Alcune proprietà degli insiemi centrali

Giada Franz

10 giugno 2015

In questo seminario definiremo gli insiemi centrali, cioè gli insiemi che appartengono ad un ultrafiltro idempotente minimale (rispetto al $\oplus$ o al $\odot$), e ne indagheremo alcune proprietà. In particolare ci interesseremo delle relazioni fra le componenti moltiplicative e quelle additive.

Infine sfrutteremo quanto dimostrato per ottenere la debole regolarità per partizioni dell'equazione $a + b = cd$.

1 Definizioni e richiami

In questa breve sezione introduciamo le definizioni necessarie alla trattazione e ricordiamo alcuni risultati già dimostrati a lezione, che ci saranno utili nello studio degli insiemi centrali.

Teorema 1.1 (Ellis)**.** *Ogni semigruppo topologico destro compatto di Hausdorff contiene un idempotente.*

Definizione 1.2. Diciamo che un idempotente $\mathscr{U} \in (\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è *minimale* se $\mathscr{U}$ appartiene ad un ideale sinistro minimale. Indichiamo con $\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus) = \{\mathscr{U} \in (\beta\mathbb{N}, \oplus) \mid \mathscr{U}$ è idempotente minimale$\}$ l'insieme degli ultrafiltri idempotenti minimali.

Analogamente definiamo gli idempotenti minimali in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ e $\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \odot)$.

A lezione abbiamo dimostrato che, dato $(S, *)$ semigruppo topologico destro compatto di Hausdorff, si ha che

- Ogni ideale sinistro contiene un ideale sinistro minimale (applicazione di Zorn);
- Ogni ideale sinistro minimale è chiuso;
- Ogni ideale sinistro minimale contiene un idempotente (applicazione del Teorema 1.1 (Ellis)).

Abbiamo inoltre osservato che $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ e $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ sono semigruppi topologici destri compatti di Hausdorff.

Abbiamo perciò gratuitamente l'esistenza di ultrafiltri idempotenti minimali, che a priori non era scontata.

Proposizione 1.3. *Vale che un ultrafiltro $\mathscr{U}$ è minimale in $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ se e solo se per ogni $A \in \mathscr{U}$ l'insieme $A_{\mathscr{U}} = \{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in \mathscr{U}\}$ è sindetico.*

Definizione 1.4. Un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ si dice *additivamente centrale* o AC se esiste $\mathscr{U} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ tale che $A \in \mathscr{U}$.

Analogamente diciamo che un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ è *moltiplicativamente centrale* o MC se esiste $\mathscr{U} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \odot)$ tale che $A \in \mathscr{U}$.

Nota 1.5. Vale per definizione che $\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus) = K(\beta\mathbb{N}, \oplus) \cap \{$ultrafiltri idempotenti rispetto al $\oplus\}$. Perciò, per quanto già visto a lezione, abbiamo che un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ additivamente centrale è necessariamente sindetico a tratti, quindi AP-rich, e additivamente grande[1]. Quello che sappiamo infatti è che

- $\overline{K(\beta\mathbb{N}, \oplus)} = \{\mathscr{U} \in \beta\mathbb{N} \mid$ ogni $A \in \mathscr{U}$ è sindetico a tratti$\}$;
- $\overline{\{\text{idempotenti rispetto al } \oplus\}} = \{\mathscr{U} \in \beta\mathbb{N} \mid$ ogni $A \in \mathscr{U}$ è additivamente grande$\}$.

Un discorso analogo vale per gli elementi moltiplicativamente centrali, che sono perciò GP-rich e moltiplicativamente grandi.

[1] Un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ si dice additivamente grande se esiste $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $FS(X) \subseteq A$.

2 Alcune proprietà degli insiemi centrali

Qui di seguito affrontiamo alcune proprietà degli ultrafiltri minimali idempotenti e degli insiemi centrali, concentrandoci sulle relazioni che intercorrono fra struttura additiva e moltiplicativa in $\beta\mathbb{N}$.

Innanzitutto mostriamo un caso particolare della legge distributiva su $\beta\mathbb{N}$. Tale regola infatti non vale in generale, ma risulta vera nel caso in cui si distribuisca rispetto ad un ultrafiltro principale.

Proposizione 2.1. *Siano $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \beta\mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, allora vale che $\sqcup_n \odot (\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}) = (\sqcup_n \odot \mathscr{U}) \oplus (\sqcup_n \odot \mathscr{V})$*[2].

Dimostrazione. Poiché $\sqcup_n \odot (\mathscr{U} \oplus \mathscr{V})$ e $(\sqcup_n \odot \mathscr{U}) \oplus (\sqcup_n \odot \mathscr{V})$ sono entrambi ultrafiltri, ci basta dimostrare un contenimento fra i due, da cui poi discenderà l'uguaglianza. Mostriamo perciò in particolare che $\sqcup_n \odot (\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}) \subseteq (\sqcup_n \odot \mathscr{U}) \oplus (\sqcup_n \odot \mathscr{V})$.

Applicando le definizioni di somma e prodotto, abbiamo che

$$\begin{aligned} A \in \sqcup_n \odot (\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}) &\iff \{m \mid A/m \in \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}\} \in \sqcup_n \\ &\iff A/n \in \mathscr{U} \oplus \mathscr{V} \\ &\iff B = \{m \mid A/n - m \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}, \end{aligned}$$

da cui otteniamo in particolare che $nB \in \sqcup_n \odot \mathscr{U}$.

Sia ora $C = \{m \mid (A - m)/n \in \mathscr{V}\}$, allora vale che $nB \subseteq C$. Sia infatti $k = nm \in nB$, allora $A/n - m \in \mathscr{V}$, ma $A/n - m = (A - nm)/n = (A - k)/n$, quindi $(A - k)/n \in \mathscr{V}$ e di conseguenza $k \in C$. Abbiamo perciò che $C \in \sqcup_n \odot \mathscr{U}$, poiché C contiene $nB \in \sqcup_n \odot \mathscr{U}$.

Riutilizzando le definizioni di somma e prodotto e il fatto che $C \in \sqcup_n \odot \mathscr{U}$, abbiamo perciò

$$\begin{aligned} \{m \mid (A - m)/n \in \mathscr{V}\} \in \sqcup_n \odot \mathscr{U} &\iff \{m \mid A - m \in \sqcup_n \odot \mathscr{V}\} \in \sqcup_n \odot \mathscr{U} \\ &\iff A \in (\sqcup_n \odot \mathscr{U}) \oplus (\sqcup_n \odot \mathscr{V}), \end{aligned}$$

che era proprio quello che volevamo dimostrare, poiché implica che $\sqcup_n \odot (\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}) \subseteq (\sqcup_n \odot \mathscr{U}) \oplus (\sqcup_n \odot \mathscr{V})$. □

Vogliamo ora studiare l'insieme $\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$. In particolare ne dimostreremo la chiusura a sinistra per moltiplicazione per un ultrafiltro principale e sfrutteremo poi tale risultato per mostrare invece che la sua chiusura è un ideale sinistro.

Lemma 2.2. *Dato $\mathscr{U} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$, allora vale anche che $\sqcup_n \odot \mathscr{U} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che $\sqcup_n \odot \mathscr{U}$ è idempotente in $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$. Ciò però è scontato usando la Proposizione 2.1, poiché

$$(\sqcup_n \odot \mathscr{U}) \oplus (\sqcup_n \odot \mathscr{U}) = \sqcup_n \odot (\mathscr{U} \oplus \mathscr{U}) = \sqcup_n \odot \mathscr{U},$$

dove abbiamo usato che $\mathscr{U}$ è idempotente.

Ci manca quindi da mostare che $\sqcup_n \odot \mathscr{U}$ è un ultrafiltro minimale in $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$. Per la Proposizione 1.3, ci basta dimostrare che per ogni $A \in \sqcup_n \odot \mathscr{U}$ l'insieme $A_{\sqcup_n \odot \mathscr{U}} = \{m \mid A - m \in \sqcup_n \odot \mathscr{U}\} = \{m \mid (A - m)/n \in \mathscr{U}\}$ è sindetico. Sappiamo però che l'insieme $(A/n)_{\mathscr{U}} = \{m \mid A/n - m \in \mathscr{U}\}$ è sindetico, in quanto $A/n \in \mathscr{U}$ e $\mathscr{U}$ è minimale. A questo punto abbiamo quindi finito, in quanto vale facilmente che $n(A/n)_{\mathscr{U}} \subseteq A_{\sqcup_n \odot \mathscr{U}}$ e che $n(A/n)_{\mathscr{U}}$ è sindetico e quindi lo sono anche i suoi sovrainsiemi. □

Proposizione 2.3. *L'insieme $M = \overline{\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)}$ è un ideale sinistro in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{V} \in \overline{\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)}$, vogliamo mostrare che per ogni $\mathscr{U} \in \beta\mathbb{N}$ vale che $\mathscr{U} \odot \mathscr{V} \in \overline{\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)}$, il che equivale a dire che ogni $A \in \mathscr{U} \odot \mathscr{V}$ è AC.

Sia quindi $A \in \mathscr{U} \odot \mathscr{V}$, cioè $\{n \mid A/n \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$. In particolare esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A/n \in \mathscr{V} \in \overline{\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)}$, cioè esiste $\mathscr{W} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ tale che $A/n \in \mathscr{W}$.

Per il Lemma 2.2, poiché $\mathscr{W} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$, vale che $\sqcup_n \odot \mathscr{W} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$. Si ha però facilmente che se $A/n \in \mathscr{W}$, allora $A \in \sqcup_n \odot \mathscr{W} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$, il che dimostra che A è AC. □

Il seguente teorema è una conseguenza immediata della Proposizione 2.3 e ci fornisce un ultrafiltro alternativo rispetto quello visto a lezione che testimonia la debole regolarità per partizioni "simultanea" di AP-rich, GP-rich, additivamente grandi e moltiplicativamente grandi.

[2] Indichiamo con $\sqcup_n$ l'ultrafiltro principale relativo a $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4. *Esiste un ultrafiltro $\mathscr{U}$ idempotente minimale in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$, non principale, tale che ogni suo elemento è* AC*.*

Dimostrazione. Sia $M = \overline{\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)}$. Per la Proposizione 2.3, M è un ideale sinistro in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ e perciò contiene un ideale sinistro minimale L di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$. Per il Teorema 1.1 (Ellis) troviamo un ultrafiltro $\mathscr{U} \in L$ idempotente in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.

Per definizione $\mathscr{U}$ risulta essere un ultrafiltro idempotente minimale in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$. Inoltre $\mathscr{U} \in \overline{\mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)}$, quindi ogni suo elemento risulta essere AC.

Notiamo infine che $\mathscr{U}$ non può essere principale. Infatti l'unico ultrafiltro principale idempotente rispetto al $\odot$ è $\sqcup_1$, ma per esempio $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$ non è AC. $\square$

3 Un'applicazione combinatorica

Concludiamo utilizzando l'esistenza dell'ultrafiltro $\mathscr{U}$ fornito dal Teorema 2.4 per dimostrare la debole regolarità per partizioni dell'equazione $a + b = cd$. Quello che sfrutteremo in particolare è che l'ultrafiltro $\mathscr{U}$ che abbiamo trovato è idempotente rispetto al $\odot$ e ogni suo elemento appartiene ad un idempotente rispetto al $\oplus$.

Teorema 3.1. *Per ogni colorazione finita $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, esiste $i \in \{1, \dots, r\}$ tale che C_i contiene naturali a, b, c, d arbitrariamente grandi per cui $a + b = cd$.*

Dimostrazione. Consideriamo un ultrafiltro $\mathscr{U}$ idempotente minimale in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$, non principale, tale che ogni suo elemento è AC, come ci è dato dal Teorema 2.4. Sicuramente esiste $i \in \{1, \dots, r\}$ tale che $C_i \in \mathscr{U}$; per comodità chiamiamo $C = C_i$.

Dal fatto che $C \in \mathscr{U} = \mathscr{U} \odot \mathscr{U}$, otteniamo che $\{n \mid C/n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$. Perciò in particolare possiamo scegliere d arbitrariamente grande ($\mathscr{U}$ è non principale) tale che $C/d \in \mathscr{U}$ e $d \in C$. Abbiamo di conseguenza che $C \cap C/d \in \mathscr{U}$.

Sfruttiamo ora che tutti gli elementi di $\mathscr{U}$ sono AC; esiste quindi un ultrafiltro $\mathscr{V} \in \mathrm{IM}(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ tale che $C \cap C/d \in \mathscr{V}$. Sfruttando che $\mathscr{V}$ è idempotente rispetto al $\oplus$, otteniamo che $\{n \mid (C \cap C/d) - n \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{V}$; esiste quindi b' arbitrariamente grande ($\mathscr{V}$ è non principale) tale che $(C \cap C/d) - b' \in \mathscr{V}$ e $b' \in C \cap C/d$.

Abbiamo perciò ottenuto che $(C \cap C/d) \cap ((C \cap C/d) - b') \in \mathscr{V}$, da cui in particolare $(C \cap C/d) \cap ((C \cap C/d) - b')$ contiene elementi arbitrariamente grandi. Otteniamo quindi che anche l'insieme $(dC \cap C) \cap ((dC \cap C) - b'd)$ contiene elementi arbitrariamente grandi; sia a uno di questi elementi e chiamiamo $b = b'd$. Abbiamo facilmente che $a, b \in C$; inoltre $a + b \in dC$, quindi esiste $c \in C$ tale che $a + b = cd$.

Abbiamo quindi ottenuto quattro interi a, b, c, d, tutti appartenenti a $C = C_i$, tali che $a + b = cd$. Per l'arbitrarietà della scelta di a, b, d (specificata nel corso della dimostrazione), risulta infine ovvio poter scegliere tali numeri arbitrariamente grandi. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] V. Bergelson, *Ultrafilters, IP sets, Dynamics and Combinatorial Number Theory*, Contemporary Mathematics, Volume **530** (2010), pp. 23-47.

[2] V. Bergelson, N. Hindman, *Nonmetrizable Topology Dynamics and Ramsey Theory*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume **320**, Numero 1 (1990), pp. 293-320.