Il quarto problema di Hilbert sul piano

Giada Franz

Relatore: Pietro Majer

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

11 marzo 2016

Il problema

Il quarto dei 23 problemi proposti dal Hilbert nel 1900:
Il problema delle rette come percorso più breve fra due punti.

Il problema

Il quarto dei 23 problemi proposti dal Hilbert nel 1900:
Il problema delle rette come percorso più breve fra due punti.

- Fondamenti della geometria

Il problema

Il quarto dei 23 problemi proposti dal Hilbert nel 1900:
Il problema delle rette come percorso più breve fra due punti.

- Fondamenti della geometria
- Enunciato vago

Il problema

Il quarto dei 23 problemi proposti dal Hilbert nel 1900:
Il problema delle rette come percorso più breve fra due punti.

- Fondamenti della geometria
- Enunciato vago
- Varie interpretazioni

Quello che faremo

Quello che faremo

1. Daremo un'interpretazione del problema

Quello che faremo

1. Daremo un'interpretazione del problema
2. Vedremo le motivazioni che portano alla soluzione

Quello che faremo

1. Daremo un'interpretazione del problema
2. Vedremo le motivazioni che portano alla soluzione
3. Accenneremo alla dimostrazione di Alexander

Notazioni

$\overline{xy}$ = segmento che collega x e y,
per $x, y \in \mathbb{R}^2$.

$[A]$ = insieme delle rette del piano che intersecano A,
dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definizioni

Geodetica

Definizione (Geodetica)

Siano (X, d) uno spazio metrico e $\gamma : [\,a,\, b\,] \to X$ una curva continua fra due punti x, y. Diciamo che γ è una geodetica se $l(\gamma) = d(x, y)$.

Definizioni

Geodetica

Definizione (Geodetica)

Siano (X, d) uno spazio metrico e $\gamma : [\,a,\, b\,] \to X$ una curva continua fra due punti x, y. Diciamo che γ è una geodetica se $l(\gamma) = d(x, y)$.

Osservazione

La nostra definizione di geodetica è quindi globale, non locale.

Definizioni

Distanza proiettiva

Possiamo introdurre la nostra nozione di "geometria per cui le rette sono il percorso più breve fra due punti".

Definizioni

Distanza proiettiva

Possiamo introdurre la nostra nozione di "geometria per cui le rette sono il percorso più breve fra due punti".

Definizione (Distanza proiettiva)

Una distanza d su $\mathbb{R}^2$ è detta proiettiva se per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ il segmento che li collega è una geodetica.

Enunciato del quarto problema di Hilbert

Costruire e studiare tutte le distanze proiettive sul piano continue rispetto alla metrica standard.

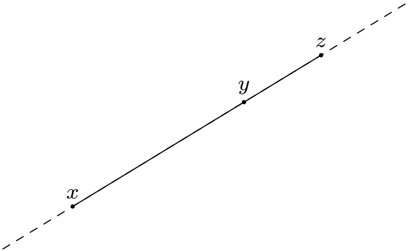
Proprietà

Equivalenza

Proposizione

Una distanza d su $\mathbb{R}^2$ è proiettiva se e solo se per ogni tripla di punti x, y, z allineati e tali che y è compreso fra x e z vale che

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)\,.$$



Proprietà

Continuità

Proposizione

Una distanza d proiettiva su $\mathbb{R}^2$ è continua come funzione rispetto alla metrica standard se e solo se induce la topologia euclidea.

Esempi

Tutte le distanze a noi familiari risultano essere proiettive e continue:

- distanza euclidea;
- in generale distanze indotte dalle p-norme;
- distanza indotta dalla norma infinito.

Obiettivo

Studiare lo spazio delle rette sul piano.

Mettere in corrispondenza la “misura” delle rette che intersecano un segmento e la lunghezza del segmento stesso.

Topologia sullo spazio delle rette

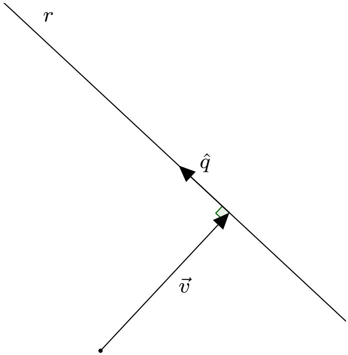
Parametrizzazione delle rette

Consideriamo innanzitutto rette orientate per avere una maggiore simmetria.

Una retta orientata r è identificata univocamente da:

- direzione $\hat{q}$;
- vettore $\vec{v}$ che rappresenta il punto della retta più vicino all'origine.

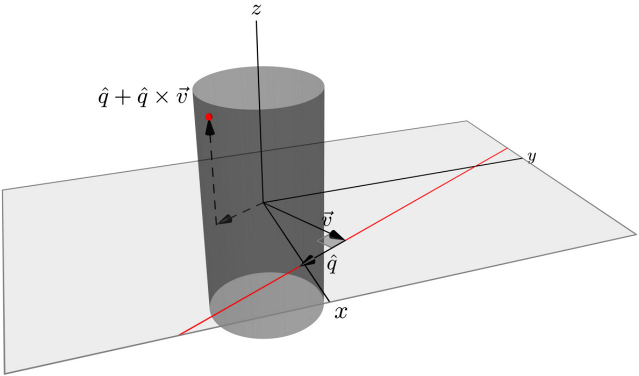
Con questa notazione la retta è parametrizzata da $\vec{v} + t\hat{q}$ per $t \in \mathbb{R}$.



Topologia sullo spazio delle rette

Corrispondenza con il cilindro

Mettiamo quindi in corrispondenza la retta r parametrizzata da $\vec{v} + t\hat{q}$ per $t \in \mathbb{R}$ con il punto $\hat{q} + \hat{q} \times \vec{v}$.

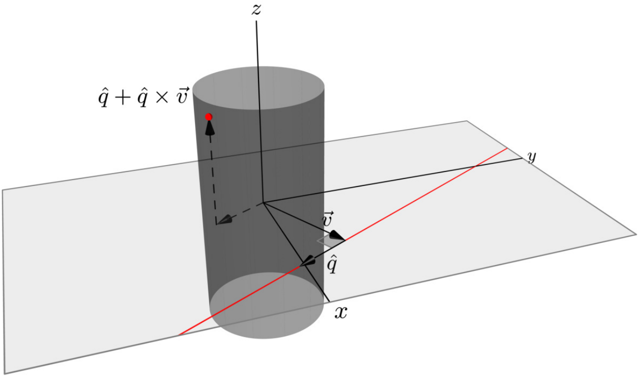


Topologia sullo spazio delle rette

Corrispondenza con il cilindro

Mettiamo quindi in corrispondenza la retta r parametrizzata da $\vec{v} + t\hat{q}$ per $t \in \mathbb{R}$ con il punto $\hat{q} + \hat{q} \times \vec{v}$.

Questa risulta essere una corrispondenza biunivoca.



Topologia e misura sulle rette del piano

Topologia sul cilindro

Topologia e misura sulle rette del piano

Topologia sul cilindro

$\downarrow$

Topologia sull'insieme delle rette orientate

corrispondenza fra rette orientate e punti del cilindro

Topologia e misura sulle rette del piano

Topologia sul cilindro

$\downarrow$

corrispondenza fra rette orientate e punti del cilindro

Topologia sull'insieme delle rette orientate

insieme delle rette come quoziente topologico delle rette orientate (due rette sono identificate se sono uguali a meno del verso)

$\downarrow$

Topologia sull'insieme delle rette
(chiamiamo lo spazio topologico delle rette $\mathcal{G}$)

Topologia e misura sulle rette del piano

Topologia sul cilindro

$\downarrow$

corrispondenza fra rette orientate e punti del cilindro

Topologia sull'insieme delle rette orientate

$\downarrow$

insieme delle rette come quoziente topologico delle rette orientate (due rette sono identificate se sono uguali a meno del verso)

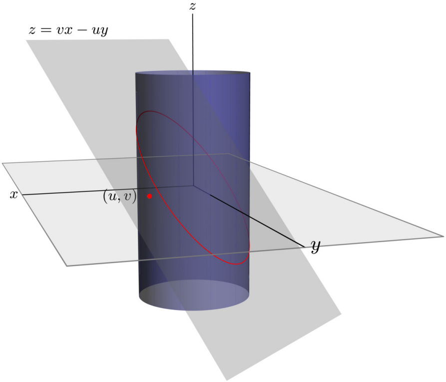
Topologia sull'insieme delle rette
(chiamiamo lo spazio topologico delle rette $\mathcal{G}$)

Analogamente:

misura superficiale sul cilindro $\rightarrow$ misura σ sui boreliani di $\mathcal{G}$

Visualizzazione della corrispondenza

Rette che passano per un punto

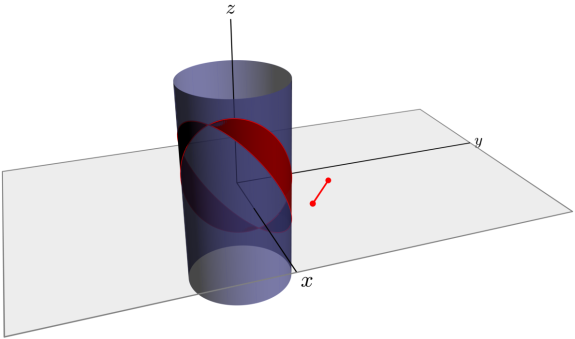


Si verifica facilmente che le rette orientate che passano per il punto di coordinate (u, v) corrrisponde all'intersezione fra il cilindro e il piano di equazione $z = vx - uy$.

Visualizzazione della corrispondenza

Rette che intersecano un segmento

L'insieme delle rette che intersecano un segmento sarà quindi l'unione delle rette che passano per ogni punto del segmento, che risulta facilmente essere la porzione di cilindro compresa fra le due ellissi corrispondenti alle rette che passano per i due punti estremali.



Formula di Crofton

Caso del segmento

La misura σ dell'insieme delle rette che intersecano un segmento è uguale a 2 volte la lunghezza del segmento stesso.
Detta d la distanza euclidea, si ha cioè che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$, vale

$$d(x,y) = \frac{1}{2}\sigma([\overline{xy}])\,.$$

Formula di Crofton

Caso del segmento

La misura σ dell'insieme delle rette che intersecano un segmento è uguale a 2 volte la lunghezza del segmento stesso.
Detta d la distanza euclidea, si ha cioè che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$, vale

$$d(x,y) = \frac{1}{2}\sigma([\overline{xy}])\,.$$

Osservazione

Questo implica che la distanza standard su $\mathbb{R}^2$ è proiettiva, infatti

$$d(x,y) + d(y,z) = \frac{1}{2}\sigma([\overline{xy}]) + \frac{1}{2}\sigma([\overline{yz}]) \underset{\substack{\uparrow \\ [\overline{xy}] \cup [\overline{yz}] = [\overline{xz}]}}{=} \frac{1}{2}\sigma([\overline{xz}]) = d(x,z)$$

Costruzione di Busemann

Idea:
Definire la distanza a posteriori, rimpiazzando la misura σ con un'altra misura μ, cioè porre

$$d(x,y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}])\,,$$

con l'obiettivo di ottenere un'altra distanza proiettiva su $\mathbb{R}^2$.

Costruzione di Busemann

Idea:
Definire la distanza a posteriori, rimpiazzando la misura σ con un'altra misura μ, cioè porre

$$d(x,y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}])\,,$$

con l'obiettivo di ottenere un'altra distanza proiettiva su $\mathbb{R}^2$.

Quali ipotesi deve rispettare μ?

Costruzione di Busemann

Idea:
Definire la distanza a posteriori, rimpiazzando la misura σ con un'altra misura μ, cioè porre

$$d(x, y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}])\,,$$

con l'obiettivo di ottenere un'altra distanza proiettiva su $\mathbb{R}^2$.

Quali ipotesi deve rispettare μ?

valori finiti per d $\quad\rightarrow\quad$ μ di Radon

Costruzione di Busemann

Idea:
Definire la distanza a posteriori, rimpiazzando la misura σ con un'altra misura μ, cioè porre

$$d(x,y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}])\,,$$

con l'obiettivo di ottenere un'altra distanza proiettiva su $\mathbb{R}^2$.

Quali ipotesi deve rispettare μ?

valori finiti per d	$\rightarrow$	μ di Radon
buona definizione, proiettività, continuità	$\rightarrow$	μ nulla sui fasci di rette per un punto

Costruzione di Busemann

Idea:
Definire la distanza a posteriori, rimpiazzando la misura σ con un'altra misura μ, cioè porre

$$d(x, y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}])\,,$$

con l'obiettivo di ottenere un'altra distanza proiettiva su $\mathbb{R}^2$.

Quali ipotesi deve rispettare μ?

valori finiti per d	$\rightarrow$	μ di Radon
buona definizione, proiettività, continuità	$\rightarrow$	μ nulla sui fasci di rette per un punto
buona definizione	$\rightarrow$	$\mu([\overline{xy}]) > 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ distinti

Enunciato preciso

Teorema

Esiste una corrispondenza fra le distanze proiettive e continue su $\mathbb{R}^2$ *e le misure di Radon su* $\mathcal{G}$ *nulle sui fasci di rette per un punto e strettamente positive sugli insiemi* $[\overline{xy}]$ *con* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *punti distinti.*

Enunciato preciso

Leggera semplificazione

Semplifichiamo leggermente l'enunciato togliendo l'ipotesi di positività.

Teorema

Esiste una corrispondenza fra le distanze proiettive e continue su $\mathbb{R}^2$ *e le misure di Radon su* $\mathcal{G}$ *nulle sui fasci di rette per un punto e strettamente positive sugli insiemi* $[\overline{xy}]$ *con* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *punti distinti.*

Enunciato preciso

Leggera semplificazione

Semplifichiamo leggermente l'enunciato togliendo l'ipotesi di positività.

Teorema

Esiste una corrispondenza fra le distanze proiettive e continue su $\mathbb{R}^2$ e le misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto ~~e strettamente positive sugli insiemi $[\overline{xy}]$ con $x, y \in \mathbb{R}^2$ punti distinti~~.

Enunciato preciso

Leggera semplificazione

Semplifichiamo leggermente l'enunciato togliendo l'ipotesi di positività.

Teorema

Esiste una corrispondenza fra le pseudo-distanze proiettive e continue su $\mathbb{R}^2$ e le misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto ~~e strettamente positive sugli insiemi $[\overline{xy}]$ con $x, y \in \mathbb{R}^2$ punti distinti~~.

Enunciato preciso

Leggera semplificazione

Semplifichiamo leggermente l'enunciato togliendo l'ipotesi di positività.

Teorema

Esiste una corrispondenza fra le pseudo-distanze proiettive e continue su $\mathbb{R}^2$ e le misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto ~~e strettamente positive sugli insiemi~~ $\cancel{[\overline{xy}]}$ ~~con~~ $\cancel{x, y \in \mathbb{R}^2}$ ~~punti distinti~~.

pseudo-distanze proiettive e continue sul piano $\quad \leftrightsquigarrow \quad$ misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto

$$d(x,y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}])$$

Dalla misura alla distanza

Implicazione facile

pseudo-distanze proiettive e continue sul piano	$\leftsquigarrow$	misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto

Dalla misura alla distanza

Implicazione facile

pseudo-distanze proiettive e continue sul piano	$\leftsquigarrow$	misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto

Data una misura μ di Radon su $\mathcal{G}$ nulla sui fasci di rette per un punto, è facile verificare che la funzione definita da

$$d(x, y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}])$$

è una pseudo-distanza proiettiva e continua come funzione.

Dalla distanza alla misura

Linea dimostrativa

pseudo-distanze proiettive e continue sul piano $\rightsquigarrow$ misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto

Dalla distanza alla misura

Linea dimostrativa

pseudo-distanze proiettive e continue sul piano	$\rightsquigarrow$	misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto

Passaggio delicato della dimostrazione, che affronteremo attraverso i seguenti passi:

Dalla distanza alla misura

Linea dimostrativa

pseudo-distanze proiettive e continue sul piano $\rightsquigarrow$ misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto

Passaggio delicato della dimostrazione, che affronteremo attraverso i seguenti passi:

1. costruire una misura μ_C su $[C]$, per ogni $C \subseteq \mathbb{R}^2$ poligono convesso chiuso;

Dalla distanza alla misura

Linea dimostrativa

pseudo-distanze proiettive e continue sul piano	$\rightsquigarrow$	misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto

Passaggio delicato della dimostrazione, che affronteremo attraverso i seguenti passi:

1. costruire una misura μ_C su $[C]$, per ogni $C \subseteq \mathbb{R}^2$ poligono convesso chiuso;
2. verificare che μ_C rispetti le ipotesi richieste (nulla sui fasci, genera d, unica);

Dalla distanza alla misura

Linea dimostrativa

pseudo-distanze proiettive e continue sul piano	$\rightsquigarrow$	misure di Radon su $\mathcal{G}$ nulle sui fasci di rette per un punto

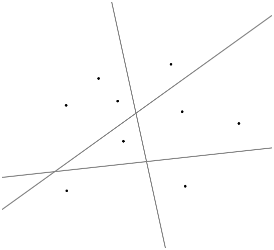
Passaggio delicato della dimostrazione, che affronteremo attraverso i seguenti passi:

1. costruire una misura μ_C su $[C]$, per ogni $C \subseteq \mathbb{R}^2$ poligono convesso chiuso;
2. verificare che μ_C rispetti le ipotesi richieste (nulla sui fasci, genera d, unica);
3. costruire μ su tutto $\mathcal{G}$ incollando le μ_{C_n}, presa una successione crescente di poligoni convessi $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ la cui unione è tutto $\mathbb{R}^2$.

Dalla distanza alla misura

Peso di una retta

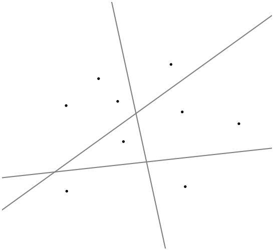
Sia Q un insieme finito di punti del piano a 3 a 3 non allineati e sia R_Q un insieme di rappresentanti delle rette che separano i punti di Q.



Dalla distanza alla misura

Peso di una retta

Sia Q un insieme finito di punti del piano a 3 a 3 non allineati e sia R_Q un insieme di rappresentanti delle rette che separano i punti di Q.

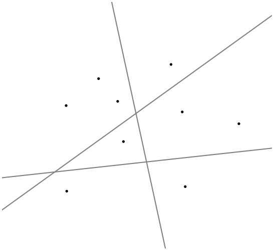


Per ogni $r \in R_Q$ esiste la scelta di un "peso" $\sigma_Q(r)$ dato ad r, tale che:

Dalla distanza alla misura

Peso di una retta

Sia Q un insieme finito di punti del piano a 3 a 3 non allineati e sia R_Q un insieme di rappresentanti delle rette che separano i punti di Q.



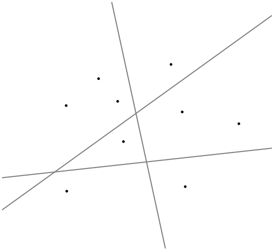
Per ogni $r \in R_Q$ esiste la scelta di un "peso" $\sigma_Q(r)$ dato ad r, tale che:

- $\sigma_Q(r) \geq 0$;

Dalla distanza alla misura

Peso di una retta

Sia Q un insieme finito di punti del piano a 3 a 3 non allineati e sia R_Q un insieme di rappresentanti delle rette che separano i punti di Q.



Per ogni $r \in R_Q$ esiste la scelta di un "peso" $\sigma_Q(r)$ dato ad r, tale che:

- $\sigma_Q(r) \geq 0$;
- $l(C) = \sum_{r \in R_Q \cap [C]} \sigma_Q(r)$, per C poligono convesso chiuso.

Dalla distanza alla misura

Costruzione di μ_C

Sia C poligono convesso chiuso e limitato e sia $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso di punti di C a 3 a 3 non allineati, che contiene i vertici di C.

Dalla distanza alla misura

Costruzione di μ_C

Sia C poligono convesso chiuso e limitato e sia $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso di punti di C a 3 a 3 non allineati, che contiene i vertici di C.
Sia $Q_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ e definiamo una misura atomica μ_n su $[C]$ come

$$\mu_n(r) := \begin{cases} \sigma_{Q_n}(r)\,, & \text{se } r \in R_{Q_n}\,; \\ 0\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Dalla distanza alla misura

Costruzione di μ_C

Sia C poligono convesso chiuso e limitato e sia $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso di punti di C a 3 a 3 non allineati, che contiene i vertici di C.
Sia $Q_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ e definiamo una misura atomica μ_n su $[C]$ come

$$\mu_n(r) := \begin{cases} \sigma_{Q_n}(r)\,, & \text{se } r \in R_{Q_n}\,; \\ 0\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Per quanto detto $\mu_n([C]) = l(C)$, quindi per il teorema di Prokhorov esiste una sottosuccessione che converge debolmente ad una misura di Radon μ_C su $[C]$ tale che $\mu_C([C]) = l(C)$.

Dalla distanza alla misura

Costruzione di μ_C

Sia C poligono convesso chiuso e limitato e sia $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso di punti di C a 3 a 3 non allineati, che contiene i vertici di C.
Sia $Q_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ e definiamo una misura atomica μ_n su $[C]$ come

$$\mu_n(r) := \begin{cases} \sigma_{Q_n}(r)\,, & \text{se } r \in R_{Q_n}\,; \\ 0\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

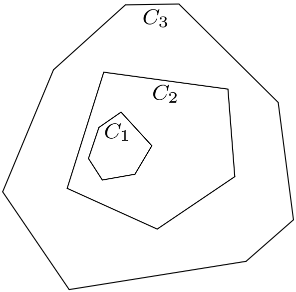
Per quanto detto $\mu_n([C]) = l(C)$, quindi per il teorema di Prokhorov esiste una sottosuccessione che converge debolmente ad una misura di Radon μ_C su $[C]$ tale che $\mu_C([C]) = l(C)$.

Grazie alle proprietà dalle μ_n e alla debole convergenza, si dimostrano tutte le proprietà cercate su μ_C.

Dalla distanza alla misura

Costruzione di μ

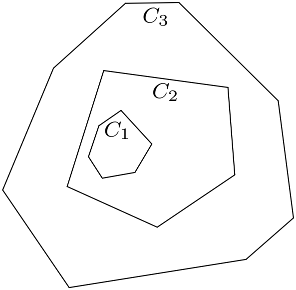
Consideriamo una successione crescente $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di poligoni convessi chiusi la cui unione è tutto $\mathbb{R}^2$.



Dalla distanza alla misura

Costruzione di μ

Consideriamo una successione crescente $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di poligoni convessi chiusi la cui unione è tutto $\mathbb{R}^2$.



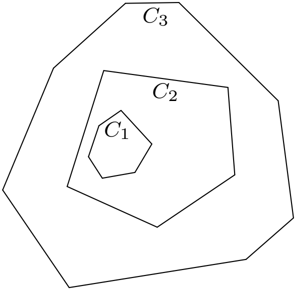
Dato A boreliano di $\mathcal{G}$, definiamo

$$\mu(A) := \lim_{n \to \infty} \mu_{C_n}(A \cap [C_n]) .$$

Dalla distanza alla misura

Costruzione di μ

Consideriamo una successione crescente $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di poligoni convessi chiusi la cui unione è tutto $\mathbb{R}^2$.



Dato A boreliano di $\mathcal{G}$, definiamo

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_{C_n}(A \cap [C_n]) .$$

A questo punto è però molto facile verificare che μ rispetta tutte le ipotesi cercate ed è unica.

Giada Franz

Dipartimento di Matematica,
Università di Pisa

11 marzo 2016