)$*,* $\beta \in T^0_l(V)$ *e* $\gamma \in T^0_m(V)$*, si ha*

1. $\alpha \wedge \beta = (\underline{A}\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (\underline{A}\beta)$*;*
2. $\wedge$ *è bilineare;*
3. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\beta \wedge \alpha$*;*
4. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \frac{(k+l+m)!}{k!\; l!\; m!}\; \underline{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$*.*

Dimostrazione. 1 Dati $\sigma \in S_k$ e $t \in T^0_k(V)$, definiamo $\sigma t(e_1, \ldots, e_k) \coloneqq t(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(k)})$. Allora, con questa notazione, $\underline{A}t = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma t$. Abbiamo inoltre che

$$\begin{aligned}\underline{A}(\sigma t)(e_1, \ldots, e_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{\rho \in S_k}\operatorname{sgn}(\rho)t(e_{\rho\circ\sigma(1)}, \ldots, e_{\rho\circ\sigma(k)}) = \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\tau \in S_k}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)t(e_{\tau(1)}, \ldots, e_{\tau(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)(\underline{A}t)(e_1, \ldots, e_k)\,,\end{aligned}$$

cioè $\underline{A}(\sigma t) = \operatorname{sgn}(\sigma)\underline{A}t$.

Ora, grazie alla linearità di $\underline{A}$, abbiamo

$$\underline{A}(\underline{A}\alpha \otimes \beta) = \underline{A}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\tau \in S_k}\operatorname{sgn}(\tau)(\tau\alpha \otimes \beta)\right) = \frac{1}{k!}\sum_{\tau \in S_k}\operatorname{sgn}(\tau)\underline{A}(\tau\alpha \otimes \beta)\,.$$

Sia quindi $\tau' \in S_{k+l}$ tale che

$$\tau'(1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l) = (\tau(1), \ldots, \tau(k), k+1, \ldots, k+l)\,,$$

per cui in particolare $\operatorname{sgn}(\tau') = \operatorname{sgn}(\tau)$. Allora otteniamo

$$\begin{aligned}\underline{A}(\underline{A}\alpha \otimes \beta) &= \frac{1}{k!}\sum_{\tau \in S_k}\operatorname{sgn}(\tau')\underline{A}\tau'(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{k!}\sum_{\tau \in S_k}(\operatorname{sgn}\tau')(\operatorname{sgn}\tau')\underline{A}(\alpha \otimes \beta) = \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\tau \in S_k}\underline{A}(\alpha \otimes \beta)\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione ricavata prima. Perciò $\underline{A}(\underline{A}\alpha \otimes \beta) = \underline{A}(\alpha \otimes \beta)$ e quindi $(\underline{A}\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta$.

2 Ovvia.

3 Sia $\sigma_0 \in S_{k+l}$ data da $\sigma_0(1, \ldots, k+l) = (k+1, \ldots, k+l, 1, \ldots, k)$, allora $(\alpha \otimes \beta)(e_1, \ldots, e_{k+l}) = (\beta \otimes \alpha)(e_{\sigma_0(1)}, \ldots, e_{\sigma_0(k+l)})$. Utilizzando la formula ottenuta nel punto 1, abbiamo $\underline{A}(\alpha \otimes \beta) = \operatorname{sgn}(\sigma_0)\underline{A}(\beta \otimes \alpha) = (-1)^{kl}\beta \wedge \alpha$.

4 Applicando le definizioni e l'associatività del prodotto tensore, otteniamo

$$\begin{aligned}\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &= \frac{(k+l+m)!}{k!\,(l+m)!}\,\underline{A}(\alpha \otimes (\beta \wedge \gamma)) = \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!\,(l+m)!} \cdot \frac{(l+m)!}{l!\,m!}\,\underline{A}(\alpha \otimes \underline{A}(\beta \otimes \gamma)) = \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}\,\underline{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)\end{aligned}$$

e analogamente anche l'altra equazione.

□

Nota 8.1.8. Dati $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \Lambda^1(V)$, abbiamo

$$(\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^k)(e_1, \ldots, e_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha^1(e_{\sigma(1)}) \ldots \alpha^k(e_{\sigma(k)}) = \det[\alpha^i(e_j)]\,.$$

Nota 8.1.9. Dal punto 4 della Proposizione 8.1.7, dati $\gamma^1 \in \Lambda^{d_1}(V), \ldots, \gamma^k \in \Lambda^{d_k}(V)$, otteniamo $\gamma^1 \wedge \ldots \wedge \gamma^k = \frac{(d_1+\ldots+d_k)!}{d_1!\ldots d_k!}\underline{A}(\gamma^1 \otimes \ldots \otimes \gamma^k)$.

In particolare, applicando questa formula a 1-forme, si ha $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = k!\,\underline{A}(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_k)$. Perciò, se $e_1, \ldots, e_n$ è una base di V e se $e^1, \ldots, e^n$ è la sua base duale, allora $(e^1 \wedge \ldots \wedge e^k)(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Vediamo ora la scrittura del prodotto wedge in componenti. Sia $e_1, \ldots, e_n$ una base di V, allora le componenti $t_{i_1 \ldots i_k}$ di $t \in T^0_k(V)$ sono date da $t(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. Abbiamo quindi $(\underline{A}t)_{i_1 \ldots i_k} = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\; t_{\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_k)}$, cioè $\underline{A}$ simmetrizza le componenti.

Perciò, se $\alpha \in \Lambda^k(V)$ e $\beta \in \Lambda^l(V)$, abbiamo

$$(\alpha \wedge \beta)_{i_1 \ldots i_{k+l}} = \sum_{\sigma \in \operatorname{mesc}(k,l)} \operatorname{sgn}(\sigma)\; \alpha_{\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_k)}\; \beta_{\sigma(i_{k+1})\ldots\sigma(i_{k+l})}\,.$$

Definizione 8.1.10. Dato V spazio vettoriale, lo spazio $\Lambda(V) = \bigoplus_k \Lambda^k(V)$ è detto *algebra esterna* di V.

Proposizione 8.1.11. *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, $\Lambda^k(V)$ è 0 per $k > n$ e ha dimensione $\binom{n}{k}$ per $k = 1, \ldots, n$. Quindi $\Lambda(V)$ ha dimensione 2^n.*

In particolare, se $e_1, \ldots, e_n$ è una base di V, l'insieme $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} \ :\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ è una base di $\Lambda^k(V)$.

Corollario 8.1.12. *Sia $\theta \in \Lambda^1(V)$ e $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Allora $\theta \wedge \alpha = 0$ se e solo se esiste $\beta \in \Lambda^{k-1}(V)$ tale che $\alpha = \theta \wedge \beta$.*

Dimostrazione. Se $\theta \in \Lambda^1(V)$, allora $\theta \wedge \theta = 0$ [1] per il punto 3 della Proposizione 8.1.7. Quindi se $\alpha = \theta \wedge \beta$, abbiamo $\theta \wedge \alpha = 0$ per il punto 4 della stessa proposizione.

[1] Questo in generale è falso per k pari: sia per esempio $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ in $\mathbb{R}^4$, allora $\omega \wedge \omega = 2e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \neq 0$

Viceversa, supponiamo che $\theta \wedge \alpha = 0$. Sia $e_1, \dots, e_n$ base di V tale che $e^n = \theta$. Allora, se $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$, la condizione $\theta \wedge \alpha = 0$ implica che i coefficienti in cui e^n non compare sono nulli. Quindi α si fattorizza come e^n per una $(k-1)$-forma β. □

Esempio. 1. Sia $V = \mathbb{R}^2$, con $\{e_1, e_2\}$ la base canonica e $\{e^1, e^2\}$ la base duale. Ogni $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ si scrive come $\omega = \omega_1 e^1 + \omega_2 e^2$ e ogni $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ si scrive come $\omega = \omega_{12}\, e^1 \wedge e^2$.

2. In $\mathbb{R}^3$, gli spazi Λ^1 e Λ^2 hanno la stessa dimensione e dunque sono isomorfi. Data $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica e $\{e^1, e^2, e^3\}$ base duale un isomorfismo è il seguente: $e^1 \mapsto e^2 \wedge e^3$ e cicliche. Questo è detto *operatore Hodge star* che indichiamo con $*$ e approfondiremo più avanti. L'isomorfismo standard di $\mathbb{R}^3$ con $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ è l'operatore $\flat$ tale che $(e_i)^\flat = e^i$.

   Allora $* \circ \flat : \mathbb{R}^3 \to \Lambda^2(\mathbb{R})$ soddisfa
   $$(* \circ \flat)(e \times f) = e^\flat \wedge f^\flat\,,$$
   per ogni $e, f \in \mathbb{R}^3$.

   Questo segue dal fatto che, se $\alpha = \alpha_i e^i$ e $\beta = \beta_j e^j$, allora
   $$\alpha \wedge \beta = (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)\; e^2 \wedge e^3 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\; e^3 \wedge e^1 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\; e^1 \wedge e^2\,.$$

Esercizio 8.1.13. *Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ linearmente dipendenti. Mostrare che per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$ vale $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.*

8.2. Determinanti e volumi

Il determinante di una matrice è multilineare e antisimmetrico su righe e colonne di una matrice. Se $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ hanno componenti x_i^j, allora il determinante di (x_i^j) è il volume del parallelepipedo generato da $x_1, \dots, x_n$. Possiamo indicare
$$\det[x_1, \dots, x_n] = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x^1_{\sigma(1)} \dots x^n_{\sigma(n)}\,.$$

Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare $\det \varphi = \frac{\text{volume del parallelepipedo generato da } \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)}{\text{volume del cubo unitario}}$.

Rivediamo ora le proprietà del pull-back nel caso particolare di forme differenziali o più in generale di tensori solo covarianti.

Proposizione 8.2.1. *Sia $\varphi \in \mathscr{L}(V, W)$, allora $\varphi^* : T^0_k(W) \to T^0_k(V)$ è lineare e valgono*

1. *$\varphi^*(\Lambda^k(W)) \subseteq \Lambda^k(V)$;*

2. *se $\psi \in \mathscr{L}(W, Z)$, $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$;*

3. *$(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{T^0_k(V)}$;*

4. *se $\varphi \in \mathrm{GL}(V, W)$, allora $\varphi^* \in \mathrm{GL}(T^0_k(W), T^0_k(V))$ e $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^* = \varphi_*$. Se anche $\psi \in \mathrm{GL}(W, Z)$, allora $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$;*

5. *se $\alpha \in \Lambda^k(W)$, $\beta \in \Lambda^l(W)$, allora $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta)$.*

Ricordiamo che $\dim(\Lambda^n(V)) = 1$, dove $\dim(V) = n$, per cui ha senso la seguente definizione.

Definizione 8.2.2. Se V ha dimensione n e $\varphi \in \mathscr{L}(V,V)$, il *determinante* $\det(\varphi)$ di φ è definito come l'unica costante tale che $\varphi^*\omega = \det(\varphi)\omega$, per qualsiasi $\omega \in \Lambda^n(V)$.

Proposizione 8.2.3. *Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di V con base duale $e^1, \dots, e^n$. Sia $\varphi \in \mathscr{L}(V,V)$ tale che $\varphi(e_i) = A_i^j e_j$. Allora* $\det(\varphi) = \det A$.

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del punto 4 della Proposizione 8.1.7, abbiamo

$$\begin{aligned}\det(\varphi) &= \varphi^*(e^1 \wedge \dots \wedge e^n)(e_1, \dots, e_n) = (e^1 \wedge \dots \wedge e^n)(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \\ &= n!\, \underline{A}(e^1 \otimes \dots \otimes e^n)(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) e^1(\varphi(e_{\sigma(1)})) \dots e^n(\varphi(e_{\sigma(n)})) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A^1_{\sigma(1)} \dots A^n_{\sigma(n)} \\ &= \det A\,,\end{aligned}$$

che è quanto cercato. □

Proposizione 8.2.4. *Siano $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(V,V)$. Allora*

1. $\det(\varphi \circ \psi) = \det\varphi \cdot \det\psi$;
2. $\det(\mathrm{id}_V) = 1$;
3. *φ è un isomorfismo se e solo se $\det\varphi \neq 0$ e in tal caso $\det(\varphi^{-1}) = (\det\varphi)^{-1}$.*

Dimostrazione. L'unica dimostrazione non ovvia è quella del fatto che se $\det\varphi \neq 0$, allora φ è un isomorfismo. Basta dimostrare che se φ non è un isomorfismo, allora $\det\varphi = 0$.

Se φ non è un isomorfismo, esiste $e = e_1 \in \ker\varphi$. Completiamo e_1 ad una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V. Data $\omega \in \Lambda^n(V)$, allora

$$(\varphi^*\omega)(e_1, \dots, e_n) = \omega(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \omega(0, \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) = 0\,,$$

perché ω è multilineare. Perciò $\det\varphi = 0$, come voluto. □

Definizione 8.2.5. Gli elementi di $\Lambda^n(V)$ sono detti *elementi di volume*. Se ω_1, ω_2 sono elementi di volume diciamo che $\omega_1 \sim \omega_2$ se esiste $c > 0$ tale che $\omega_1 = c\omega_2$. Una classe di equivalenza di elementi di volume è detta un'*orientazione* su V.

Uno *spazio orientato* $(V, [\omega])$ è uno spazio vettoriale con un'orientazione $[\omega]$. La classe $[-\omega]$ è detta *orientazione inversa*.

Una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $(V, [\omega])$ orientato è detta essere orientata positivamente se $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$. Ovviamente tale definizione è indipendente dalla scelta di un elemento di $[\omega]$.

Proposizione 8.2.6. *Sia $g \in T_2^0(V)$ simmetrico e definito positivo. Allora esiste una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V con base duale $\{e^1, \dots, e^n\}$ tale che $g = \sum_{i=1}^n e^i \otimes e^i$. Questa base è detta* ortonormale *rispetto a g.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga al caso di $\mathbb{R}^n$ utilizzando un processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Sia e_1 tale che $g(e_1, e_1) = 1$ e siano $V_1 = \operatorname{span}\{e_1\}$ e $V_2 = \{e \,:\, g(e, e_1) = 0\}$. Visto che g è definita positiva, $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Dato $z \in V$, allora $z = g(e_1, z)e_1 + (z - g(e_1, z)e_1)$, dove il secondo termine appartiene a V_2. Quindi $V = V_1 \oplus V_2$. Scegliamo quindi $e_2 \in V_2$ tale che $g(e_2, e_2) = 1$ e così via fino a completare la base. □

Proposizione 8.2.7. *Sia V uno spazio vettoriale n dimensionale e sia $g \in T_2^0(V)$ simmetrico, definito positivo. Allora, se $[\omega]$ è un'orientazione in V, esiste un unico elemento di volume $\mu(g) \in [\omega]$, detto g-*volume*, tale che $\mu(g)(e_1, \dots, e_n) = 1$ per ogni base $e_1, \dots, e_n$ di V ortonormale rispetto a g e orientata. Se poi $e^1, \dots, e^n$ è la base duale, allora $\mu(g) = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$.*

In generale, se $f_1, \dots, f_n$ è una base orientata positivamente e se f^i è la base duale, allora

$$\mu(g) = |\det[g(f_i, f_j)]|^{\frac{1}{2}}\; f^1 \wedge \dots \wedge f^n \,.$$

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale rispetto a g, che ci è garantita dalla Proposizione 8.2.6. Allora $g(f_i, f_j) = \sum_{p=1}^n e^p \otimes e^p(f_i, f_j)$.

Se $\varphi \in \mathrm{GL}(V, V)$ è tale che $f_i = \varphi(e_i) = A_i^j e_j$, allora

$$g(f_i, f_j) = \sum_{p=1}^n e^p \otimes e^p(A_i^k e_k, A_j^l e_l) = \sum_{p=1}^n \delta_k^p\; \delta_l^p\; A_i^k\; A_j^l = \sum_{p=1}^n A_i^p A_j^p = (A \cdot A^T)_i^j\,;$$

perciò, sfruttando la Proposizione 8.2.3, abbiamo $\det[g(f_i, f_j)] = (\det A)^2 = (\det \varphi)^2$.

Se ora $\{e_1, \dots, e_n\}$ è orientata positivamente e g-ortonormale, allora per la richiesta di multilinearità esiste un'unica $\mu(g) = \mu$ tale che $\mu(e_1, \dots, e_n) = 1$. Mostriamo che $\mu(g)$ così definita rispetta le ipotesi richieste.

Se $f_1, \dots, f_n$ è un'altra base orientata positivamente e g-ortonormale, sia φ come sopra. Allora per quanto detto prima $|\det \varphi| = 1$. Inoltre per la positività della base e la definizione di φ abbiamo $0 < \mu(f_1, \dots, f_n) = (\varphi^* \mu)(e_1, \dots, e_n) = \det \varphi$, quindi $\det \varphi = 1$ e in particolare $\mu(f_1, \dots, f_n) = 1$, come voluto.

La seconda affermazione è implicata dalla terza e per quest'ultima si usa la formula $\mu(f_1, \dots, f_n) = \det \varphi = |\det[g(f_i, f_j)]|^{\frac{1}{2}}$, con le notazioni date all'inizio. □

Un prodotto interno (simmetrico e definito positivo) in V ne induce uno anche sui $\Lambda^k(V)$, vediamo come.

Siano $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ e $\beta = \beta_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ elementi di $\Lambda^k(V)$ e sia $\beta^{i_1 \dots i_k} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \beta_{j_1 \dots j_k}$.

Definisco

$$g^{(k)}(\alpha, \beta) \coloneqq \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta^{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta^{i_1 \dots i_k}\,.$$

Vediamo che $g^{(k)}$ è indipendente dalla base scelta. Se $f_1, \dots, f_n$ è un'altra base, siano $\alpha = \alpha'_{a_1 \dots a_k} f^{a_1} \wedge \dots \wedge f^{a_k}$ e $\beta = \beta'_{a_1 \dots a_k} f^{a_1} \wedge \dots \wedge f^{a_k}$. Se $e_i = A_i^a f_a$ e $B = A^{-1}$, allora

$$\begin{aligned} \alpha'_{a_1 \dots a_k} \beta'^{a_1 \dots a_k} &= \alpha_{i_1 \dots i_k} B_{a_1}^{i_1} \dots B_{a_k}^{i_k} A_{j_1}^{a_1} \dots A_{j_k}^{a_k} \beta^{j_1 \dots j_k} = \\ &= \alpha_{i_1 \dots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} \beta^{j_1 \dots j_k} = \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta^{i_1 \dots i_k}\,, \end{aligned}$$

da cui la buona definizione di $g^{(k)}$. Dati $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V)$ indicheremo anche $\langle \alpha, \beta \rangle = g^{(k)}(\alpha, \beta)$.

Proposizione 8.2.8. *Sia g un prodotto interno in V (simmetrico e definito positivo). Allora g induce il prodotto interno $g^{(k)}$ su $\Lambda^k(V)$. Inoltre, se $e_1, \dots, e_n$ è ortonormale rispetto a g, allora la base $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \;:\; i_1 < \dots < i_k\}$ è ortonormale rispetto a $g^{(k)}$.*

8.3. Operatore di Hodge star

Proposizione 8.3.1. *Sia V uno spazio n-dimensionale orientato e sia $g \in T_2^0(V)$ un tensore simmetrico e definito positivo. Sia $\mu = \mu(g)$ l'elemento di volume corrispondente. Allora esiste un unico isomorfismo $* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$, detto* operatore di Hodge star, *che soddisfa*

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \mu \tag{8.3.1}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V)$.

Inoltre, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di V orientata positivamente e ortonormale con base duale $e^1, \ldots, e^n$, allora

$$*(e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)(e^{\sigma(k+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}) \tag{8.3.2}$$

per ogni σ mescolamento di tipo $(k, n-k)$.

Dimostrazione. **unicità:** Supponiamo che $*$ soddisfi l'Equazione (8.3.1). Sia $\beta = e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(k)}$ e sia α uno dei vettori in $\Lambda^k(V)$ ortonormali del tipo $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ con $i_1 < \ldots < i_k$.

Dall'Equazione (8.3.1) $\alpha \wedge *\beta = 0$ a meno che $(i_1, \ldots, i_k) = (\sigma(1), \ldots, \sigma(k))$ quindi esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $*\beta = a e^{\sigma(k+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}$. Di conseguenza abbiamo $\beta \wedge *\beta = a \operatorname{sgn}(\sigma)\mu$, ma la Proposizione 8.2.8 implica $\langle \beta, \beta \rangle = 1$, quindi deve valere $a = \operatorname{sgn}(\sigma)$ e perciò $*$ è unico.

esistenza: Definiamo l'operatore sulla base ortonormale $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} : i_1 < \ldots < i_k\}$, utilizzando l'Equazione (8.3.2). Possiamo verificare poi l'Equazione (8.3.1) usando questa base. In particolare $*$ è un isomorfismo e manda basi ortonormali in basi ortonormali.

□

Proposizione 8.3.2. *Siano V, g, μ come sopra. Allora per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V)$ l'operatore $*$ soddisfa le seguenti proprietà*

1. $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \alpha, \beta \rangle \mu$;
2. $*1 = \mu$ *e* $*\mu = 1$;
3. $**\,\alpha = (-1)^{k(n-k)}\alpha$;
4. $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle *\alpha, *\beta \rangle$.

Dimostrazione. La 1 segue dall'Equazione (8.3.1) e dal fatto che $g^{(k)}(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ è simmetrico. Mentre la 2 segue dall'Equazione (8.3.2) ponendo $\sigma = \mathrm{id}$.

Vediamo ora il punto 3. Sia $\alpha = e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(k)}$, allora per l'Equazione (8.3.2) applicata alla permutazione $(\sigma(k+1), \ldots, \sigma(n), \sigma(1), \ldots, \sigma(k))$ vale

$$*(e^{\sigma(k+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}) = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(\sigma)\ e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(k)}$$

Perciò, riapplicando l'Equazione (8.3.2), abbiamo

$$\begin{aligned} **\,(e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(k)}) &= \operatorname{sgn}(\sigma) * (e^{\sigma(k+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}) = \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma)^2 (-1)^{k(n-k)} e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(k)} = \\ &= (-1)^{k(n-k)} e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(k)}\,, \end{aligned}$$

da cui abbiamo quanto cercato poiché gli elementi del tipo $e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(k)}$ generano $\Lambda^k(V)$.

La 4 si può verificare usando una base ortonormale per $\Lambda^k(V)$, oppure usare la 1 e la 3 per trovare

$$\langle *\alpha, *\beta \rangle \mu = (*\alpha) \wedge (** \beta) = (-1)^{k(n-k)} (*\alpha) \wedge \beta = \beta \wedge (*\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle \mu \,.$$

□

8.4. Forme differenziali su varietà

Estendiamo l'algebra esterna al fibrato tangente di una varietà. Se $\varphi : U \times V \to U' \times V'$ è un isomorfismo locale di fibrati, allora $\varphi_* : U \times \Lambda^k(V) \to U' \times \Lambda^k(V')$ è anch'esso un isomorfismo locale di fibrati.

Definizione 8.4.1. Sia $\pi : E \to B$ un fibrato vettoriale. Per ogni $A \subseteq B$ poniamo $\Lambda^k(E)|_A = \bigsqcup_{b \in A} \Lambda^k(E_b)$ e $\Lambda^k(E) = \Lambda^k(E)|_B$. Chiamiamo l'ovvia proiezione $\Lambda^k(\pi) : \Lambda^k(E) \to B$.

Quando $E = TM$ per M varietà, poniamo $\Lambda^k(M) = \Lambda^k(TM)$. Inoltre poniamo $\Omega^1(M) = \mathcal{T}_1^0(M) = \chi^*(M)$ e in generale $\Omega^k(M) = \Gamma^\infty(\Lambda^k(M))$ le sezioni C^∞ su $\Lambda^k(M)$.

Estendiamo ora il prodotto wedge alle forme definite su una varietà.

Proposizione 8.4.2. *Se $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\beta \in \Omega^l(M)$, sia $\alpha \wedge \beta : M \to \Lambda^{k+l}(M)$ definita da $(\alpha \wedge \beta)(m) = \alpha(m) \wedge \beta(m)$. Allora $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(M)$ e questo operatore è bilineare e associativo.*

Dimostrazione. Bilinearità e associatività seguono dalle proprietà del prodotto wedge $\wedge$ in $\Lambda(T_mM)$. La regolarità si mostra lavorando in carta. □

Definizione 8.4.3. Elementi di $\Omega^k(M)$ sono detti *k-forme* e $\Omega(M) = \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ è detta *algebra delle forme differenziali esterne.*

Nota 8.4.4. Vediamo la scrittura di una forma in coordinate locali. Se $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$, abbiamo visto che $t = t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}$. Data $\omega \in \Omega^k(M)$, allora $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ con $i_1 < \ldots < i_k$ e $\omega_{i_1 \ldots i_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)$.

Nota 8.4.5. Se $f : M \to N$ è regolare, è naturale considerare il pull-back $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$.

8.5. Derivata esterna

Studiamo ora una mappa $\mathrm{d} : \Omega(M) \to \Omega(M)$ che ha proprietà particolarmente interessanti.

Teorema 8.5.1. *Sia M una varietà n-dimensionale. Allora per ogni $k = 0, \ldots, n$ e per ogni $U \subseteq M$ aperto esiste unico $\mathrm{d} = \mathrm{d}^k : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ (detta* derivata esterna*) tale che*

1. *d è una $\wedge$-antiderivazione, cioè d è $\mathbb{R}$-lineare e per ogni $\alpha \in \Omega^k(U)$ e $\beta \in \Omega^l(U)$ si ha $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$;*

2. *se* $f \in C^\infty(M)$*, allora* $\mathrm{d}f$ *coincide con il differenziale di* f*;*

3. $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$*;*

4. d *è naturale rispetto alle restrizioni, cioè se* $U \subseteq V \subseteq M$ *con* U, V *aperti e* $\alpha \in \Omega^k(V)$*, allora* $\mathrm{d}(\alpha|_U) = (\mathrm{d}\alpha)|_U$ *(quindi* d *è locale).*

Dimostrazione. **unicità:** Sia (U, φ) una carta di M e consideriamo una k-forma $\alpha \in \Omega^k(U)$ con $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$. Se $k = 0$ e $f = x^i$, allora $\mathrm{d}f = \mathrm{d}(x^i) = \mathrm{d}x^i$.

Dalla 3 abbiamo $\mathrm{d}(\mathrm{d}x^i) = 0$, quindi per la 1 otteniamo $\mathrm{d}(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) = 0$.

Perciò $\mathrm{d}\alpha = (\mathrm{d}\alpha_{i_1 \dots i_k}) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, con $i = 1, \dots, n$ e $i_1 < \dots < i_k$.

Questa formula caratterizza d su tutti gli aperti di un atlante di M, quindi per la 4 su tutti gli aperti di M.

esistenza: Definiamo d come dalla formula sopra e verifichiamo tutte le proprietà. Innanzitutto d è ovviamente $\mathbb{R}$-lineare.

Siano ora $\alpha \in \Omega^k(U)$ e $\beta \in \Omega^l(U)$ con $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ e $\beta = \beta_{j_1 \dots j_l} \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$. Allora

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \\
&\quad = \mathrm{d}(\alpha_{i_1 \dots i_k} \beta_{j_1 \dots j_l} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}) = \\
&\quad = \left(\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} \beta_{j_1 \dots j_l} + \alpha_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial \beta_{j_1 \dots j_l}}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} = \\
&\quad = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \,.
\end{aligned}
$$

Per la 3, utilizzando il lemma di Schwarz, abbiamo

$$
\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = \frac{\partial^2 \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i \partial x^j} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = 0 \,.
$$

Per verificare 4 mostriamo che la definizione non dipende dalle carte. Siano (U, φ), (U', φ') carte tali che $U \cap U' \neq \emptyset$. Per unicità locale $\mathrm{d} = \mathrm{d}'$ in $U \cap U'$ e quindi abbiamo anche l'unicità globale.

□

Corollario 8.5.2. *Sia* $\omega \in \Omega^k(U)$ *con* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*. Allora*

$$
\mathrm{d}\omega(x)(v_0, \dots, v_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, \mathrm{D}\omega(x) \cdot v_i \; (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) \,,
$$

dove $\mathrm{D}\omega$ *è il differenziale classico.*

Dimostrazione. Sia $\omega(x) = \omega_{i_1 \dots i_k}(x) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, allora

$$
\mathrm{D}\omega(x) \cdot v_i = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} \, v_i^j \; \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \,,
$$

quindi il membro destro dell'enunciato è

$$\sum_{\eta \in S_k} (-1)^i \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} \; v_i^j \; \mathrm{sgn}(\eta) \; v_0^{\eta(i_1)} \dots \hat{v}_i \dots v_k^{\eta(i_k)} \, .$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(v_0, \dots, v_k) &= \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} \, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}(v_0, \dots, v_k) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} \; \mathrm{sgn}(\sigma) \; v_0^{\sigma(j)} v_1^{\sigma(i_1)} \dots v_k^{\sigma(i_k)} \, . \end{aligned}$$

A questo punto però è facile verificare che le due espressioni trovate coincidono, passando da una permutazione $\eta \in S_k$ ad una permutazione $\sigma \in S_{k+1}$ mandando lo 0 in i. □

Esempio.
1. In $\mathbb{R}^2$, sia $\alpha = f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y$, allora $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.
2. In $\mathbb{R}^3$, data f funzione regolare, abbiamo $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$ e $\nabla f = (\mathrm{d}f)^\sharp$.

Esercizio 8.5.3. *In $\mathbb{R}^3$, sia $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$, allora $\underline{F}^\flat = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y + F_3\,\mathrm{d}z$ e $*(\underline{F}^\flat) = F_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - F_2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + F_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Mostrare che $\mathrm{d}\underline{F}^\flat = *(\mathrm{rot}\,\underline{F})^\flat$. Verificare che $\mathrm{div}\,\underline{F} = *\,\mathrm{d}(*\underline{F}^\flat)$ e $\mathrm{d}^2 = 0$ e quindi che $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\underline{F}) = 0$.*

Allo stesso modo, se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è regolare $\mathrm{d}\,\mathrm{d}f = 0$ equivale a $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$.

Teorema 8.5.4. *Sia $f : M \to N$ regolare. Allora, per ogni $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\psi \in \Omega^l(N)$, f^* soddisfa:*

1. *$f^*(\omega \wedge \psi) = f^*(\omega) \wedge f^*(\psi)$;*
2. *$f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega)$.*

Dimostrazione. La 1 è già vista, per esempio come conseguenza del punto 2 della Proposizione 8.2.1. Quindi dimostriamo il punto 2.

Sia (U, φ) carta di M e (V, ρ) carta di N tali che $f(U) \subseteq V$. Sia $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, allora

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\, ;$$

inoltre per la 1 abbiamo

$$f^*\omega = f^*(\omega_{i_1 \dots i_k}) f^*(\mathrm{d}x^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(\mathrm{d}x^{i_k})\, .$$

Se $\psi \in C^\infty(N)$, $\mathrm{d}(f^*\psi) = f^*(\mathrm{d}\psi)$. Quindi usando nuovamente la 1 e $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$, abbiamo

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge f^*\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*\,\mathrm{d}x^{i_k} = f^*(\mathrm{d}\omega)\, .$$

□

Corollario 8.5.5. *Se f è un diffeomorfismo, allora $f_*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f_*\omega)$.*

Corollario 8.5.6. *Se $X \in \chi(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$, allora $\mathcal{L}_X\omega \in \Omega^k(M)$ e $\mathrm{d}(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_X\,\mathrm{d}\omega$.*

Dimostrazione. Per definizione $\mathcal{L}_X\omega(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((F_X^t)^*\omega)(p)|_{t=0}$, dove F_X^t è il flusso generato da X. Perciò, visto che $(F_X^t)^*\omega \in \Omega^k(M)$, otteniamo che $\mathcal{L}_X\omega \in \Omega^k(M)$.

Inoltre d commuta con il pull-back, allora $(F_X^t)^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}((F_X^t)^*\omega)$ e passando al limite nei rapporti incrementali otteniamo proprio $\mathrm{d}\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X\,\mathrm{d}$. □

8.6. Prodotto interno

Ricalcando la Definizione 5.1.8, estendiamo il concetto di prodotto interno alle forme.

Definizione 8.6.1. Sia M una varietà, $X \in \chi(M)$ e $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$. Definiamo il *prodotto interno* o *contrazione* di X e ω come $i_X\omega \in \mathcal{T}_k^0(M)$ tale che $i_X\omega(X_1, \dots, X_k) = \omega(X, X_1, \dots, X_k)$.

Nota 8.6.2. Se $\omega \in C^\infty(M)$, allora $i_X\omega = 0$.

Teorema 8.6.3. *Dato $X \in \chi(M)$, i_X manda $\Omega^{k+1}(M)$ in $\Omega^k(M)$. Inoltre, se $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$, $f \in C^\infty(M)$, allora*

1. i_X *è $\mathbb{R}$-lineare e* $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X\beta)$;
2. $i_{fX}\alpha = f\ i_X\alpha$;
3. $i_X\,\mathrm{d}f = \mathcal{L}_X f$;
4. $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta)$;
5. (formula di Cartan) $\mathcal{L}_X\alpha = i_X\,\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}(i_X\alpha)$;
6. $\mathcal{L}_{fX}\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + \mathrm{d}f \wedge i_X\alpha$.

Dimostrazione. Il fatto che i_X mandi $\Omega^{k+1}(M)$ in $\Omega^k(M)$ e che i_X sia $\mathbb{R}$-lineare sono ovvi.

Introduciamo innanzitutto una notazione. Dati due multi-indici I e J indichiamo con

$$\delta_J^I = \begin{cases} 1 & \text{se } J \text{ è una permutazione pari di } I \\ -1 & \text{se } J \text{ è una permutazione dispari di } I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora, con questa notazione, vale

$$(\alpha \wedge \beta)(v_I) = \sum_{\vec{J},\vec{K}} \delta_I^{JK} \alpha(v_J)\beta(v_K)$$

con $\vec{J}, \vec{K}$ sottoinsiemi rispettivamente di k ed l indici ordinati. Allora

$$\begin{aligned}
i_{v_1}(\alpha \wedge \beta)(v_2, \dots, v_{k+l}) &= (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\vec{I},\vec{J}} \delta_{1\dots k+l}^{IJ} \alpha(v_I)\beta(v_J) = \\
&= \sum_{\vec{I},\vec{J},1\in I} \delta_{1\dots k+l}^{IJ} \alpha(v_I)\beta(v_J) + \sum_{\vec{I},\vec{J},1\in J} \delta_{1\dots k+l}^{IJ} \alpha(v_I)\beta(v_J) = \\
&= \sum_{1<i_2<\dots<i_k,\vec{J}} \delta_{1\dots k+l}^{1i_2\dots i_k J} \alpha(v_1, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})\beta(v_J) + \\
&+ \sum_{\vec{I},1<j_2<\dots<j_l} \delta_{1\dots k+l}^{I1j_2\dots j_l} \alpha(v_I)\beta(v_1, v_{j_2}, \dots, v_{j_l}) = \\
&= \sum_{1<i_2<\dots<i_k} \sum_{\vec{J}\setminus\{1\}} \delta_{2\dots k+l}^{i_2\dots i_k J} (i_{v_1}\alpha)(v_{i_2}, \dots, v_{i_k})\beta(v_J) + \\
&+ (-1)^k \sum_{\vec{I}\setminus\{1\}} \sum_{1<j_2<\dots<j_l} \delta_{2\dots k+l}^{Ij_2\dots j_l}\ \alpha(v_I)(i_{v_1}\beta)(v_{j_2}, \dots, v_{j_l}) = \\
&= (i_{v_1}\alpha \wedge \beta)(v_2, \dots, v_{k+l}) + (-1)^k(\alpha \wedge i_{v_1}\beta)(v_2, \dots, v_{k+l})\,.
\end{aligned}$$

La 2 segue dal fatto che α è $C^\infty(M)$-multilineare. La 3 segue dalla definizione di $\mathrm{d}f$, mentre la 4 segue dal fatto che la derivata di Lie è una derivazione tensoriale e commuta con la mappa alternante.

Vediamo quindi la 5 tramite un'induzione in k. Il risultato è vero per $k=0$ per la 3, supponiamo ora che valga per le k forme e dimostriamolo per le $k+1$ forme. Ogni $k+1$ forma si scrive come $\sum \mathrm{d}f_i \wedge \omega_i$ dove $f_i \in C^\infty(M)$ e $\omega_i \in \Omega^k(M)$; infatti data ω una $(k+1)$-forma, abbiamo

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_{k+1}} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{k+1}} = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge (\omega_{i_1 \dots i_{k+1}} \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{k+1}}) \,.$$

Utilizzando quindi la 3 e l'ipotesi induttiva, abbiamo

$$\begin{aligned} i_X \mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge \omega) + \mathrm{d}i_X(\mathrm{d}f \wedge \omega) &= -i_X(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(i_X(\mathrm{d}f) \wedge \omega - \mathrm{d}f \wedge i_X\omega) = \\ &= -i_X(\mathrm{d}f) \wedge \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}f \wedge i_X(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(i_X(\mathrm{d}f)) \wedge \omega + i_X(\mathrm{d}f) \wedge \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}(i_X\omega) = \\ &= \mathrm{d}f(i_X(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(i_X\omega)) + \mathrm{d}(i_X(\mathrm{d}f)) \wedge \omega = \mathrm{d}f \wedge \mathcal{L}_X\omega + \mathrm{d}(\mathcal{L}_X f) \wedge \omega \,. \end{aligned}$$

Sfruttando infine che per il punto 4 abbiamo $\mathcal{L}_X(\mathrm{d}f \wedge \omega) = (\mathcal{L}_X \mathrm{d}f) \wedge \omega + \mathrm{d}f \wedge (\mathcal{L}_X\omega)$ e che per il Corollario 8.5.6 vale $\mathrm{d}(\mathcal{L}_X f) = \mathcal{L}_X \mathrm{d}f$, otteniamo il risultato.

Vediamo infine che il punto 6 segue dalla 5, poiché

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX}\alpha &= i_{fX} \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}(i_{fX}\alpha) = f i_X \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}(f i_X \alpha) = \\ &= f i_X \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}f \wedge i_X\alpha + f \,\mathrm{d}i_X\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + \mathrm{d}f \wedge i_X\alpha \,. \end{aligned}$$

□

Proposizione 8.6.4. *Sia $f : M \to N$ e siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $Y \in \chi(M)$. Allora i_Y è naturale rispetto al push-forward, cioè $i_Y f^*\omega = f^* i_{f_*Y}\omega$.*

Dimostrazione. Chiamiamo $X = f_*Y \in \chi(N)$ e siano $p \in M$, $q = f(p) \in N$ e $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_pM$. Allora

$$\begin{aligned} i_Y(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) &= f^*\omega(p)(Y(p), v_1, \dots, v_{k-1}) = \\ &= \omega(q)(f_*(Y(p)), f_*v_1, \dots, f_*v_{k-1}) = \\ &= \omega(q)((X \circ f)(p), f_*v_1, \dots, f_*v_{k-1}) = \\ &= (i_X\omega)(q)(f_*v_1, \dots, f_*v_{k-1}) = (f^* i_X\omega)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) \,. \end{aligned}$$

□

Proposizione 8.6.5. *Siano $X_0, X_1, \dots, X_k \in \chi(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$. Allora*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X_0, X_1, \dots, X_k) = &\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \mathcal{L}_{X_l}(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_k)) + \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega(\mathcal{L}_{X_i}(X_j), X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Procediamo per l'induzione su k. Per $k=0$ abbiamo già visto nel Teorema 8.6.3 che $\mathrm{d}\omega(X_0) = \mathcal{L}_{X_0}\omega$.

Supponiamo quindi che la tesi valga per $k-1$ e sia $\omega \in \Omega^k(M)$. Per il punto 5 del Teorema 8.6.3, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X_0,X_1,\dots,X_k) &= (i_{X_0}\,\mathrm{d}\omega)(X_1,\dots,X_k) = \\
&= \mathcal{L}_{X_0}\omega(X_1,\dots,X_k) - \mathrm{d}(i_{X_0}\omega)(X_1,\dots,X_k) = \\
&= \mathcal{L}_{X_0}(\omega(X_1,\dots,X_k)) - \sum_{l=1}^{k}\omega(X_1,\dots,\mathcal{L}_{X_0}X_l,\dots,X_k) - \mathrm{d}(i_{X_0}\omega)(X_1,\dots,X_k)\,,
\end{aligned}$$

ma, visto che $i_{X_0}\omega \in \Omega^{k-1}(M)$, per ipotesi induttiva vale

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(i_{X_0}\omega)(X_1,\dots,X_k) &= \\
&= \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\mathcal{L}_{X_l}(i_{X_0}\omega(X_1,\dots,\hat{X}_l,\dots,X_k)) + \\
&\quad + \sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j-2}(i_{X_0}\omega)(\mathcal{L}_{X_i}(X_j),X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k) = \\
&= \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\mathcal{L}_{X_l}(\omega(X_0,X_1,\dots,\hat{X}_l,\dots,X_k)) + \\
&\quad + \sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j-2}\omega(X_0,\mathcal{L}_{X_i}(X_j),X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)
\end{aligned}$$

Quindi sostituendo nell'equazione precedente

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X_0,X_1,\dots,X_k) &= \sum_{l=0}^{k}(-1)^{l}\mathcal{L}_{X_l}(\omega(X_0,\dots,\hat{X}_l,\dots,X_k)) + \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l}\omega(\mathcal{L}_{X_0}X_l,\dots X_1,\dots,\hat{X}_l,\dots,X_k) + \\
&\quad + \sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\omega(\mathcal{L}_{X_i}(X_j),X_0,X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)\,,
\end{aligned}$$

da cui segue ovviamente quanto cercato. □

Corollario 8.6.6. *Siano $X,Y \in \chi(M)$, allora $[\,\mathcal{L}_X,\, i_Y\,] \coloneqq \mathcal{L}_X i_Y - i_Y\mathcal{L}_X = i_{[\,X,\,Y\,]}$ e $[\,\mathcal{L}_X,\,\mathcal{L}_Y\,] \coloneqq \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[\,X,\,Y\,]}$. Quindi in particolare $i_X\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X i_X$.*

Dimostrazione. Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ e $X_1,\dots,X_{k-1} \in \chi(U)$, allora

$$\begin{aligned}
(i_Y\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\dots,X_{k-1}) &= (\mathcal{L}_X\omega)(Y,X_1,\dots,X_{k-1}) = \\
&= \mathcal{L}_X(\omega(Y,X_1,\dots,X_{k-1})) - \omega([\,X,\,Y\,],X_1,\dots,X_{k-1}) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{k-1}\omega(Y,X_1,\dots,[\,X,\,X_l\,],\dots X_{k-1}) = \\
&= \mathcal{L}_X(i_Y\omega(X_1,\dots,X_{k-1})) - i_{[\,X,\,Y\,]}\omega(X_1,\dots,X_{k-1}) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{k-1} i_Y\omega(X_1,\dots,[\,X,\,X_l\,],\dots,X_{k-1}) = \\
&= (\mathcal{L}_X i_Y\omega)(X_1,\dots,X_{k-1}) - (i_{[\,X,\,Y\,]}\omega)(X_1,\dots,X_{k-1})\,.
\end{aligned}$$

Per la seconda equazione si usa invece la prima e il punto 5 del Teorema 8.6.3. □

CAPITOLO 9

TEOREMA DI STOKES

9.1. Orientazione

Definizione 9.1.1. Una varietà n-dimensionale connessa M è detta *orientabile* se esiste $\mu \in \Omega^n(M)$ tale che $\mu(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$. Una tale forma è detta una *forma di volume* su M.

Proposizione 9.1.2. *Sia M una n-varietà connessa. Allora M è orientabile se e solo se esiste un atlante (U_i, φ_i) con $\varphi_i : U_i \to V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che il determinante jacobiano delle mappe di transizione sia positivo.*

Definizione 9.1.3. Sia M varietà orientabile. Due forme di volume μ_1, μ_2 sono dette equivalenti se esiste $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$ tale che $\mu_1 = f\mu_2$.

Una *varietà orientata* è una varietà M con un'orientazione $[\mu]$, dove per orientazione si intende una classe di equivalenza di forme di volume.

Esercizio 9.1.4. *Mostrare che S^n è orientabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Esercizio 9.1.5.
1. *Sia $\sigma : M \to M$ tale che $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Supponiamo che esista $\pi : M \to N$ tale che $\mathrm{d}\pi$ sia invertibile puntualmente e $\pi^{-1}(n) = \{m, \sigma(m)\}$. Sia $\Omega_\pm(M) = \{\alpha \in \Omega^n(M) \ : \ \sigma^*\alpha = \pm\alpha\}$. Mostrare che $\pi^* : \Omega^n(N) \to \Omega_+(M)$ è un isomorfismo.*
2. *Mostrare che $\mathbb{RP}^n$ è orientabile per n dispari e non orientabile per n pari.*

   Suggerimento: *Prendere $M = S^n$, $N = \mathbb{RP}^n$, $\sigma(x) = -x$ nel punto precedente. Mostrare che $\sigma^*\omega_{S^n} = (-1)^{n+1}\omega_{S^n}$.*

Esercizio 9.1.6. (Nastro di Möbius) *Il nastro di Möbius $\mathbb{M}$ si ottiene quozientando $\mathbb{R}^2$ tramite la relazione di equivalenza data da $(x, y) \sim (x + k, (-1)^k y)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. In particolare $\mathbb{M}$ risulta una varietà connessa non compatta. Definiamo $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\sigma(x, y) = (x+1, -y)$. Sia π la proiezione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{M}$, allora $\pi \circ \sigma = \pi$. Se $\nu \in \Omega^2(\mathbb{M})$, sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che $f\omega_{\mathbb{R}^2} = \pi^*\nu$. Mostrare che $f(x + 1, -y) = -f(x, y)$ e che f si deve annullare in qualche punto.*

Proposizione 9.1.7 (Criterio di orientabilità)**.** *Sia N una varietà n-dimensionale orientabile e sia M una sottovarietà k-dimensionale con fibrato normale banale, cioè esistono $V_i : M \to TN$ per $i = 1, \dots, n - k$ tali che $\mathrm{span}\{T_pM, V_1(p), \dots, V_{n-k}(p)\} = T_pN$ per ogni $p \in M$. Allora M è orientabile.*

Corollario 9.1.8. *Sia M orientabile e sia $f \in C^\infty(M)$. Sia $c \in \mathbb{R}$ valore regolare per f (cioè $\nabla f(p) \neq 0$ per ogni $f(p) = c$). Allora $f^{-1}(c)$ è orientabile.*

Nota 9.1.9. Se M non è orientabile, esiste un doppio rivestimento $\tilde{M}$ di M orientabile.

Sia $\tilde{M} := \{(m, [\mu_m]) \ : \ m \in M, [\mu_m] \text{ orientazione di } T_m M\ \}$. Definiamo delle carte su $\tilde{M}$ come segue. Sia $[\omega]$ un'orientazione di $\mathbb{R}^n$ e sia $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tale che $A(e_1) = -e_1$ e $A(e_i) = e_i$ per $i = 2, \ldots, n$, dove $e_1, \ldots, e_n$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$. Allora ovviamente A cambia l'orientazione di $\mathbb{R}^n$. Se $\varphi : U \subseteq M \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ è una carta di M, siano $\tilde{U}^{\pm} = \{(u, [\mu_u]) \ : \ u \in U, [\varphi_*(\mu_u)] = \pm[\omega]\}$ e poniamo $\tilde{\varphi}^+(u, [\mu_u]) = \varphi(u)$, $\tilde{\varphi}^-(u, [\mu_u]) = (A \circ \varphi)(u)$. Allora $(\tilde{U}^{\pm}, \tilde{\varphi}^{\pm})$ sono carte di $\tilde{M}$ che la rendono una varietà orientabile.

Inoltre $\pi : \tilde{M} \to M$ tale che $\pi(m, [\mu_m]) = m$ è un doppio rivestimento di M con $\pi^{-1}(m) = \{(m, [\mu_m]), (m, -[\mu_m])\}$.

9.2. Integrazione su varietà

Definizione 9.2.1. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega \in \Omega^n(U)$ a supporto compatto. Se $\omega(x) = \frac{1}{n!}\, \omega_{i_1 \ldots i_n} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n} = \omega_{1 \ldots n} \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$, definiamo

$$\int_U \omega := \int_{\mathbb{R}^n} \omega_{1 \ldots n} \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n \,.$$

Proposizione 9.2.2. *Siano $U, V \in \mathbb{R}^n$ aperti e sia $f : U \to V$ diffeomorfismo. Supponiamo che f preservi l'orientazione. Se $\omega \in \Omega^n(V)$ ha supporto compatto, allora $f^*\omega \in \Omega^n(U)$ ha supporto compatto e*

$$\int_V \omega = \int_U f^*\omega \,.$$

Dimostrazione. Applichiamo la Proposizione 8.2.3 con $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, allora $A_i^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$ è la matrice jacobiana Jf di f. Quindi

$$\begin{aligned}\int_U f^*\omega = \int_U \det(Jf) \cdot (\omega \circ f) &= \int_U \det(Jf)(x) \cdot \omega_{1 \ldots n}(f(x)) \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n = \\ = \int_V \omega_{1 \ldots n}(y) \, \mathrm{d}y^1 \ldots \mathrm{d}y^n &= \int_V \omega \,,\end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito $y = f(x)$ e abbiamo sfruttato che f preserva l'orientazione per il cambio di variabile. □

Definizione 9.2.3. Sia M una varietà orientata con orientazione $[\Omega]$. Supponiamo che $\omega \in \Omega^n(M)$ abbia supporto compatto contenuto in U, dove (U, φ) è una carta di M orientata positivamente. Definiamo

$$\int_{(\varphi)} \omega := \int_{\varphi(U)} \varphi_*(\omega|_U) \,.$$

Proposizione 9.2.4. *Supponiamo che $\omega \in \Omega^n(M)$ abbia supporto compatto $C \subseteq U \cap V$, con (U, φ), (V, ψ) carte orientate positivamente in M varietà orientata. Allora $\int_{(\varphi)} \omega = \int_{(\psi)} \omega$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 9.2.2, abbiamo

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{\varphi(U)} \varphi_*(\omega|_U) = \int_{\varphi(U \cap V)} \varphi_*(\omega|_{U \cap V}) = \int_{\psi(U \cap V)} (\psi \circ \varphi^{-1})_* \varphi_*(\omega|_{U \cap V}) = \int_{(\psi)} \omega \,.$$

□

Corollario 9.2.5. *Se ω ha supporto compatto in U, dominio di una carta (U,φ), è ben definito*

$$\int_U \omega := \int_{(\varphi)} \omega\,.$$

Definizione 9.2.6. Sia $\omega \in \Omega^n(M)$ a supporto compatto. Sia $\mathcal{A}$ un atlante di M orientabile composto da carte con orientazione positiva. Sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha, \chi_\alpha)$ una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{A}$. Sia $\omega_\alpha := \chi_\alpha \omega$, allora ω_α ha supporto compatto nella carta $U_\alpha \in \mathcal{A}$. Definiamo allora l'*integrale* della forma ω su M come

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \omega_\alpha\,.$$

Proposizione 9.2.7. *Valgono i due seguenti fatti riferiti alla Definizione 9.2.6.*

1. *La sommatoria contiene solo un numero finito di termini.*

2. *La definizione è indipendente dalla scelta dell'atlante (orientato positivamente) e della partizione dell'unità.*

Dimostrazione. 1. Per ogni $p \in M$, esiste U intorno tale che solo un numero finito di χ_α sono non nulle. Inoltre, per compattezza, possiamo ricoprire il supporto di ω con un numero finito di tali intorni.

2. Sia $(V_\beta, \psi_\beta, \tilde{\chi}_\beta)$ un'altra partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{B}$ atlante orientato positivamente. Allora le funzioni $(\chi_\alpha \tilde{\chi}_\beta)_{\alpha\beta}$ soddisfano $\chi_\alpha \tilde{\chi}_\beta(p) = 0$ tranne che per un numero finito di indici. Inoltre $\sum_{\alpha,\beta} \chi_\alpha \tilde{\chi}_\beta(p) = 1$ per ogni p. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{M,\alpha} \omega &= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \chi_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \tilde{\chi}_\beta \chi_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \chi_\alpha \tilde{\chi}_\beta \omega = \\ &= \sum_\beta \int_{U_\beta} \tilde{\chi}_\beta \omega = \int_{M,\beta} \omega\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $\sum \tilde{\chi}_\beta = 1$ e $\sum \chi_\alpha = 1$.

□

Esercizio 9.2.8. *Siano M, N orientate ed $f : M \to N$ un diffeomorfismo che preserva l'orientazione. Mostrare che, se $\omega \in \Omega^n(N)$ ha supporto compatto, allora $\int_N \omega = \int_M f^*\omega$.*

Esercizio 9.2.9. *(Fubini) Siano M^m, N^n varietà orientate e si orienti il prodotto $M \times N$ con l'orientazione prodotto (tramite il prodotto wedge). Siano $p_M, p_N : M \times N \to M, N$ le proiezioni dal prodotto ai fattori. Siano $\alpha \in \Omega^m(M)$ e $\beta \in \Omega^n(N)$ e definiamo $\alpha \times \beta := (p_M^*\alpha) \wedge (p_N^*\beta)$, che è a supporto compatto. Mostrare che $\int_{M\times N} \alpha \times \beta = (\int_M \alpha)(\int_N \beta)$.*

Nota 9.2.10. Data una scelta di orientazione $[\mu]$ su una m-varietà M, diciamo che una base $v_1, \dots, v_m$ di T_xM è orientata positivamente se $\mu(v_1, \dots, v_m) \geq 0$.

9.3. Varietà con bordo

Definizione 9.3.1. Siano $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ semispazi chiusi. Siano U, V aperti di E_1, E_2. Una mappa $f : U \to V$ è regolare se per ogni $x \in U$ esiste U_1 intorno di x in $\mathbb{R}^n$ e V_1 intorno di $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ ed esiste $f_1 : U_1 \to V_1$ regolare tale che $f|_{U \cap U_1} = f_1|_{U \cap U_1}$. In questo caso definiamo il differenziale di f in x come $\mathrm{D}f(x) := \mathrm{D}f_1(x)$.

La mappa f è detta diffeomorfismo se esiste $g : V \to U$ regolare che è l'inversa di f.

Nota 9.3.2.
1. $\mathrm{D}f$ non dipende dalla scelta dell'estensione f_1. Questo è ovvio se x non sta sul bordo, mentre al bordo si ragiona per approssimazione.
2. Siano U aperto in E_1, V aperto in E_2, $f : U \to V$ diffeomorfismo. Allora le restrizioni $\operatorname{Int} f : \operatorname{Int} U \to \operatorname{Int} V$ e $\partial f : \partial U \to \partial V$ sono diffeomorfismi.

Definizione 9.3.3. Una *varietà con bordo* è un insieme M munito di un atlante di carte di bordo, cioè coppie (U, φ) tali che $U \subseteq M$ aperto e $\varphi(U) \subseteq E$, con E semispazio chiuso di $\mathbb{R}^n$. Si richiede che valgano la proprietà di ricoprimento e la regolarità delle mappe di transizione (nel senso della Definizione 9.3.1).

Definizione 9.3.4. Data M varietà con bordo, definiamo la *parte interna* $\operatorname{Int} M = \bigcup_i \varphi_i^{-1}(\operatorname{Int}(\varphi_i(U_i)))$ e il *bordo* $\partial M = \bigcup_i \varphi_i^{-1}(\partial(\varphi_i(U_i)))$ di M.

Estendiamo ora alle varietà con bordo alcune definizioni date per varietà non con bordo, per definire infine l'orientazione.

Pensiamo al tangente come un sottospazio n-dimensionale anche per i punti sul bordo. Una forma di volume è una n-forma che non si annulla in nessun punto. Diciamo che (U, φ) carta di bordo è orientata positivamente se $T\varphi(u)$ preserva l'orientazione per ogni $u \in U$.

Nota 9.3.5. È stato conveniente poter scegliere semispazi arbitrari e non solo $\mathbb{R}^+_n = \{x_n \geq 0\}$. Per esempio è comodo per orientare $M = [\,0,\,1\,]$.

Vediamo quindi ora come possiamo orientare il bordo.

Definizione 9.3.6. Sia M una m-varietà orientata con bordo. Siano $x \in \partial M$ e $\varphi : U \to E$ una carta orientata positivamente, con $x \in U$ ed E semispazio chiuso. Una base $v_1, \dots, v_{m-1}$ di $T_x(\partial M)$ è detta orientata positivamente se $\{(T_x\varphi)^{-1}(n), v_1, \dots, v_{m-1}\}$ è orientata positivamente in M per ogni vettore $n \in \mathbb{R}^m$ che punta all'esterno di E in $\varphi(x)$.

Nota 9.3.7. In $\mathbb{R}^m$ ogni semispazio chiuso si scrive come $E = \{x \;:\; \Lambda(x) \geq 0\}$ per qualche funzionale lineare Λ su $\mathbb{R}^m$. Una scelta canonica di n è $n = -\nabla\Lambda$.

9.4. Teorema di Stokes

Teorema 9.4.1 (Stokes). *Sia M una varietà n-dimensionale orientata. Inoltre sia $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ una forma a supporto compatto e sia $i : \partial M \to M$ l'inclusione del bordo in M. Allora*

$$\int_{\partial M} i^*\alpha = \int_M \mathrm{d}\alpha\,.$$

Il membro di sinistra si denota anche con $\int_{\partial M} \alpha$ e, se $\partial M = \emptyset$, intendiamo che tale integrale sia 0.

Dimostrazione. Per linearità in α e per l'esistenza di partizioni dell'unità possiamo supporre che α abbia supporto nel dominio U di un'unica carta. Allora in coordinate

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \, .$$

Di conseguenza

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \, ,$$

e quindi

$$\int_U \mathrm{d}\alpha = \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n \, ,$$

che è ben definito se M è orientata.

Distinguiamo ora in casi a seconda che U intersechi o no il bordo di M:

1. ($\partial U = \emptyset$) In questo caso l'i-esimo termine della sommatoria è

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \right) \mathrm{d}x^1 \ldots \hat{\mathrm{d}x^i} \ldots \mathrm{d}x^n = 0 \, ,$$

   perché α_i ha supporto compatto. Quindi in questo caso abbiamo quello che volevamo, perché ovviamente $\int_{\partial U} i^* \alpha = 0$.

2. ($\partial U \neq \emptyset$) Possiamo supporre $E = \mathbb{R}^n_+$, allora l'integrale diventa

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n \, .$$

   Se $i < n$ ragioniamo come prima, altrimenti se $i = n$ l'integrale diventa

$$-\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \alpha_n \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^{n-1} \, .$$

   D'altra parte abbiamo

$$\int_{\partial U} \alpha = \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \alpha = \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} (-1)^{n-1} \alpha_n (x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^{n-1} \, .$$

   L'orientazione di ∂M non è quella standard, infatti la normale esterna è $-e_n = -(0, \ldots, 0, 1)$. Perciò, l'orientazione del bordo ha il segno di $\{-e_n, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ che è $(-1)^n$, quindi

$$\int_{\partial U} \alpha = (-1)^{2n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \alpha_n \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^{n-1} = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \alpha_n \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^{n-1} = \int_U \mathrm{d}\alpha \, .$$

□

Definizione 9.4.2. Sia μ una forma di volume su M orientata e sia $X \in \chi(M)$. La *divergenza* $\operatorname{div} X \in C^\infty(M)$ di X è definita da $\mathcal{L}_X \mu = (\operatorname{div} X) \mu$.

La divergenza si interpreta come espansione o contrazione del volume.

Teorema 9.4.3 (Gauss)**.** *Sia M orientata e con bordo. Sia $X \in \chi(M)$ a supporto compatto e sia μ una forma di volume su M. Allora*

$$\int_M (\operatorname{div} X)\mu = \int_{\partial M} i_X \mu \,.$$

Dimostrazione. Sfruttando il punto 5 del Teorema 8.6.3 e il fatto che $\mathrm{d}\mu = 0$ poiché è una $(n+1)$-forma, abbiamo che

$$(\operatorname{div} X)\mu = \mathcal{L}_X \mu = \mathrm{d}(i_X \mu) + i_X \,\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}(i_X \mu)$$

e di conseguenza la conclusione segue dal Teorema 9.4.1 (Stokes). □

Se M ammette una metrica g esiste un'unica normale unitaria (rispetto a g) che punta esternamente a ∂M e che chiamiamo $n_{\partial M}$. Inoltre g determina univocamente forme di volume $\mu_M, \mu_{\partial M}$ su $M, \partial M$.

Corollario 9.4.4. *Se $X \in \chi(M)$, allora*

$$\int_M (\operatorname{div} X)\mu_M = \int_{\partial M} g(X, n_{\partial M})\mu_{\partial M} \,.$$

Dimostrazione. Localmente, scegliamo una carta (U, φ) tale che $n_{\partial M} = -\frac{\partial}{\partial x^m}$. Perciò, se $v_1, \dots, v_{m-1}$ è una base orientata di $T_x \partial M$, vale

$$\mu_{\partial M}(x)(v_1, \dots, v_{m-1}) = \mu_M(x)(-\frac{\partial}{\partial x^m}, v_1, \dots, v_{m-1}) \,.$$

Segue allora che

$$\begin{aligned}(i_X \mu_M)(x)(v_1, \dots, v_{m-1}) &= \mu_M(X^i(x) v_i + X^m \frac{\partial}{\partial x^m}, v_1, \dots, v_{m-1}) = \\ &= -X^m(x)\mu_{\partial M}(x)(v_1, \dots, v_{m-1}) \,.\end{aligned}$$

Inoltre $X^m = -g(X, n_{\partial M})$, quindi basta applicare il Teorema 9.4.3 (Gauss). □

Esercizio 9.4.5. *Sia M una varietà compatta, orientabile e senza bordo, sia μ forma di volume e sia infine $X \in \chi(M)$ con $\operatorname{div} X = 0$. Mostrare che per ogni $f, g \in C^\infty(M)$ vale*

$$\int_M g X(f) \mu = -\int_M f X(g) \mu \,.$$

Esercizio 9.4.6. *Sia M una varietà orientabile $(n+1)$-dimensionale, sia $f : \partial M \to N^{n+1}$ una mappa regolare e sia $\omega \in \Omega^n(N)$ con $\mathrm{d}\omega = 0$. Mostrare che se f si estende ad M, allora $\int_{\partial M} f^* \omega = 0$.*

9.5. Formula di coarea

Sia (M, g) una varietà orientabile $(m+1)$-dimensionale. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione regolare senza punti critici. Allora $M_t = f^{-1}(t)$ è una sottovarietà regolare m-dimensionale orientabile, che supponiamo compatta per ogni t. Inoltre per ogni t chiamiamo μ_t la forma di volume su M_t indotta da g, μ la forma di volume su M sempre indotta da g e poniamo $n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|_g}$.

Teorema 9.5.1 (Formula di coarea)**.** *Sia $F : M \to \mathbb{R}$ a supporto compatto, allora con le notazioni precedenti vale*

$$\int_M F\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{M_t} \frac{F}{|\nabla f|_g} \mu_t \right) \mathrm{d}t\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $t_0 \in \mathbb{R}$ e $p \in M_{t_0}$. Visto che $\mathrm{d}f(p) \neq 0$, per il teorema della funzione implicita esistono $x^1, \ldots, x^m$ tali che $(f, x^1, \ldots, x^m)$ sono coordinate di M in un intorno di p. Quindi esiste ρ funzione regolare positiva tale che $\mu = \rho\,\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m$. Allora

$$\begin{aligned}\mu_{t_0} = i_n\mu|_{M_{t_0}} &= \rho i_n(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m)|_{M_{t_0}} = \\ &= \rho i_n(\mathrm{d}f) \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m|_{M_{t_0}} - \rho\,\mathrm{d}f \wedge i_n(\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m)|_{M_{t_0}} = \\ &= \rho i_n(\mathrm{d}f) \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m|_{M_{t_0}} = \rho|\nabla f|_g\,\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m|_{M_{t_0}}\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato che $\mathrm{d}f|_{M_{t_0}} = 0$. A questo punto integrando abbiamo la conclusione. □

Consideriamo come prima applicazione del Teorema 9.5.1 (Formula di coarea) il calcolo dei volumi delle sfere.

Consideriamo l'immersione $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \{(t, x^1, \ldots, x^n)\}$ e siano $p_\pm = S^n \cap \{t = \pm 1\} \in S^n$ i due poli. Sia $\pi : S^n \to \mathbb{R}$ la proiezione su t, allora $\mathrm{d}\pi \neq 0$ se $t \neq \pm 1$.

Abbiamo $\pi^{-1}(t) \cong S^{n-1}_{r(t)}$ con $r(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$, dove al pedice indichiamo il raggio della sfera. Se ora θ è l'angolo fra l'asse t e T_pS_n, allora $\cos\theta = |p - p'| = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$, dove p' la proiezione su $\{t\} \times \{0\}$; perciò $|\nabla\pi(p)| = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$.

Per il Teorema 9.5.1 (Formula di coarea) vale

$$\sigma_n = 2\int_0^1 \frac{1}{|\nabla\pi|} \int_{M_t} \mu_t = 2\sigma_{n-1}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sigma_{n-1}\int_0^1 (1-s)^{\frac{n-2}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s\,,$$

da cui

$$\sigma_n = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\,.$$

Altre applicazioni includono:

1. Disuguaglianze ottimali di Sobolev, tipo $\int |u|^{\frac{n}{n-1}} \leq C_n \int |\nabla u|$.

2. Riarrangiamento sferico. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $A_t = \{u > t\}$. Sia inoltre u_* radiale decrescente tale che $|A^*_t| = |A_t|$ con $A^*_t = \{u^* > t\}$. Questa procedura serve a regolarizzare e conserva la normale L^p e poi con la formula di coarea si può dimostrare per esempio che

$$\int |\nabla u^*|^2 \leq \int |\nabla u|^2\,.$$

CAPITOLO 10

GRUPPI DI LIE

10.1. Gruppi e algebre di Lie

Definizione 10.1.1. Un *gruppo topologico* è un insieme con struttura sia di gruppo che di spazio topologico tale che le operazioni di prodotto ed inverso siano continue.

Definizione 10.1.2. Un *gruppo di Lie* è un gruppo che ha una struttura di varietà differenziabile (di classe C^∞) tale che il prodotto e l'inverso sono C^∞.

Esempio. Sono gruppi di Lie $(\mathbb{R}^n, +)$, $(S^1 \subseteq \mathbb{C}, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, il toro $(T^n, +)$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Proposizione 10.1.3. *Sia G un gruppo topologico, allora la componente connessa K contenente $e = \mathrm{id}_G$ è un sottogruppo normale e chiuso di G. Se G è di Lie, allora K è un sottogruppo di Lie aperto.*

Dimostrazione. Sia $a \in K$, allora $a^{-1}K$ è connesso poiché $b \mapsto a^{-1}b$ è un omeomorfismo. Inoltre se $e \in a^{-1}K$, allora $a^{-1}K \subseteq K$. Questo è vero per ogni $a \in K$, quindi $K^{-1}K \subseteq K$ e perciò K è un sottogruppo.

Sia ora $b \in G$, allora bKb^{-1} è connesso ed $e \in bKb^{-1}$, quindi $bKb^{-1} \subseteq K$ per ogni $b \in G$ e perciò K è normale. Inoltre K è chiuso essendo una componente connessa.

Se G è di Lie, allora è localmente connesso e quindi K è aperto. Perciò K è una sottovarietà e un sottogruppo e di conseguenza ha una struttura di gruppo di Lie. □

Definizione 10.1.4. Dati G gruppo di Lie ed $a \in G$, definiamo le *moltiplicazioni* sinistra e destra $L_a, R_a : G \to G$ per a come $L_a(b) = ab$ ed $R_a(b) = ba$.

Le due funzioni L_a, R_a sono diffeomorfismi con inverse $L_{a^{-1}}$ ed $R_{a^{-1}}$. In particolare $(L_a)_* : T_bG \to T_{ab}G$ e $(R_a)_* : T_bG \to T_{ba}G$ sono isomorfismi per ogni $b \in G$.

Definizione 10.1.5. Un campo $X \in \chi(G)$ è detto *invariante a sinistra* se $(L_a)_*X = X$ per ogni $a \in G$.

Nota 10.1.6. Per avere l'invarianza a sinistra basta verificare che $(L_a)_*(X(e)) = X(a)$ per ogni $a \in G$.

Dato $X_e \in T_eG$, esiste $X \in \chi(G)$ invariante a sinistra definito dalla formula precedente tale che $X(e) = X_e$.

Proposizione 10.1.7. *Sia X un campo vettoriale (senza richieste di regolarità) invariante a sinistra, allora X è di classe C^∞.*

Dimostrazione. Basta verificare la regolarità in un intorno dell'identità. Sia (U, φ) carta di G tale che $e \in U$ e chiamiamo x le sue funzioni coordinate. Scegliamo $V \subseteq U$ che V contiene e e tale che $ab, a^{-1}b \in U$ per ogni $a, b \in V$. Dato $a \in V$, abbiamo

$$X^i(a) = X(x^i)(a) = (L_a)_* X_e(x^i) = X_e(x^i \circ L_a) .$$

Poiché $(a, b) \mapsto ab$ è C^∞, allora $x^i(ab) = x^i(L_a(b)) = f^i(x^1(a), \dots, x^n(a), x^1(b), \dots, x^n(b))$ con f^i funzioni di classe C^∞.

Ponendo $X_e = \sum_{j=1}^n c^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_e$, abbiamo

$$X^i(a) = X_e(x^i \circ L_a) = \sum_{j=1}^n c^j \frac{\partial(x^i \circ L_a)}{\partial x^j}|_e = \sum_{j=1}^n c^j \frac{\partial f^i}{\partial x^{n+j}}(x(a), x(e)) ,$$

quindi X^i è C^∞ e di conseguenza anche X. □

Corollario 10.1.8. *Un gruppo di Lie G ha sempre fibrato tangente banale e quindi è orientabile.*

Dimostrazione. Sia $X_{1,e}, \dots, X_{n,e}$ base di T_eG e siano $X_1, \dots, X_n$ estensioni degli elementi della base a campi vettoriali invarianti a sinistra. Allora $X_1, \dots, X_n$ sono ovunque linearmente indipendenti e possiamo definire $f : TG \to G \times \mathbb{R}^n$ tale che $f(\sum c^i X_i(a)) = (a, c^1, \dots, c^n)$, che risulta un diffeomorfismo. □

Dalle proprietà del push-forward $(L_a)_* [X, Y] = [(L_a)_* X, (L_a)_* Y]$. In particolare, se X, Y sono invarianti a sinistra, allora anche $[X, Y]$ è invariante a sinistra.

Dati $X, Y \in T_eG$, definiamo con $\tilde{X}, \tilde{Y}$ le loro estensioni invarianti a sinistra. Definiamo quindi un'operazione $[\cdot, \cdot]$ su T_eG tramite $[X, Y] \coloneqq \left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right](e)$.

Definizione 10.1.9. Il tangente T_eG con questa operazione è detto *algebra di Lie* di G ed è indicato $\mathcal{L}(G)$ o $\mathfrak{g}$.

L'algebra di Lie di un gruppo di Lie è finito dimensionale e soddisfa $[X, X] = 0$ e l'identità di Jacobi $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Definizione 10.1.10. Un'algebra di Lie è detta *commutativa* se $[X, Y] = 0$ per ogni $X, Y \in T_eG$.

Nota 10.1.11. L'algebra di Lie di $(\mathbb{R}^n, +)$ è commutativa.

Sia H un sottogruppo di Lie del gruppo di Lie G e sia $i : H \hookrightarrow G$ l'inclusione. Allora T_eH si identifica con un sottospazio di T_eG. Vediamo inoltre che T_eH risulta una sottoalgebra $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$, cioè T_eH è chiuso rispetto a $[\cdot, \cdot]$.

Ogni $X \in T_eH$ si estende a $\tilde{X} \in \chi(H)$ invariante a sinistra in H e a $\hat{X} \in \chi(G)$ invariante a sinistra in G. Sia $a \in H$ e siano $L_a : H \to H$, $\hat{L}_a : G \to G$ le trasformazioni a sinistra, allora $\hat{L}_a \circ i = i \circ L_a$. Quindi

$$i_* \tilde{X}(a) = i_*(L_a)_* X = (\hat{L}_a)_*(i_* X) = \hat{X}(a) ,$$

perciò $i_* \tilde{X} = \hat{X}$ in H. Dunque, se $Y \in T_eH$, allora $\left[\hat{X}, \hat{Y}\right](e) = i_* \left(\left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]\right)(e)$, da cui quanto cercato.

Vediamo ora che vale anche un viceversa, nella forma del seguente teorema.

Teorema 10.1.12. *Siano G un gruppo di Lie e $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$. Allora esiste unico un sottogruppo di Lie H di G connesso tale che $\mathcal{L}(H) = \mathfrak{h}$.*

Dimostrazione. Dato $a \in G$, sia Δ_a il sottospazio di T_aG generato dagli $\tilde{X}(a)$ con $X \in \mathfrak{h}$. Poiché $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra, Δ è una distribuzione integrabile per la Proposizione 4.2.4. Sia H una varietà integrale massimale contenente e, la cui esistenza ci è garantita dal Teorema 4.3.1 (Frobenius). Se $b \in G$, allora $(L_b)_*(\Delta_a) = \Delta_{ba}$. Quindi $(L_b)_*$ lascia invariante la distribuzione. Perciò L_b permuta le varietà integrali massimali di Δ.

Se $b \in H$, $L_{b^{-1}}$ porta H nella varietà integrale massimale contenente $L_{b^{-1}}(b) = e$; di conseguenza $L_{b^{-1}}H = H$ e perciò H è un sottogruppo di G. Manca ora verificare che $(a, b) \mapsto ab$ e $a \mapsto a^{-1}$ sono operazioni C^∞. Però lo spazio tangente di H è Δ, che è di classe C^∞ poiché generata da campi vettoriali invarianti a sinistra e quindi C^∞. Come prima si dimostra la regolarità delle funzioni coordinate di prodotti.

Tralasciamo la dimostrazione dell'unicità del sottogruppo. □

Nota 10.1.13. Una sottovarietà di un gruppo di Lie che è anche un sottogruppo è un sottogruppo di Lie.

10.2. Omomorfismi fra gruppi di Lie

Siano G, H gruppi di Lie e $\phi : G \to H$ un omomorfismo di classe C^∞. Allora è definito $\phi_* : T_eG \to T_eH$.

Se $X \in T_eG$ definiamo $\tilde{\tilde{X}}$ come l'estensione in $\chi(H)$ invariante a sinistra di ϕ_*X che vale ϕ_*X in e_H. Allora, poiché per ogni $a \in G$ vale $\phi \circ L_a = L_{\phi(a)} \circ \phi$, abbiamo

$$\phi_*\tilde{X}(a) = \phi_*(L_a)_*X = (L_{\phi(a)})_*\phi_*X = \tilde{\tilde{X}}(\phi(a))$$

con $\tilde{X} \in \chi(G)$ invariante a sinistra tale che $\tilde{X}(e) = X$.

Quindi $\tilde{\tilde{X}}\phi = \phi_*\tilde{X}$ e perciò $(\phi_*)_e := \phi_*|_{T_eG} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebra di Lie, cioè una mappa lineare che soddisfa $(\phi_*)_e\,[\,X,\,Y\,]_{\mathfrak{g}} = [\,(\phi_*)_eX,\,(\phi_*)_eY\,]_{\mathfrak{h}}$.

Teorema 10.2.1. *Siano G, H gruppi di Lie e $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un omomorfismo di algebre di Lie. Allora esiste U intorno di e in G e una mappa $\phi : U \to H$ di classe C^∞ tale che $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ per ogni $a, b \in U$ con $ab \in U$ e tale che $(\phi_*)_eX = \Phi X$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Inoltre, se esistono $\phi, \psi : G \to H$ omomorfismi C^∞ tali che $(\phi_*)_e = (\psi_*)_e = \Phi$ e se G è connesso, allora $\phi = \psi$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ l'insieme $\mathfrak{f} = \{(X, \Phi(X)) \ : \ X \in \mathfrak{g}\}$. Dato che Φ è un omomorfismo di algebre di Lie, allora $\mathfrak{f}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = \mathcal{L}(G \times H)$. Quindi esiste K sottogruppo di Lie di $G \times H$ tale che $\mathcal{L}(K) = \mathfrak{f}$. Sia $\pi_1 : G \times H \to G$ la proiezione sul primo fattore e $\omega = \pi_1|_K$, allora $\omega : K \to G$ è un omomorfismo. Dato $X \in \mathfrak{g}$, abbiamo $\omega_*(X, \Phi(X)) = X$, quindi $\omega_* : T_{(e,e)}K \to T_eG$ è un isomorfismo. Perciò esiste V intorno di $(e, e) \in K$ tale che ω mappa V diffeomorficamente su U intorno di $e \in G$.

Se $\pi_2 : G \times H \to H$ è la proiezione su H, definiamo $\phi := \pi_2 \circ \omega^{-1}$ su U. Quindi ϕ realizza la prima condizione. Per la seconda, sia $X \in \mathfrak{g}$, abbiamo $\omega_*(X, \Phi(X)) = X$, allora $\phi_*X = (\pi_2)_*(X, \Phi(X)) = \Phi(X)$.

Dati $\phi, \psi : G \to H$ omomorfismi, definiamo $\theta : G \to G \times H$ iniettivo come $\theta(a) = (a, \psi(a))$. L'immagine G' di θ è un sottogruppo di Lie di $G \times H$ e dato $X \in \mathfrak{g}$ vale $\theta_*(X) = (X, \Phi(X))$, allora $\mathcal{L}(G') = \mathfrak{f}$, perciò $G' = K$ e di conseguenza $\psi(a) = \phi(a)$ per ogni $a \in G$. □

Corollario 10.2.2. *Se due gruppi di Lie hanno algebre di Lie isomorfe, allora sono localmente isomorfi (in un intorno dell'identità).*

Dimostrazione. Dato $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ isomorfismo, sia ϕ la mappa data dal Teorema 10.2.1 Questa soddisfa $(\phi_*)_e = \Phi$ isomorfismo, quindi ϕ è un diffeomorfismo in un intorno di $e \in G$. □

Corollario 10.2.3. *Sia G un gruppo di Lie connesso con algebra di Lie commutativa, allora G è abeliano.*

Dimostrazione. Per il Corollario 10.2.2, G è localmente isomorfo ad $\mathbb{R}^n$ e quindi è commutativo in un intorno di $e \in G$. Si vede che, dalla connessione, ogni intorno U di e genera G tramite le operazioni di gruppo; perciò anche G è abeliano. □

Definizione 10.2.4. Sia G un gruppo di Lie, allora un omomorfismo $\phi : \mathbb{R} \to G$ di classe C^∞ è detto un *sottogruppo ad un parametro* di G.

Corollario 10.2.5. *Per ogni $X \in T_eG$, esiste un unico sottogruppo ad un parametro $\phi : \mathbb{R} \to G$ tale che $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = X$.*

Dimostrazione. Sia $f : G \to \mathbb{R}$ e se $\phi : \mathbb{R} \to G$ è un omomorfismo C^∞ tale che $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = X$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(f) &= \lim_{h\to\infty} \frac{f(\phi(t+h)) - f(\phi(t))}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{f(\phi(t)\phi(h)) - f(\phi(t))}{h} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f \circ L_{\phi(t)} \circ \phi(s))|_{s=0} = (L_{\phi(t)})_* \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}|_{s=0}(f) = ((L_{\phi(t)})_* X)(f) = \tilde{X}(\phi(t))(f)\,.\end{aligned}$$

Quindi se esiste un tale omomorfismo ϕ, deve essere una curva integrale di $\tilde{X}$ (estensione di X a G), abbiamo quindi l'unicità.

Viceversa, sia $\phi : \mathbb{R} \to G$ una curva integrale di $\tilde{X}$ e consideriamo, fissato s, la mappa $t \mapsto \phi(s) \cdot \phi(t)$. Questa è una curva integrale di $\tilde{X}$ che passa per $\phi(s)$ al tempo 0. Però la cosa vale anche per $\phi(\cdot + s)$, perciò $\phi(t+s) = \phi(s)\phi(t)$ per unicità. Di conseguenza ϕ è il sottogruppo ad un parametro cercato. □

Nota 10.2.6. Le curve integrali esistono localmente, ma usando le proprietà di gruppo si può mostrare l'esistenza globale.

Definizione 10.2.7. Siano G un gruppo di Lie, $X \in T_eG$ e ϕ definita come sopra (cioè $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = X$). Definiamo la *mappa esponenziale* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ tramite $\exp(X) \coloneqq \phi(1)$.

Nota 10.2.8. Questa mappa soddisfa $\exp((t_1+t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X)$ e $\exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$.

Proposizione 10.2.9. *La mappa $\exp : \mathfrak{g} \to G$ è di classe C^∞ e 0 è un punto regolare, cioè esiste U intorno di 0 in T_eG tale che $\exp|_U$ è un diffeomorfismo su un intorno di $e \in G$.*

Inoltre, se $\psi : G \to H$ è un omomorfismo C^∞, allora $\exp \circ \psi_* = \psi \circ \exp$.

Dimostrazione. Dati $X \in T_eG$ e $a \in G$, consideriamo $T_{(X,a)}(T_eG \times G)$ che si identifica con $T_eG \times T_aG$. Definiamo un campo vettoriale $Y \in \chi(T_eG \times G)$ tramite $Y(X,a) = 0 \oplus \tilde{X}(a)$. Allora Y genera un flusso $\alpha : \mathbb{R} \times (T_eG \times G) \to T_eG \times G$ di classe C^∞. Si ha che $\exp X$ è la proiezione su G di $\alpha(1, 0 \oplus X)$, quindi exp è di classe C^∞.

Dato $v \in T_0(T_eG)$, questo si identifica con un vettore in T_eG e la curva $c(t) = tv$ (in T_eG) ha vettore tangente v in 0. Quindi $(\exp_*)_0(v) = \frac{\mathrm{d}\exp(c(t))}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tv)|_{t=0}$, perciò $(\exp_*)_0$ è l'identità e di conseguenza exp è un diffeomorfismo in un intorno di $0 \in T_eG$.

Sia $\psi : G \to H$ un omomorfismo e sia $\phi : \mathbb{R} \to G$ omomorfismo tale che $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = X \in \mathfrak{g}$. Allora $\psi \circ \phi$ è un omomorfismo e

$$\frac{\mathrm{d}(\psi \circ \phi)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = \psi_* \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}|_{t=0} \right) = \psi_* X \,.$$

Quindi $\exp(\psi_* X) = (\psi \circ \phi)(1) = \psi(\phi(1)) = \psi(\exp(X))$. $\square$

Corollario 10.2.10. *Ogni omomorfismo iniettivo $\phi : G \to H$ di classe C^∞ è un'immersione fra varietà. In particolare l'immagine è un sottogruppo di Lie di H.*

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che $\phi_* \tilde{X}(p) = 0$ per qualche $X \in \mathfrak{g}$, allora $\phi_* X = 0$. Di conseguenza, per la Proposizione 10.2.9, abbiamo $\phi(\exp(X)) = \exp(\phi_* X) = \exp(0) = e$, che contraddice l'iniettività. $\square$

Corollario 10.2.11. *Ogni omomorfismo continuo tra gruppi di Lie è di classe C^∞.*

10.3. Forme invarianti

Definizione 10.3.1. Una forma ω su G gruppo di Lie è detta *invariante a sinistra* se soddisfa $(L_a)^*\omega = \omega$ per ogni $a \in G$, cioè $\omega(b) = (L_a)^*(\omega(ab))$.

Forme di questo tipo sono determinate dal loro valore nell'identità.

Se $\omega^1, \dots, \omega^n$ sono 1-forme invarianti a sinistra e tali che $\omega^1(e), \dots, \omega^n(e)$ generano T_e^*G, allora ogni k-forma ω invariante a sinistra si scrive come $\sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}\, \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}$ con coefficienti $a_{i_1 \dots i_k}$ costanti.

Sia ω invariante a sinistra, allora $(L_a)^*\, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}((L_a)^*\omega) = \mathrm{d}\omega$. Quindi $\mathrm{d}\omega$ è anch'essa invariante a sinistra. Inoltre se ω è una 1-forma invariante a sinistra e $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(G)$ sono campi vettoriali invarianti a sinistra, allora le funzioni $\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})$ sono invarianti a sinistra e quindi costanti (perché G è connesso). Sfruttando quanto appena detto e la Proposizione 8.6.5, abbiamo dunque che $\mathrm{d}\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}(\omega(\tilde{Y})) - \tilde{Y}(\omega(\tilde{X})) - \omega(\left[\, \tilde{X},\, \tilde{Y} \,\right]) = -\omega(\left[\, \tilde{X},\, \tilde{Y} \,\right])$, otteniamo quindi $\mathrm{d}\omega(e)(X, Y) = -\omega(e)([\, X,\, Y\,])$.

Siano $\omega^1(e), \dots, \omega^n(e)$ come sopra e consideriamo una base duale $X_1, \dots, X_n$ di T_eG. Esistono delle costanti c_{ij}^k tali che $[\, X_i,\, X_j \,] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k$. Questo implica anche che $\left[\, \tilde{X}_i,\, \tilde{X}_j \,\right] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \tilde{X}_k$.

Definizione 10.3.2. I coefficienti c_{ij}^k sono detti *costanti di struttura* di G rispetto alla base $X_1, \dots, X_n$.

Grazie all'antisimmetria della parentesi di Lie e Jacobi dati dalla Proposizione 3.2.1, le costanti di struttura rispettano:

1. $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$;
2. $\sum_{\alpha=1}^n c_{ij}^\alpha c_{\alpha k}^l + c_{jk}^\alpha c_{\alpha i}^l + c_{ki}^\alpha c_{\alpha j}^l = 0$.

Inoltre, per quanto detto prima, abbiamo $\mathrm{d}\omega^k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j$.

Teorema 10.3.3. *Sia G gruppo di Lie con base di 1-forme invarianti a sinistra $\omega^1, \ldots, \omega^n$ e costanti di struttura c_{ij}^k. Sia M^n una varietà differenziabile con 1-forme $\theta^1, \ldots, \theta^n$ linearmente indipendenti tali che $\mathrm{d}\theta^k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j$. Allora per ogni $p \in M$ esiste U intorno di p ed $f : U \to G$ diffeomorfismo tale che $\theta^i = f^*\omega^i$.*

Dimostrazione. Siano $\pi_i : M \times G \to M, G$ le proiezioni sui fattori e siano $\bar{\theta}^k = \pi_1^*\theta^k$ e $\bar{\omega}^k = \pi_2^*\omega^k$. Allora

$$\mathrm{d}(\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k) = -\sum_{i<j} c_{ij}^k([\bar{\theta}^i \wedge \bar{\theta}^j] - [\bar{\omega}^i \wedge \bar{\omega}^j]) = -\sum_{i<j} c_{ij}^k[\bar{\theta}^i \wedge (\bar{\theta}^j - \bar{\omega}^j) + (\bar{\theta}^i - \bar{\omega}^i) \wedge \bar{\omega}^j]\,. \tag{10.3.1}$$

Consideriamo la distribuzione in $M \times G$ (che si dimostra avere dimensione n) generata da tutti i campi vettoriali che sono annullati da ogni $\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k$. Vediamo che l'Equazione (10.3.1), ci dà l'integrabilità di questa distribuzione.

Infatti, siano X, Y campi nella distribuzione, allora

$$\begin{aligned}(\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k)([\,X,\,Y\,]) &= -\,\mathrm{d}(\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k)(X,Y) + X((\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k)(Y)) - Y((\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k)(X)) = \\ &= -\,\mathrm{d}(\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k)(X,Y) = 0\,,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è data proprio dall'Equazione (10.3.1). Questo ci dice proprio che se X, Y stanno nella distribuzione, anche $[\,X,\,Y\,]$ appartiene a tale distribuzione. Quindi, per il Teorema 4.3.1 (Frobenius), dato $a \in G$ troviamo una varietà integrale Γ che passa per (p, a).

Le forme $\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^n, \bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^n$ sono linearmente indipendenti in $M \times G$, quindi sia $\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^n$ che $\bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^n$ sono linearmente indipendenti su Γ. Di conseguenza $\pi_1 : \Gamma \to M$ e $\pi_2 : \Gamma \to G$ sono diffeomorfismi locali e perciò Γ è il grafico di un diffeomorfismo f da U in un intorno di a in G. Sia $\tilde{f} : U \to M \times G$ tale che $\tilde{f}(q) = (q, f(q)) \subseteq \Gamma$. Visto che $(\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k)|_\Gamma = 0$, allora $0 = \tilde{f}^*(\bar{\theta}^k - \bar{\omega}^k) = \tilde{f}^*\pi_1^*\theta^k - \tilde{f}^*\pi_2^*\omega^k = (\pi_1 \circ \tilde{f})^*\theta^k - (\pi_2 \circ \tilde{f})^*\omega^k = \theta^k - f^*\omega^k$. □

Esercizio 10.3.4. *Mostrare che il fibrato tangente TG di G gruppo di Lie ammette struttura di gruppo di Lie.*

Esercizio 10.3.5. *Siano $X, Y \in T_eG$ tali che $[\,X,\,Y\,] = 0$. Mostrare che*

1. $\exp(sX)\exp(tY) = \exp(tY)\exp(sX)$;
2. $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$.

Indice analitico

algebra
dei tensori, 34
delle forme differenziali, 50
di Lie, 66
commutativa, 66
esterna, 45
atlante, 1
naturale, 5

bordo, 60

cambio di carta, 1
campo
tensoriale, 33
operazioni, 33
vettoriale, 9
$\chi(M)$, 9
$\chi^r(M)$, 9
$\mathscr{D}_X$, 11
completo, 11
flusso generato, 11
invariante a sinistra, 65
carta, 1
commutatore, 14
contrazione, 27
controvarianza, 4
curva
tangente, 4
curva integrale, 9
massimale, 11

delta di Kronecker, 26
derivata
di Lie, 13
su tensori, 39
direzionale, 13
esterna, 50
derivazione, 4
determinante, 47
diffeomorfismo, 3
differenziale, 5
distribuzione
k-dimensionale, 21
integrabile, 22
unidimensionale, 21
divergenza, 61
duale, 28

elementi di volume, 47
embedding, 5

fibrato
cotangente, 33
dei tensori, 33
tangente, 4
tensoriale, 31
atlante, 32
mappa, 32
vettoriale, 6
isomorfismo, 7
isomorfismo locale, 7
mappa, 7
mappa locale, 7
flusso, 11
locale, 10
forma
di volume, 57
differenziale, 33, 50
esterna, 43
formula
di Cartan, 53
di coarea, 63
funzioni coordinate, 1

gradiente, 34
grassmanniana, 2

gruppo
    di Lie, 65
        moltiplicazione, 65
    topologico, 65

identità di Jacobi, 15
immersione, 5
integrale, 59

mappa
    C^r, 3
    alternante, 43
    antisimmetrica, 43
    di transizione, 6
    esponenziale, 68
    tangente, 5
mescolamento, 44
metrica, 34
    base ortonormale, 47

nastro di Möbius, 57

operatore
    di abbassamento, 27
    di Hodge star, 49
    di innalzamento, 27
    bemolle $\flat$, 27
    diesis $\sharp$, 27
    differenziale, 37
orientazione, 47

parentesi di Lie, 14
parte interna, 60
prodotto
    interno, 27
    tensore, 25
    wedge, 44
proiezioni stereografiche, 2
pull-back
    campo tensoriale, 35
    covettore, 28
    tensore, 29
        covariante, 30
push-forward
    campo tensoriale, 35
    fibrato tensoriale, 32
    tensore, 29
        controvariante, 30
    vettore, 5

sezione
    globale, 8
    locale, 8
sfere esotiche, 2
sottogruppo ad un parametro, 68
sottovarietà, 5
spazio
    localmente euclideo, 1
    tangente, 4
spazio orientato, 47
spazio topologico
    paracompatto, 3
struttura differenziabile, 1

tensore, 25
    componenti, 26
    controvariante, 25
    covariante, 25
    metrico, 34
    simmetrico, 26
teorema
    Cauchy-Lipschitz, 9
    di Frobenius, 23
    di Gauss, 62
    di Stokes, 60
    differenziabilità del flusso, 10
    esistenza e unicità di flussi locali, 10
    mappe composte, 5
traccia, 28
trasporto, 28

varietà
    con bordo, 60
    differenziabile, 1
    integrale, 21
    orientabile, 57
    orientata, 57
    prodotto, 3