Colloquio III anno - Scuola Normale Superiore

Il teorema di Choquet e alcune sue applicazioni

Giada Franz

Relatore: Pietro Majer

18 aprile 2016

Indice

1 Spazi vettoriali topologici localmente convessi

Definizione 1.1. Uno *spazio vettoriale topologico* è uno spazio vettoriale munito di una topologia per la quale le operazioni di somma e moltiplicazione per scalare sono continue.

Definizione 1.2. Una *seminorma* su uno spazio vettoriale V è una funzione $\|\cdot\| : V \to [\,0, \infty\,)$ tale che

1. è omogenea, cioè $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. rispetta la disuguglianza triangolare, cioè $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definizione 1.3. Un sottoinsieme C di V si dice

- *assolutamente convesso* se è convesso e $\lambda C \subseteq C$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $|\lambda| \leq 1$;
- *assorbente* se $\bigcup_{\lambda>0} \lambda C = V$.

Proposizione 1.4. *Dato uno spazio vettoriale topologico V sono equivalenti:*

1. *l'origine di V ammette una base di intorni assorbenti assolutamente convessi;*
2. *ogni punto di V ammette una base di intorni assorbenti assolutamente convessi;*
3. *V ammette una famiglia $\{\ \|\cdot\|_i\ \}_{i\in I}$ di seminorme, per cui la topologia su V è la meno fine che rende tutte le funzioni $x \mapsto \|x - y\|_{i\in I}$ continue, al variare di $y \in V$ ed $i \in I$.*

Dimostrazione. **1 $\Longrightarrow$ 2** Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una base di intorni assorbenti assolutamente convessi dell'origine e sia $x \in V$, allora $\{U_i + x\}_{i\in I}$ è una base di intorni assorbenti assolutamente convessi di x, dove abbiamo sfruttato che V è uno spazio vettoriale topologico.

2 $\Longrightarrow$ 1 Ovvio.

1 $\Longrightarrow$ 3 Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una base di intorni assorbenti assolutamente convessi. Per ogni $i \in I$, consideriamo il *funzionale di Minkowski* associato all'insieme U_i, definito come $\|x\|_i = \inf\{\lambda > 0\ :\ x \in \lambda U_i\}$, e mostriamo che è una seminorma. Poiché gli intorni U_i sono assorbenti, $\|\cdot\|_i$ è una funzione da V a valori in $[\,0, \infty\,)$; inoltre:

1. $\|\cdot\|_i$ è omogenea, infatti

$$\|\lambda x\|_i = \inf\{\alpha > 0\ :\ \lambda x \in \alpha U_i\} = \inf\left\{\alpha > 0\ :\ x \in \frac{\alpha}{|\lambda|} U_i\right\} = |\lambda|\|x\|_i\,,$$

dove abbiamo utilizzato che $\frac{\alpha}{\lambda} U_i = \frac{\alpha}{|\lambda|} U_i$ poiché U_i è assolutamente convesso;

2. $\|\cdot\|_i$ rispetta la triangolare, infatti

$$\begin{aligned}\|x\|_i + \|y\|_i = \inf\{\alpha > 0\ :\ x \in \alpha U_i\} + \inf\{\beta > 0\ :\ y \in \beta U_i\} \geq \\ \geq \inf\{\gamma > 0\ :\ x + y \in \gamma U_i\} = \|x + y\|_i\,.\end{aligned}$$

Infine la topologia su V è la meno fine che rende tutte le funzioni $x \mapsto \|x - y\|_{i\in I}$ continue, infatti la controimmagine di $[\,0, 1\,)$ tramite la funzione $x \mapsto \|x\|_i$ è proprio U_i.

3 $\Longrightarrow$ 1 Data la famiglia $\|\cdot\|_i$ di seminorme, consideriamo gli intorni dell'origine $U_{i_1,\ldots,i_n,\varepsilon} = \{x \in V\ :\ p_{i_1}(x) < \varepsilon, \ldots, p_{i_n}(x) < \varepsilon\}$ al variare di $i_1, \ldots, i_n \in I$ e $\varepsilon > 0$, che risultano facilmente assolutamente convessi e assorbenti.

□

Definizione 1.5. Diciamo che V è uno *spazio localmente convesso* se è uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff e vale una delle proprietà equivalenti della Proposizione 1.4.

2 Teorema di Hahn-Banach

Definizione 2.1. Dato uno spazio vettoriale V, una funzione $p : V \to \mathbb{R}$ si dice *sublineare* se

1. è positivamente omogenea, cioè $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ per ogni $x \in V$ e $\lambda \geq 0$ reale;

2. è subadditiva, cioè $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Teorema 2.2 (Hahn-Banach)**.** *Sia V uno spazio vettoriale e $p : V \to \mathbb{R}$ una funzione sublineare. Siano inoltre U un sottospazio lineare di V e $\varphi : U \to \mathbb{R}$ una funzione lineare dominata da p, cioè tale che $\varphi(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in U$. Allora esiste una funzione lineare $\psi : V \to \mathbb{R}$ tale che coincide con φ su U ed è dominata da p su tutto V.*

Teorema 2.3 (Hahn-Banach, forma geometrica)**.** *Sia V uno spazio localmente convesso, sia C un sottoinsieme convesso chiuso di V e sia $x \in V \setminus C$. Allora esiste $f : V \to \mathbb{R}$ funzionale lineare continuo e non nullo tale che separa C e x, cioè esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(y) < a < f(x)$ per ogni $y \in C$.*

Corollario 2.4. *Sia V uno spazio localmente convesso, allora V^* separa i punti, cioè per ogni $x, y \in V$ esiste f funzionale lineare continuo tale che $f(x) \neq f(y)$.*

3 Inviluppo concavo

Sia X un sottoinsieme chiuso di uno spazio localmente convesso V. Indichiamo con A l'insieme delle funzioni affini continue su X, che quindi in particolare è un sottoinsieme di $C(X)$.

Definizione 3.1. Data una funzione limitata $f : X \to \mathbb{R}$ definiamo il suo *inviluppo concavo* come $\bar{f}(x) = \inf\{h(x) \ : \ h \in A, h \geq f\}$ per ogni $x \in X$.

Lemma 3.2. *Se f è concava e semicontinua superiore, allora $f = \bar{f}$.*

Dimostrazione. Ci basta mostrare che per ogni $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $h \in A$ tale che $h \geq f$ e $h(x) \leq f(x) + \varepsilon$. Consideriamo $C = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \ : \ f(x) \geq t\} \subseteq V \times \mathbb{R}$ il sottografico di f, allora C è un convesso chiuso perché f è concava e semicontinua superiore. Allora, per il Teorema 2.3 (Hahn-Banach, forma geometrica), esiste una funzionale lineare continuo $L : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che $L(y, t) < a < L(x, f(x) + \varepsilon)$ per ogni $(y, t) \in C$. Consideriamo quindi la funzione $h : V \to \mathbb{R}$ tale che $h(y)$ è l'unico elemento di $\mathbb{R}$ tale che $L(y, h(y)) = a$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Risulta facilmente che h è affine, maggiore o uguale ad f e $h(x) < f(x) + \varepsilon$. □

Proposizione 3.3. *Date $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitate, valgono le seguenti proprietà:*

1. *$\bar{f}$ è concava, limitata e semicontinua superiore;*

2. *$f \leq \bar{f}$;*

3. *$\overline{f + g} \leq \bar{f} + \bar{g}$;*

4. *$\overline{\lambda f} = \lambda \bar{f}$ per $\lambda > 0$.*

Dimostrazione. **1.** Innanzitutto $\bar{f}$ è ovviamente limitata, poiché è maggiorata dalla costante che maggiora f che è ovviamente una funzione affine. Inoltre è concava perché inf di funzioni concave (in particolare affini). Mostriamo infine che $\bar{f}$ è semicontinua superiore. Ricordiamo che una funzione è semicontinua superiore se e solo se il suo sottografico è chiuso. Nel nostro caso il sottografico di $\bar{f}$ equivale a

$$\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \ : \ \bar{f}(x) \geq t\} = \bigcap_{h \geq f \text{ affine}} \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \ : \ h(x) \geq t\},$$

quindi è intersezione di chiusi (i sottografici delle funzioni affini) e quindi è chiuso come voluto.

2. Ovvio per la definizione di $\bar{f}$.

3. Per il Lemma 3.2 ci basta mostrare che $\bar{f} + \bar{g}$ è concava è semicontinua superiore, ma questo è ovvio perché somma di due funzioni concave e semicontinue superiori.

4. Come nel punto precedente, basta osservare che $\lambda\bar{f}$ è concava e semicontinua superiore.

□

4 Prerequisiti di topologia e teoria della misura

Proposizione 4.1. *Sia X uno spazio topologico compatto metrizzabile, allora $C(X)$ è separabile con la norma del sup.*

Dimostrazione. Diamo un cenno della dimostrazione. L'insieme delle funzioni k-lipschitziane (cioè con costante di Lipschitz minore o uguale a k) su X è un compatto in $C(X)$ per il teorema di Ascoli-Arzelà, quindi è separabile (perché $C(X)$ è metrizzabile).

Perciò l'insieme di tutte le funzioni lipschitziane su X è separabile, perché unione numerabile di separabili (le funzioni k-lipschitziane con k naturale). D'altra parte le funzioni lipschitziane sono dense in $C(X)$, che quindi è anch'esso separabile. □

Lemma 4.2. *Sia X uno spazio topologico separabile metrizzabile, allora ogni suo sottoinsieme $Y \subseteq X$ è separabile.*

Dimostrazione. Visto che X è separabile e metrizzabile, allora è a base numerabile. La proprietà di essere a base numerabile viene però ereditata dai sottoinsiemi, quindi Y è a base numerabile, che però implica la separabilità. □

Definizione 4.3. Dato $(X, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile, diciamo che una misura μ su tale spazio è *supportata* dall'insieme misurabile S se $\mu(X \setminus S) = 0$.

Teorema 4.4 (Riesz-Markov)**.** *Sia X uno spazio topologico localmente compatto e sia ψ un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Allora esiste una misura μ di Borel su X tale che*

$$\psi(g) = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

per ogni $g \in C_c(C)$.

5 Teorema di Choquet

Definizione 5.1. Dato un insieme convesso X, diciamo che $x \in X$ è un *punto estremale* di X se non è strettamente contenuto in nessun segmento interno a X, cioè se $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ con $y, z \in X$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ reale allora $x = y = z$.

Esempio. Facciamo alcuni esempi di convessi e relativi punti estremali.

Convesso	**Punti estremali**
Poligono convesso (con bordo) sul piano	Vertici del poligono
Misure di probabilità su $(Y, \mathcal{F})$	Misure δ
Misure scambiabili su $Y^{\mathbb{N}}$, cioè invarianti per permutazioni finite degli indici	Misure prodotto su $Y^{\mathbb{N}}$
Misure μ di probabilità T-invarianti su Y (cioè $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ per ogni A boreliano), con Y spazio metrico compatto e $T : Y \to Y$ omeomorfismo	Misure μ T-ergodiche (cioè se $A = T^{-1}A$ μ-q.o., allora $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$)
Matrici bistocastiche	Matrici di permutazione

Teorema 5.2 (Choquet)**.** *Sia X un sottoinsieme convesso compatto metrizzabile di uno spazio localmente convesso V e sia $x_0 \in X$. Allora esiste una misura di probabilità μ su X che rappresenta x_0 ed è supportata dai punti estremali di X.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 4.1 e al Lemma 4.2 otteniamo direttamente che l'insieme delle affini $A \subseteq C(X)$ è separabile. In particolare quindi anche la sfera unitaria di A è separabile e scegliamone un denso numerabile $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Notiamo fin da ora che $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ separa i punti di X, il che è un'immediata conseguenza del fatto che A separa i punti per la Corollario 2.4.

Definiamo ora la funzione $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} h_n^2$, che è ben definita e continua perché la serie converge assolutamente. Inoltre f è strettamente convessa; è infatti convessa perché somma delle h_n^2 che sono convesse e dati $x \neq y$ esiste n tale che $h_n(x) \neq h_n(y)$, quindi h_n^2 è strettamente convessa nel segmento $[\,x, y\,]$ e di conseguenza anche f.

Consideriamo il funzionale $p : C(X) \to \mathbb{R}$ definito da $p(g) = \bar{g}(x_0)$, che per le proprietà dell'inviluppo concavo dimostrate nella Proposizione 3.3 risulta sublineare.

Sia quindi $B := A + \mathbb{R}f$ il sottospazio di $C(X)$ generato da A ed f e definiamo il funzionale lineare $\varphi : B \to \mathbb{R}$ dato da $\varphi(h + rf) = h(x_0) + r\bar{f}(x_0)$. Notiamo innanzitutto che per $r \geq 0$ si ha $\varphi(h + rf) = h(x_0) + r\bar{f}(x_0) = \overline{h(x_0) + rf(x_0)} = p(h + rf)$. Se invece $r < 0$ abbiamo $\overline{h + rf} \geq h + rf \geq h + r\bar{f}$, perché $\bar{f} \geq f$ e quindi $rf \geq r\bar{f}$. Abbiamo perciò che φ è dominato dalla funzione sublineare p, quindi per il Teorema 2.2 (Hahn-Banach) esiste un'estensione lineare $\psi : C(X) \to \mathbb{R}$ di φ ancora dominata da p.

Se $g \in C(X)$ con $g \leq 0$, si ha $\psi(g) \leq p(g) = \bar{g}(x_0) \leq 0$, perciò ψ è non positiva sulle funzioni non positive e di conseguenza è continua. Per il Teorema 4.4 (Riesz-Markov) esiste quindi una misura di Borel μ su X tale che $\mu(g) = \int_X g \,\mathrm{d}\mu = \psi(g)$ per ogni $g \in C(X)$. In particolare $\mu(X) = \int_X 1 \,\mathrm{d}\mu = \psi(1) = 1$, perciò μ è una misura di probabilità su X. Osserviamo inoltre che μ rappresenta x_0, infatti data $h \in A$ abbiamo $\mu(h) = \int_X h \,\mathrm{d}\mu = \varphi(h) = h(x_0)$. Ci manca dunque da mostrare solo che μ è supportata dai punti estremali di X.

Naturalmente $f \leq \bar{f}$, quindi $\mu(f) \leq \mu(\bar{f})$. Inoltre per $h \in A$ con $h \geq f$ si ha $h(x_0) = \mu(h) \geq \mu(\bar{f})$ e perciò, per definizione di inviluppo, abbiamo $\mu(f) = \varphi(f) = \bar{f}(x_0) \geq \mu(\bar{f})$. Di conseguenza $\mu(f) = \mu(\bar{f})$, da cui segue che μ è supportata dall'insieme $E = \{x \,:\, f(x) = \bar{f}(x)\}$. Per concludere, mostriamo ora che E è contenuto nell'insieme dei punti estremali di X. Sia $x \in X$ non estremale, allora esistono $y, z \in X$ distinti tali che $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ e perciò per la stretta convessità di f e la concavità di $\bar{f}$ si ha $f(x) < \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(z) \leq \frac{1}{2}\bar{f}(y) + \frac{1}{2}\bar{f}(z) \leq \bar{f}(x)$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

6 Applicazioni

Proposizione 6.1. *Sia Y un sottoinsieme compatto metrizzabile di uno spazio localmente convesso V. Allora $x \in E$ appartiene all'inviluppo convesso chiuso X di Y se e solo se esiste una probabilità μ su Y che rappresenta x.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Supponiamo che x sia rappresentata da una misura μ su Y. Allora per ogni $f \in V^*$, vale $f(x) = \mu(f) \leq \sup_{y \in Y} f(y) \leq \sup_{y \in X} f(y)$. Allora x deve necessariamente appartenere a X, perché altrimenti si avrebbe un assurdo per il Teorema 2.3 (Hahn-Banach, forma geometrica).

($\Rightarrow$) Supponiamo che x appartenga a X, allora esiste una successione $x_k = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k x_i^k$ che converge a x, con $x_i^k \in Y$ e $\lambda_i^k \geq 0$ per $i = 1, \ldots, n_k$ e con $\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k = 1$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Ovviamente x_k è rappresentato dalla misura di probabilità $\mu_k := \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \delta(x_i^k)$ su Y. Per il teorema di Prokhorov esiste una sottosuccessione delle μ_k che converge debolmente ad una probabilità μ su Y, che rappresenta x per definizione di convergenza debole.

□

Grazie a quest'ultima proposizione, notiamo che in particolare dal Teorema 5.2 (Choquet) segue ovviamente il teorema di Krein-Milman, enunciato di seguito, nel caso metrizzabile.

Teorema 6.2 (Krein-Milman)**.** *Sia X un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio vettoriale topologico localmente convesso V. Allora X è l'inviluppo convesso chiuso dei suoi punti estremali.*

Elenchiamo ora alcuni esempi di convessi con relativi punti estremali ed eventuali applicazioni del teorema di Choquet.

Spazio delle probabilità

Consideriamo come spazio X l'insieme delle misure di probabilità su uno spazio misurabile $(Y, \mathcal{F})$. Questo ha punti estremali le misure δ di Dirac. Aggiungendo l'ipotesi di compattezza di Y, X risulta uno spazio compatto e metrizzabile con la topologia debole e in questo caso il Teorema 5.2 (Choquet) ci dice semplicemente che possiamo rappresentare le misure tramite loro stesse (le misure δ sono in corrispondenza con lo spazio stesso).

Misure ergodiche

Richiamiamo l'esempio fatto in precedenza, in cui consideravamo come convesso lo spazio $X = \{\text{misure di probabilità } T\text{-invarianti su } Y\}$, con Y spazio metrico compatto e $T : Y \to Y$ omeomorfismo. Lo spazio X risulta un convesso compatto con la topologia debole* e come detto si dimostra che ha come punti estremali le misure T-ergodiche.

In questo caso il Teorema 5.2 (Choquet), sotto la forma del Teorema 6.2 (Krein-Milman), ci dà quindi l'esistenza di misure ergodiche (una volta verificato che quantomeno esistano misure T-invarianti).

Problema dei momenti

Denotiamo con $S : l^\infty \to l^\infty$ l'operatore di shift, cioè $(Sa)(k) = a(k+1)$ per ogni $a \in l^\infty$ e $k \in \mathbb{N}$, e con I l'intervallo $[0, 1]$.

Definizione 6.3. Diciamo che una successione $m : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è *completamente monotona* se $(1 - S)^n m(k) \geq 0$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}$.

Nota 6.4. In particolare ogni successione m completamente monotona sta in l^∞, poiché è debolmente decrescente visto che $(1 - S)m(k) \geq 0$ se e solo se $m(k) \geq m(k+1)$. Inoltre una successione completamente monotona ha tutti i termini positivi.

Definizione 6.5. Data μ misura su I, definiamo il momento k-esimo di μ come $m(k) = \int_I x^k \,\mathrm{d}\mu$.

Proposizione 6.6. *La successione dei momenti di una misura μ su I è completamente monotona.*

Dimostrazione. Detta m la successione dei momenti di μ, abbiamo che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ vale

$$(1-S)^n m(k) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} m(k+j) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} \int_I x^{k+j}\,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \int_I \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} x^{k+j}\,\mathrm{d}\mu = \int_I x^k (1-x)^n \,\mathrm{d}\mu \geq 0\,.$$

□

Lemma 6.7. *Sia X uno spazio di Banach, allora il suo duale X^* è localmente convesso con la topologia debole*.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ definiamo la funzione $\|\cdot\|_x : X^* \to [0, \infty)$ data da $\|f\|_x = |f(x)|$. Tale funzione è facilmente una seminorma su X^* e inoltre la topologia debole* è la meno fine che rende queste seminorme continue. Perciò, per la Proposizione 1.4, X^* è localmente convesso con la topologia debole*.

□

Teorema 6.8 (Banach-Alaoglu)**.** *Sia X uno spazio di Banach, allora la palla unitaria chiusa di X^* è compatta rispetto alla topologia debole*.*

Proposizione 6.9. *Sia X uno spazio di Banach separabile, allora la palla unitaria chiusa di X^* è anche metrizzabile rispetto alla topologia debole*.*

Nota 6.10. Lo spazio l^∞ è il duale dello spazio di Banach separabile l^1. Inoltre la norma degli operatori su l^∞ visto come duale coincide con la norma standard su l^∞. Quindi per il Teorema 6.8 (Banach-Alaoglu) e la Proposizione 6.9, si ha che la palla unitaria chiusa di l^∞ rispetto alla norma standard è compatta e metrizzabile rispetto alla topologia debole*.

Inoltre per il Lemma 6.7, l^∞ è localmente convesso con la topologia debole*, quindi è un buon spazio ambiente per applicare il Teorema 5.2 (Choquet).

Teorema 6.11 (Hausdorff)**.** *Data una successione completamente monotona $m \in l^\infty$, esiste μ misura su I che ha m come successione dei momenti.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che a meno di riscalamenti ci basta dimostrare l'enunciato per le successioni completamente monotone con $m(0) = 1$. Chiamiamo $B = \{a \in l^\infty \ : \ \|a\|_\infty \leq 1\}$ la palla unitaria chiusa di l^∞ che sappiamo essere compatta e metrizzabile rispetto alla topologia debole* per la Nota 6.10. Consideriamo inoltre $X = \{m \in l^\infty \ : \ m \text{ completamente monotona}, \|m\|_\infty = m(0) = 1\} \subseteq B$. In particolare

$$X = B \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (1-S)^{-n} l^\infty_+\,,$$

dove $l^\infty_+ = \{a \in l^\infty \ : \ a(k) \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$ è un chiuso in l^∞ con la topologia debole e $(1-S)^n : l^\infty \to l^\infty$ è continua rispetto alla topologia debole. Perciò X è intersezione di chiusi e quindi è un chiuso in B, di conseguenza è anch'esso compatto e metrizzabile. Inoltre risulta che X è anche convesso molto facilmente e cerchiamone dunque i punti estremali.

Sia m un punto estremale di X e consideriamo $v = \lambda m - Sm$ con $\lambda = m(1)$, per cui in particolare vale $0 \leq \lambda \leq 1$. Vediamo che $m+v$ ed $m-v$ sono ancora completamente monotone:

- $(1-S)^n(m+v)(k) = (1-S)^n[(1-S)m + \lambda m](k) = (1-S)^{n+1}m(k) + \lambda(1-S)^n m(k) \geq 0$, quindi $m+v$ è completamente monotona;

- $(1-S)^n(m-v)(k) = (1-S)^n[(1-\lambda)m+Sm](k) = (1-\lambda)(1-S)^n m(k)+(1-S)^n m(k+1) \geq 0$, quindi anche $m-v$ è completamente monotona.

Inoltre $m+v$ ed $m-v$ appartengono ancora ad X, perché $v(0) = \lambda m(0)-m(1) = m(1)-m(1) = 0$ e quindi $\|m+v\|_\infty = (m+v)(0) = m(0)$ e analogamente per $m-v$.

Perciò abbiamo scritto $m = \frac{1}{2}[(m+v)+(m-v)]$ con $m+v, m-v \in X$, quindi se m è punto estremale di X deve valere $m = m+v = m-v$. Di conseguenza otteniamo $\lambda m - Sm = v = 0$, cioè $m = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Abbiamo quindi ottenuto che i punti estremali di X sono contenuti nell'insieme $E = \{(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq l^\infty$, che è facilmente omeomorfo all'intervallo $I = [0, 1]$. Infatti la funzione $E \to I$ tale che $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lambda$ è una bigezione fra compatti ed è continua perché equivale alla valutazione per $n = 1$, quindi è un omeomorfismo.

Inoltre per quanto detto e per la Nota 6.10, abbiamo tutte le ipotesi necessaria per applicare il Teorema 5.2 (Choquet). Otteniamo quindi che dato $m \in X$ esiste una misura di probabilità μ che rappresenta m e supportata dai punti di E e che possiamo quindi pensare come una misura di probabilità su I. Consideriamo quindi il funzionale lineare continuo $\pi_k : l^\infty \to \mathbb{R}$ tale che $\pi_k(a) = a(k)$. Visto che μ rappresenta m, si ha che

$$m(k) = \pi_k(m) = \int_I \pi_k((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})\,\mathrm{d}\mu(\lambda) = \int_I \lambda^k\,\mathrm{d}\mu(\lambda)\,,$$

che è proprio il momento k-esimo della misura μ e abbiamo quindi ottenuto che μ ha come successione dei momenti proprio m. □

Lo spazio $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ non è un duale

Vogliamo sfruttare il Teorema 5.2 (Choquet) per mostrare che $c_0 = \{a \in l^\infty \ : \ a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$ con la norma infinito $\|\cdot\|_\infty$ di l^∞ non è isomorfo come spazio di Banach al duale di un Banach.

Lemma 6.12. *Dato X uno spazio di Banach, se X^* è separabile con la norma degli operatori allora anche X è separabile.*

Teorema 6.13. *Lo spazio di Banach $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ non è isomorfo al duale di uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che sia invece il duale dello spazio di Banach X, che per il Lemma 6.12 è separabile. Allora per il Teorema 6.8 (Banach-Alaoglu) e la Proposizione 6.9, abbiamo che la palla unitaria chiusa $B = \{a \in c_0 \ : \ \|a\|_\infty \leq 1\}$ di c_0 è compatta e separabile. Quindi applicando il Teorema 5.2 (Choquet), abbiamo che B ammette almeno un punto estremale. Vediamo però che ciò non può essere possibile: sia $a \in B$, allora esiste k tale che $|a_k| \leq 1-\varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$, ma allora $a = \frac{1}{2}(b+c)$ con $b_n = c_n = a_n$ per $n \neq k$, $b_k = a_k + \varepsilon$ e $c_k = a_k - \varepsilon$.

□

Riferimenti bibliografici

[1] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Second Edition, Lectures Notes in Mathematics **1757** (2001), Springer.

[2] W. Parry, *Topics in Ergodic Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics **75** (2004).

[3] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152** (1995), Springer.

[4] E. Hewitt, L. J. Savage, *Symmetric Measures on Cartesian Products*, Trans. of the AMS **80** (1955), pp. 470-501.

[5] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Graduate Texts in Mathematics **118** (1989), Springer-Verlag.