



Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Il quarto problema di Hilbert sul piano

Candidato
Giada Franz

Relatore
Pietro Majer

Indice

Introduzione	v
1 Enunciato del problema e primi esempi	1
1.1 Spazi di lunghezza e geodetiche	1
1.2 Distanze proiettive sul piano	2
1.3 Enunciato del quarto problema di Hilbert	4
1.4 Esempio: spazi di Minkowski	5
2 Topologia sulle rette del piano e formula di Crofton	7
2.1 Topologia sulle rette tramite corrispondenza con il cilindro	7
2.2 Parametrizzazione del cilindro	10
2.3 Formula di Crofton	11
3 Soluzione geometrica di Alexander	15
3.1 Enunciato preciso	15
3.2 Considerazioni preliminari	16
3.3 Dalla misura alla distanza	17
3.4 Dalla distanza alla misura	18
4 Commenti conclusivi e soluzioni alternative	27
4.1 Soluzione di Ambartzumian	27
4.2 Approccio per dualità proiettiva	29
4.3 Approccio tramite il teorema di Choquet	30
4.4 Definizione globale e locale per distanze proiettive	32

INTRODUZIONE

L'8 agosto 1900, durante il Congresso Internazionale dei matematici svoltosi a Parigi, David Hilbert propose una lista di 23 problemi aperti, fra i quali il quarto era intitolato: *Il problema delle rette come percorso più breve fra due punti*.

Non ci soffermeremo qui sull'importanza che tale lista ebbe sullo sviluppo della matematica del '900 e nemmeno approfondiremo tutti gli aspetti del citato "quarto problema", ma studieremo invece una particolare interpretazione data a questo enunciato, riducendoci al solo caso del piano.

Enunciato di Hilbert: interpretazioni e soluzioni

L'enunciato che diede Hilbert, che fu poi pubblicato in un articolo sul *Bulletin of the American Mathematical Society* nel 1901, era molto vago e generale e chiedeva di studiare "le geometrie nelle quali valgono tutti gli assiomi della geometria euclidea e tutti gli assiomi di congruenza, tranne quello di congruenza dei triangoli, e inoltre vale che in ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo".

La visione di Hilbert del problema era perciò essenzialmente legata ai fondamenti della geometria. Quando oggi pensiamo al cammino più corto fra due punti, abbiamo in mente i concetti di metrica e geodetiche, ma ricordiamo che gli assiomi di spazio metrico come lo intendiamo oggi sono stati formulati da Fréchet solo nel 1907, cioè sette anni dopo che Hilbert pose i suoi 23 problemi.

Il problema, dall'enunciato di Hilbert alla successiva definizione di metrica, si è prestato quindi a varie interpretazioni e generalizzazioni, fra le quali:

1. l'interpretazione legata ai fondamenti della geometria, che probabilmente è quella più fedele alla visione di Hilbert del problema;
2. l'interpretazione nel contesto delle geometrie Finsler, cioè quelle indotte da una metrica Finsler e che richiedono perciò una certa regolarità;
3. l'interpretazione legata ai concetti di metrica e distanza, senza assumere nessuna differenziabilità.

In particolare, noi ci concentreremo su quest'ultima visione del problema, dando un enunciato preciso che utilizza i concetti di distanza e geodetica, ma che per l'appunto non assume regolarità della metrica.

Ricordiamo inoltre che al tempo di Hilbert erano conosciute solo due geometrie, diverse da quella euclidea, che rispettavano le richieste del problema: le metriche di Minkowski, che presenteremo in seguito, e le metriche di Hilbert. Probabilmente non si aveva idea della varietà di geometrie diverse che, come vedremo, soddisfano le ipotesi volute.

Già nel 1903 Hamel propose una soluzione del caso di metriche regolari tramite metodi variazionali, ma ancora non esisteva il concetto moderno di distanza. Successivamente

la soluzione variazionale fu riscritta in chiave moderna e portò ad una dimostrazione da parte di Pogorelov che sfrutta l'approssimazione delle metriche di \mathbb{R}^n tramite metriche lisce, che si possono per esempio rappresentare con metriche Finsler lisce.

Le soluzioni a noi più vicine sono, però, quelle indipendenti da approssimazioni e ipotesi di regolarità, che hanno avuto origine dal lavoro di Busemann. In questo caso le dimostrazioni non si generalizzano a tutte le dimensioni, poiché sfruttano proprietà di combinatoria delle rette del piano (o dei piani dello spazio). In questa direzione, furono pubblicate indipendentemente le soluzioni del problema in dimensione 2 da Ambartzumian e da Alexander, rispettivamente nel 1976 e nel 1978. Tali soluzioni non sono le prime e nemmeno le più generali, ma sono considerate le più eleganti e dirette.

Contenuto della tesi

Come enunciato, ci soffermeremo a studiare il problema nel contesto metrico e nel caso planare. Introdurremo innanzitutto le definizioni necessarie per enunciare la nostra versione del quarto problema di Hilbert, che in particolare chiederà di *costruire e studiare tutte le metriche proiettive e continue sul piano*. A questo proposito una definizione centrale sarà quindi quella di metrica proiettiva, che formalizzerà semplicemente la richiesta che le rette siano il cammino più breve fra due punti. Inoltre studieremo alcune proprietà delle metriche proiettive continue sul piano, riguardanti principalmente la loro struttura e topologia indotta.

Successivamente, la formula di Crofton ci avvicinerà alla soluzione del problema posto, presentandoci una prima relazione fra le metriche proiettive e le misure sullo spazio delle rette del piano, munito di un'opportuna topologia. Giungeremo quindi alla dimostrazione presentata da Alexander, che per l'appunto caratterizza le metriche cercate tramite misure (con delle determinate proprietà) sullo spazio delle rette.

Infine, presenteremo delle questioni irrisolte che abbiamo incontrato nello studio del problema e delle possibili strade alternative per la risoluzione del problema enunciato.

ENUNCIATO DEL PROBLEMA E PRIMI ESEMPI

1.1 Spazi di lunghezza e geodetiche

Introduciamo innanzitutto i concetti di spazio di lunghezza e geodetica per spazi metrici generici e vediamo alcune prime proprietà. Tali nozioni saranno alla base dell'enunciato stesso del quarto problema di Hilbert.

Richiamiamo innanzitutto la definizione di lunghezza di una curva continua.

Definizione 1.1.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva continua. La lunghezza della curva γ è definita come

$$l(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Come sappiamo e come è molto facile verificare, tale definizione è invariante per riparametrizzazione della curva. Vediamo ora una prima proprietà di continuità della lunghezza, di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 1.1.2. *La lunghezza appena definita è una funzione semicontinua inferiormente sulle curve continue in X con estremi $x, y \in X$, rispetto alla norma uniforme.*

Data una nozione di lunghezza di curve, come per esempio quella nella Definizione 1.1.1, potremmo ridefinire la distanza fra due punti come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che collegano questi due punti. In generale tale distanza sarà facilmente maggiore o uguale alla distanza iniziale; noi ci interesseremo però solo del caso in cui le due distanze coincidono. Perciò d'ora in poi supporremo di lavorare sempre in spazi con questa proprietà, detti spazi di lunghezza e definiti più precisamente qui di seguito.

Definizione 1.1.3. Diciamo che uno spazio metrico (X, d) è uno *spazio di lunghezza* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$, vale che la distanza fra x e y è uguale all'estremo inferiore delle lunghezze delle curve continue fra x e y .

Richiamiamo infine il concetto di geodetica in uno spazio metrico generico. Sottolineiamo in particolare che la definizione di geodetica adottata nel seguito è di una curva che *globalmente* minimizza la lunghezza.

Definizione 1.1.4. Dati (X, d) spazio metrico e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva continua, diciamo che γ è una *geodetica* se è la curva di lunghezza minima fra quelle che collegano $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

1.2 Distanze proiettive sul piano

Restringiamo ancora il nostro campo di indagine e consideriamo come spazio metrico \mathbb{R}^2 munito di una distanza d con la quale risulta essere uno spazio di lunghezza. In particolare ci concentreremo sulle distanze per cui l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che collegano due punti è realizzato proprio dal segmento che unisce tali punti. Diamo perciò la seguente definizione.

Definizione 1.2.1. Diciamo che una distanza d su \mathbb{R}^2 è *proiettiva* se, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$, il segmento che collega x e y è una geodetica.

Mostriamo innanzitutto un'importante equivalenza ad essere una distanza proiettiva su \mathbb{R}^2 , che riutilizzeremo largamente in tutta la trattazione.

D'ora in poi, dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^2$, indicheremo con \overline{xy} il segmento che collega x e y oppure una curva che ha come immagine tale segmento, a seconda del contesto.

Proposizione 1.2.2. Una distanza d su \mathbb{R}^2 (non necessariamente continua come funzione rispetto alla topologia euclidea) è proiettiva se e solo per ogni tripla di punti x, y, z allineati e tali che y è compreso fra x e z , vale che

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z).$$

Dimostrazione. Se la distanza d è proiettiva, dati x, y, z allineati con y compreso fra x e z abbiamo che

$$d(x, z) = l(\overline{xz}) = l(\overline{xy}) + l(\overline{yz}) = d(x, y) + d(y, z),$$

dove abbiamo utilizzato che la somma delle lunghezze di due pezzi di curva è uguale alla lunghezza della curva.

Viceversa, supponiamo che per ogni x, y, z allineati con y compreso fra x e z si abbia $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$. Allora, dati x, y generici, vale che

$$\begin{aligned} l(\overline{xy}) &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) : x = x_0, x_1, \dots, x_n = y \text{ allineati e ordinati su } \overline{xy} \right\} = \\ &= d(x, y), \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato che $\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ è sempre uguale a $d(x, y)$ per ogni $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ allineati e ordinati su \overline{xy} . \square

Nota 1.2.3. Grazie alla Proposizione 1.2.2, è immediato che una distanza d proiettiva è "crescente" lungo le rette, cioè dato $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ed s una semiretta con origine in x_0 vale che $d(x, x_0)$ è crescente per x che si allontana da x_0 lungo s .

Fino ad ora abbiamo considerato distanze generiche su \mathbb{R}^2 con l'unica proprietà di indurre uno spazio di lunghezza. Siamo però interessati a imporre che tali distanze inducano la topologia standard ¹ su \mathbb{R}^2 . Intuitivamente, grazie a questa relazione fra

¹Ricordiamo che la topologia indotta da una distanza d su uno spazio X è quella generata dalle palle aperte del tipo $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, con $r > 0$ reale e $x \in X$.

le topologie, abbiamo per esempio che le curve continue per queste distanze sono quelle della topologia standard su \mathbb{R}^2 .

Di seguito vogliamo mostrare che, per una distanza proiettiva su \mathbb{R}^2 , indurre la topologia standard equivale ad essere continua come funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in \mathbb{R} con le topologie euclidee. Tale risultato ci sarà utile in seguito, poiché generalmente è più facile dimostrare solo la continuità della distanza rispetto all'equivalenza.

Prima di giungere alla dimostrazione, introduciamo alcuni lemmi utili.

Lemma 1.2.4. *Una distanza d su \mathbb{R}^2 è continua come funzione rispetto alla metrica standard (su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ed \mathbb{R}) se e solo se, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2$, la funzione $d(x_0, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.*

Dimostrazione. La dimostrazione consta semplicemente nell'esplicitare la continuità della distanza d e fare dei piccoli giochi con la disuguaglianza triangolare. Abbiamo infatti che per definizione d è continua se e solo se per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ implica $|d(x, y) - d(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Di volta in volta la norma $|\cdot|$ indicherà la norma standard sullo spazio a cui appartengono gli argomenti.

Supponiamo innanzitutto che d sia continua, allora prendendo $y = y_0 = x_0$ nella proposizione appena enunciata otteniamo proprio quanto cercato, poiché $|(x, x_0) - (x_0, x_0)| = |(x - x_0, 0)| = |x - x_0|$ e $|d(x, x_0) - d(x_0, x_0)| = d(x, x_0)$.

Viceversa, supponiamo che valga la continuità di $d(x_0, \cdot)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $d(x, x_0) < \varepsilon$. Dati dunque $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ vale $d(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(y, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$; di conseguenza, utilizzando la disuguaglianza triangolare, abbiamo che:

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(x_0, y_0)| &= |d(x, y) - d(x, y_0) + d(x, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq \\ &\leq |d(x, y) - d(x, y_0)| + |d(x, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq \\ &\leq d(y, y_0) + d(x, x_0) < \varepsilon, \end{aligned}$$

che dimostra quanto cercato. □

Il lemma appena enunciato è semplicemente un lemma tecnico per alleggerire la pesante definizione di continuità della distanza come funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Infatti, come abbiamo visto, nel caso in cui d rispetti essa stessa le ipotesi di distanza è sufficiente un controllo più immediato del tipo “ $\varepsilon - \delta$ ”, rispetto a quello standard della continuità.

Lemma 1.2.5. *Siano d, d' due distanze su \mathbb{R}^2 e siano τ, τ' le topologie da esse indotte. Allora $\tau' \subseteq \tau$ (cioè τ è più fine di τ') se e solo se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ allora $d'(x, x_0) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Indichiamo B e B' rispettivamente le palle relative a d e a d' . Per definizione di topologia indotta, abbiamo che $\tau' \subseteq \tau$ se e solo se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subseteq B'_\varepsilon(x_0)$. Quest'ultima affermazione è però equivalente al fatto che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ allora $d'(x, x_0) < \varepsilon$. □

Proposizione 1.2.6. *Una distanza d proiettiva su \mathbb{R}^2 induce la topologia euclidea se e solo se è continua rispetto alla metrica standard.*

Dimostrazione. Grazie ai Lemmi 1.2.4 e 1.2.5 otteniamo che una distanza d che induce la topologia euclidea è continua rispetto alla metrica standard.

Viceversa, sempre per gli stessi lemmi, otteniamo che la topologia indotta da una distanza d continua rispetto alla metrica standard è meno fine di quella euclidea. Perciò ci manca solo da mostrare che, data d una distanza proiettiva continua, la topologia indotta da essa è più fine di quella euclidea. Supponiamo per assurdo che ciò non valga; allora, per il Lemma 1.2.5, deve valere che esistono un $\varepsilon > 0$, un $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e degli $x_n \in \mathbb{R}^2$ tali che $d(x_n, x_0) < 1/n$ e $|x_n - x_0| > \varepsilon$.

Per la Proposizione 1.2.2, possiamo supporre che $|x_n - x_0|$ siano limitati, minori o uguali ad un reale $M > 0$. Perciò abbiamo che gli x_n appartengono ad una corona chiusa circolare centrata in x_0 , cioè ad un compatto, quindi a meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che x_n converga a \bar{x} rispetto alla metrica standard. Però, poiché d è continua rispetto alla metrica standard, abbiamo che $d(x_n, x_0) < 1/n$ converge a $d(\bar{x}, x_0)$, che di conseguenza è uguale a 0. Ciò però è assurdo in quanto \bar{x} è diverso da x_0 . \square

1.3 Enunciato del quarto problema di Hilbert

Ora abbiamo tutti i prerequisiti per enunciare la versione del quarto problema di Hilbert che tratteremo: *Costruire e studiare tutte le distanze proiettive sul piano continue rispetto alla metrica standard.*

Questo non è l'enunciato originale che propose Hilbert ed è solo una delle moltissime interpretazioni date al problema dal 1900 ad oggi. Il titolo del problema, come apparso nell'articolo del 1902 sulla rivista dell'American Mathematical Society che riassumeva i 23 problemi, era il seguente: *Il problema delle rette come percorso più breve fra due punti.* L'enunciato di Hilbert era più legato ad una visione assiomatica della geometria e si può riassumere come trovare e studiare tutte le geometrie ottenute da quella euclidea togliendo l'assioma di congruenza dei triangoli, chiedendo che in ogni triangolo la somma di due lati sia maggiore del terzo ² e assumendo per l'appunto che le rette siano il percorso più breve che collega due punti.

Noi non studieremo però tale versione, ma una delle tante altre interpretazioni in linguaggio moderno date al problema. Ricordiamo che gli assiomi di spazio metrico come li conosciamo oggi sono stati formulati solo nel 1907 da Fréchet e perciò non rientravano nemmeno nel linguaggio di Hilbert al tempo in cui formulò il problema.

Infine ci si potrebbe chiedere perché limitarsi allo studio di tali distanze proiettive sul piano e non studiare in generalità le distanze proiettive su \mathbb{R}^n . La risposta in questo caso è molto semplice: la soluzione geometrica che presenteremo si applica solo nel caso di \mathbb{R}^2 . Naturalmente però tutti gli enunciati e le definizioni presentati finora rimangono invariati nel caso di \mathbb{R}^n .

²Richiesta che noi rivediamo direttamente nella proprietà di disuguaglianza triangolare della distanza.

1.4 Esempio: spazi di Minkowski

Mostriamo ora una prima classe di distanze continue e proiettive su \mathbb{R}^2 : le distanze invarianti per traslazione.

Definizione 1.4.1. Il piano \mathbb{R}^2 munito di una distanza d invariante per traslazione, che induce la topologia euclidea e con il quale \mathbb{R}^2 risulta uno spazio di lunghezza, è chiamato *piano di Minkowski*.

Proposizione 1.4.2. *La distanza di un piano di Minkowski è proiettiva.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.2.2, ci basta mostrare che dati tre punti $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ allineati, con y compreso fra x e z , vale che $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Consideriamo allora x, y, z allineati con y fra x e z . Poiché stiamo lavorando in uno spazio di lunghezza, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una curva γ che collega x e z e tale che $l(\gamma) \leq d(x, z) + \varepsilon$. Inoltre, dato che γ è continua anche rispetto alla topologia euclidea, esiste un segmento parallelo a \overline{xz} con estremi su γ che è un traslato di \overline{xy} o di \overline{yz} . Supponiamo senza perdita di generalità di trovarci nel primo caso e chiamiamo x', y' gli estremi di tale segmento (vedere la Figura 1.1). Utilizzando la definizione di lunghezza

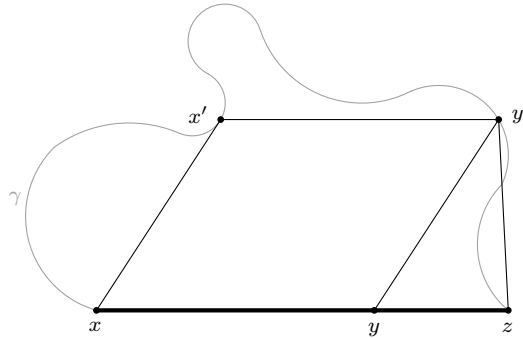


Figura 1.1

di una curva, l'invarianza per traslazione della distanza e la disuguaglianza triangolare, abbiamo perciò che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale

$$\begin{aligned} d(x, z) + \varepsilon &\geq l(\gamma) \geq d(x, x') + d(x', y') + d(y', z) = \\ &= d(x', y') + d(y, y') + d(y', z) \geq d(x, y) + d(y, z), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato che anche $\overline{xx'}$ e $\overline{yy'}$ sono uno il traslato dell'altro.

Otteniamo quindi $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$ e, poiché l'altra disuguaglianza è ovvia per la triangolare, abbiamo ciò che volevamo. \square

Questo esempio ci dà una prima idea della varietà di distanze proiettive che si possono costruire sul piano.

TOPOLOGIA SULLE RETTE DEL PIANO E FORMULA DI CROFTON

L'obiettivo di questo capitolo è giustificare quella che sarà poi la caratterizzazione delle distanza proiettive, che dimostreremo nel prossimo capitolo. L'idea sarà studiare lo spazio delle rette orientate su \mathbb{R}^2 e notare che c'è una corrispondenza fra la misura delle rette che intersecano un segmento e la lunghezza del segmento stesso.

2.1 Topologia sulle rette tramite corrispondenza con il cilindro

Per familiarizzare con lo spazio delle rette del piano e porci una topologia, mostriamone innanzitutto una rappresentazione attraverso la corrispondenza con i punti del cilindro. In un primo tempo considereremo le rette orientate, per avere una maggiore simmetria e poter visualizzare meglio lo spazio.

Identifichiamo \mathbb{R}^2 con il piano di equazione $z = 0$ in \mathbb{R}^3 e consideriamo il cilindro \mathcal{C} di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Una retta orientata r è identificata univocamente dalla sua direzione \hat{q} e dal vettore \vec{v} che rappresenta il punto della retta più vicino all'origine; in particolare con questa notazione r è parametrizzata da $\vec{v} + t\hat{q}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Mettiamo quindi in corrispondenza r con il punto $\hat{q} + \hat{q} \times \vec{v}$, che facilmente appartiene al

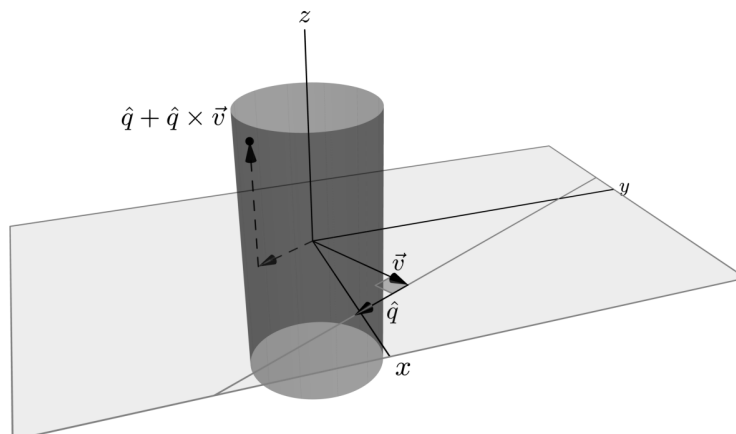


Figura 2.1

cilindro in quanto \hat{q} è unitario e i vettori \hat{q} e \vec{v} giacciono sul piano $z = 0$ e hanno quindi prodotto vettore ortogonale a tale piano.

Più genericamente, potremmo parametrizzare la retta r come $\vec{u} + t\hat{q}$, con \hat{q} che rappresenta la direzione come sopra e \vec{u} un generico punto sulla retta. Mostriamo che la formula per rappresentare r sul cilindro in questo caso non cambia.

Lemma 2.1.1. *La retta r parametrizzata da $\vec{u} + t\hat{q}$, con \hat{q} vettore direzione e \vec{u} generico punto su r , corrisponde al punto $\hat{q} + \hat{q} \times \vec{u}$ sul cilindro.*

Dimostrazione. Basta verificare che $\hat{q} \times \vec{v} = \hat{q} \times \vec{u}$, con \vec{v} il punto della retta di minima distanza dell'origine (come definito sopra). Questo però segue banalmente dalla definizione stessa di prodotto vettore. \square

Grazie alla corrispondenza appena descritta, che risulta facilmente una bigezione, poniamo come topologia sull'insieme delle rette orientate quella indotta da questa dualità con il cilindro e chiamiamo tale spazio topologico \mathcal{G}^+ . A noi però non interesserà esattamente questo spazio, poiché non sarà importante considerare l'orientazione. Poniamo perciò una topologia anche sull'insieme delle rette non orientate, vedendolo come quoziente topologico di \mathcal{G}^+ dove due rette sono identificate se sono la stessa a meno del verso. In analogia con il caso precedente, definiamo questo spazio topologico \mathcal{G} e chiamiamo $\pi : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ la proiezione al quoziente.

Quando parleremo di misure sulle rette del piano, sottoinderemo una misura sui boreliani dello spazio topologico \mathcal{G} . Inoltre data una generica misura μ^+ su \mathcal{G}^+ , definiamo la corrispondente misura su \mathcal{G} come $\mu(A) = \frac{1}{2}\mu^+(\pi^{-1}(A))$, per ogni A boreliano in \mathcal{G} . La scelta del coefficiente $\frac{1}{2}$ è giustificata dal fatto che dato A boreliano in \mathcal{G} , la sua controimmagine tramite π è costituito da due parti simmetriche rispetto all'origine (viste sul cilindro). In particolare π è un rivestimento di grado 2 di \mathcal{G}^+ su \mathcal{G} .

Notiamo in particolare che esiste una misura standard σ^+ sul cilindro visto come superficie, che induce una misura corrispondente su \mathcal{G}^+ e di conseguenza una misura su \mathcal{G} , che chiameremo σ . Per concludere e chiarire, specifichiamo che ai nostri scopi i due spazi topologici \mathcal{C} e \mathcal{G}^+ sono esattamente lo stesso e tali spazi saranno utili per visualizzare più agevolmente lo spazio \mathcal{G} . Inoltre non avremo particolari problemi studiando le rette orientate invece di quelle non orientate, poiché considereremo sempre insieme chiusi rispetto alla relazione che identifica due rette uguali a meno dell'orientazione. Tali insiemi visti nel cilindro sono semplicemente insiemi simmetrici rispetto all'origine.

Per quanto riguarda la notazione, indicheremo con $[A] \subseteq \mathcal{G}$ l'insieme delle rette che intersecano un generico sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 . Per ribadire quanto appena detto, notiamo in particolare che se una certa retta orientata interseca A anche quella percorsa nel verso opposto lo interseca. Inoltre indichiamo con Δ l'insieme di tutti i segmenti (aperti, chiusi, semiaperti) di \mathbb{R}^2 .

Cerchiamo ora di visualizzare in cosa vengono mappate le rette che passano per un punto o che intersecano un segmento, cosa che risulterà molto facile grazie al Lemma 2.1.1. Facciamo ciò per le rette orientate, poiché in questo modo potremmo visualizzare il risultato sul cilindro; dato che come abbiamo visto questo è equivalente a vedere il risultato sulle rette non orientate.

Proposizione 2.1.2. *L'insieme delle rette orientate che passano per il punto con coordinate (u, v) corrisponde all'intersezione fra il cilindro e il piano di equazione $z = vx - uy$.*

Dimostrazione. Le rette che passano per il punto (u, v) sono parametrizzate come $(u, v) + t(\cos \theta, \sin \theta)$ al variare di $\theta \in [0, 2\pi)$. Perciò per il Lemma 2.1.1 corrispondono ai punti $(\cos \theta, \sin \theta, 0) + (\cos \theta, \sin \theta, 0) \times (u, v, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, v \cos \theta - u \sin \theta)$, che sono proprio l'intersezione cercata. \square

Possiamo visualizzare il risultato enunciato nella Figura 2.2, che ci mostra proprio l'intersezione fra il piano di equazione $z = vx - uy$ e il cilindro, dato il punto di coordinate (u, v) . In particolare tale intersezione è ovviamente un'ellisse.

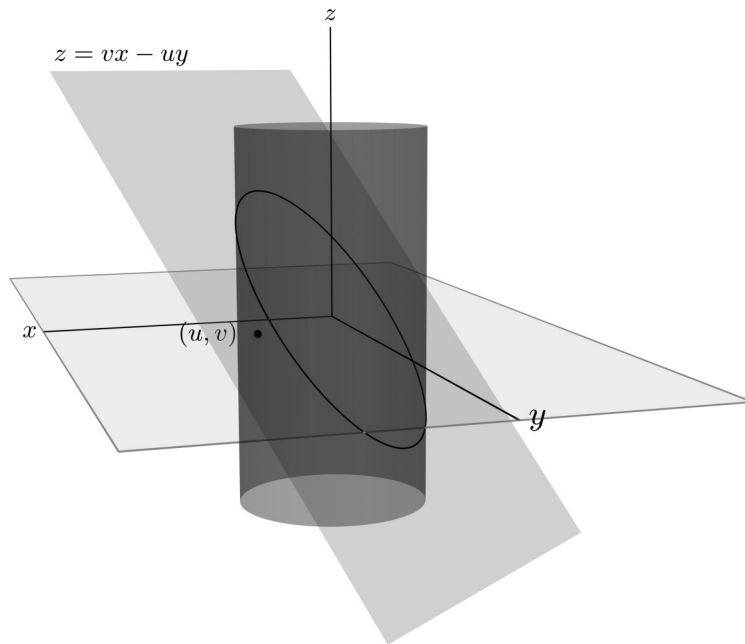


Figura 2.2

La Figura 2.3 ci mostra quindi a che porzione del cilindro corrispondono le rette che intersecano un segmento. Tale insieme sarà l'unione delle rette che passano per ogni punto del segmento, cioè la porzione di cilindro compresa fra le due curve corrispondenti alle rette che passano per i due punti estremali.

Nota 2.1.3. Notiamo in particolare che una facile conseguenza di quanto appena detto è che, dato $\delta \in \Delta$ chiuso, le rette $[\delta]$ che lo intersecano sono un compatto in \mathcal{G} . Perciò si ha che, dato un poligono convesso chiuso C , l'insieme rette $[C]$ che intersecano C è un compatto in \mathcal{G} . Analogamente, dati $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ segmenti chiusi, anche $[\delta_1] \cap [\delta_2]$ è un compatto in \mathcal{G} .

Nel seguito ci sarà utile avere una caratterizzazione della topologia su \mathcal{G} indipendente dalla rappresentazione tramite il cilindro. La seguente proposizione ci dà quindi proprio una descrizione di tale topologia.

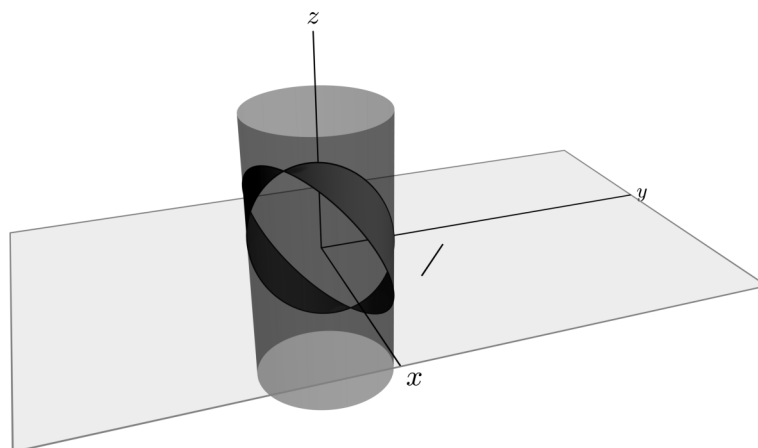


Figura 2.3

Proposizione 2.1.4. *Gli insiemi della forma $[\delta_1] \cap [\delta_2]$, con $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$, generano i boreliani di \mathcal{G} .*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che per ogni $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ l'insieme $[\delta_1] \cap [\delta_2]$ è un boreliano di \mathcal{G} , in quanto è compatto come visto nella Nota 2.1.3.

Ci basta perciò mostrare che questi insiemi generano gli aperti di \mathcal{G} e per farlo dimostreremo che generano gli aperti del cilindro simmetrici rispetto all'origine. Sia x un punto del cilindro e $x' \in \mathcal{C}$ il suo simmetrico. Esistono allora due "spicchi" aperti (corrispondenti alle rette che intersecano due segmenti aperti δ_1 e δ_2), la cui intersezione è l'unione di due intorni arbitrariamente piccoli di x e x' , il che conclude la dimostrazione. \square

Proponiamo infine alcune osservazioni che ci saranno utili in seguito, riguardanti la misura di alcuni sottoinsiemi di rette.

Nota 2.1.5. Per la Proposizione 2.1.2 è immediato che l'insieme delle rette passanti per un punto abbia misura σ nulla. Consideriamo ora un sottoinsieme di punti $A \subseteq \mathbb{R}^2$ che sia trascurabile per la misura di Lebesgue, allora per Fubini-Tonelli sarà trascurabile anche $[A]$ rispetto alla misura σ .

Nota 2.1.6. Sia γ una curva di lunghezza $l(\gamma)$ finita in \mathbb{R}^2 e sia R l'insieme delle rette tangenti alla curva γ nei punti in cui è differenziabile, allora R ha misura σ nulla.

2.2 Parametrizzazione del cilindro

Per calcolare agevolmente la misura sul cilindro, ci serve una parametrizzazione del cilindro stesso. La più canonica e semplice è quella data dalla funzione $\varphi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{C}$ tale che $\varphi(p, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, p)$.

Rivediamo ora in quest'ottica a cosa corrispondono le rette orientate che passano per un punto e per un segmento. Per la Proposizione 2.1.2 è immediato che le rette orientate passanti per un punto (u, v) corrispondano ai punti (p, θ) tali che $p = v \cos \theta - u \sin \theta$

e, scrivendo il punto in coordinate polari $(u, v) = d(\cos \phi, \sin \phi)$, l'insieme risulta avere equazione $p = d(\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta) = d \sin(\phi - \theta)$.

Lemma 2.2.1. *La misura di un insieme misurabile del cilindro \mathcal{C} che corrisponde all'immagine di una certa regione $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ tramite φ è semplicemente $\int_{\mathcal{R}} dp d\theta$, cioè:*

$$\sigma^+(\varphi(\mathcal{R})) = \int_{\mathcal{R}} dp d\theta.$$

Dimostrazione. Vale innanzitutto che

$$D\varphi(p, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

perciò, applicando la definizione di misura di superficie, otteniamo

$$\sigma^+(\varphi(\mathcal{R})) = \int_{\varphi(\mathcal{R})} d\sigma^+ = \int_{\mathcal{R}} \sqrt{\det(D\varphi^T \cdot D\varphi)} dp d\theta = \int_{\mathcal{R}} dp d\theta.$$

□

Possiamo perciò ora calcolare la misura delle rette che intersecano un segmento.

Proposizione 2.2.2. *La misura σ delle rette che intersecano un segmento è uguale a 2 volte la lunghezza del segmento stesso.*

Dimostrazione. Rappresentiamo un generico segmento come $(u, v) + t(\cos \phi, \sin \phi)$ al variare di $0 \leq t \leq L$. Per quanto detto, sul piano (p, θ) le rette che intersecano questo segmento corrispondono alla regione \mathcal{R} di equazione $p = (v + t \sin \phi) \cos \theta - (u + t \cos \phi) \sin \theta$, con $0 \leq t \leq L$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Perciò la misura di tale insieme sarà

$$\begin{aligned} \sigma(\pi(\varphi(\mathcal{R}))) &= \frac{1}{2} \sigma^+(\varphi(\mathcal{R})) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} dp d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |L \sin \phi \cos \theta - L \cos \phi \sin \theta| d\theta = \\ &= \frac{1}{2} L \int_0^{2\pi} |\sin(\phi - \theta)| d\theta = 2L. \end{aligned}$$

È però ovvio che L sia la lunghezza del segmento e quindi la dimostrazione è conclusa. □

2.3 Formula di Crofton

La Proposizione 2.2.2 ci ha mostrato una prima relazione fra la lunghezza dei segmenti e la misura delle rette che li intersecano. Tale relazione però vale più in generale, come vediamo di seguito.

Lemma 2.3.1. *Sia γ una curva poligonale (cioè una spezzata) sul piano, allora vale che*

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{r \in \mathcal{G}} \#(r \cap \gamma) d\sigma,$$

dove $\#(r \cap \gamma)$ indica il numero di intersezioni fra r e γ .

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che se γ è un segmento la formula è un'immediata conseguenza della Proposizione 2.2.2, poiché abbiamo che

$$l(\gamma) = \frac{1}{2}\sigma([\gamma]) = \frac{1}{2} \int_{r \in [\gamma]} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{r \in \mathcal{G}} \#(r \cap \gamma) d\sigma,$$

dove l'ultima uguaglianza è vera perché

$$\#(r \cap \gamma) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \in [\gamma] \text{ e } \gamma \text{ non giace su } r; \\ \infty, & \text{se } \gamma \text{ giace su } r; \\ 0, & \text{se } r \notin [\gamma]; \end{cases}$$

e quindi gli argomenti degli integrali sono uguali quasi ovunque, perché c'è solo una retta per cui γ ci giace sopra e quindi è un insieme trascurabile.

Sia ora γ una curva poligonale generica e siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ i segmenti di cui è composta, allora vale che

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^n l(\gamma_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{r \in \mathcal{G}} \#(r \cap \gamma_k) d\sigma = \frac{1}{2} \int_{r \in \mathcal{G}} \#(r \cap \gamma) d\sigma,$$

dove, analogamente a prima, abbiamo utilizzato che gli argomenti degli integrali sono uguali quasi ovunque. Infatti differiscono solo per le rette r che passano per un punto di intersezione fra due segmenti γ_i , ma tali rette hanno misura nulla. \square

Teorema 2.3.2 (Formula di Crofton). *Sia γ una curva rettificabile (cioè di lunghezza $l(\gamma)$ finita) di \mathbb{R}^2 , allora*

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{r \in \mathcal{G}} \#(r \cap \gamma) d\sigma.$$

Dimostrazione. Sia (γ_n) una successione di curve poligonali che approssimano uniformemente γ . Possiamo supporre che le γ_n abbiano gli stessi estremi di γ e che gli estremi dei segmenti che le compongono giacciono su γ e si "infiltrano", cioè gli estremi di segmenti di γ_n sono estremi di segmenti anche di γ_{n+1} .

Diciamo che una retta r è *trasversa* a γ se, per ogni t nel suo intervallo di definizione per cui $\gamma(t) \in r$, vale che γ è derivabile in t e $\gamma'(t)$ non è parallelo ad r . Quindi r non è trasversa a γ se e solo se r interseca la curva in un punto di non differenziabilità per essa oppure r è tangente alla curva. Poiché ha lunghezza finita, γ è differenziabile quasi ovunque; quindi per le Note 2.1.5 e 2.1.6 risulta che le rette del piano non trasverse a γ sono trascurabili per σ . Otteniamo dunque che la funzione crescente e positiva $\#(r \cap \gamma_n)$ converge puntualmente quasi ovunque a $\#(r \cap \gamma)$, poiché si ha la convergenza almeno per le rette r trasverse a γ .

Per la Proposizione 1.1.2 abbiamo che $l(\gamma) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n)$. L'altra disuguaglianza è però immediata in questo caso e abbiamo perciò che

$$l(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{r \in \mathcal{G}} \#(r \cap \gamma_n) d\sigma = \frac{1}{2} \int_{r \in \mathcal{G}} \#(r \cap \gamma) d\sigma,$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza di Beppo-Levi per quanto detto prima. \square

L'osservazione cruciale a questo punto è che il Teorema 2.3.2 (Formula di Crofton) implica direttamente che la distanza euclidea è proiettiva. Infatti una sua immediata conseguenza è che, dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^2$, il segmento che li collega è la curva di lunghezza minima che li unisce; questo perché ogni rette orientata che interseca tale segmento interseca anche ogni curva γ che collega x e y .

Il passaggio successivo, dovuto a Busemann, è provare a modificare la misura che sto mettendo sulle rette, cioè rimpiazzare σ con un'altra misura μ , e definire la distanza sul piano a posteriori, in modo che valga comunque la formula di Crofton e che quindi la distanza sia proiettiva, ponendo per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \mu([\overline{xy}]),$$

dove ricordiamo che con \overline{xy} intendiamo il segmento che collega x e y .

Dobbiamo però verificare che questa distanza sia ben definita e che le formule abbiano senso. Dimostreremo tutto con attenzione nel prossimo capitolo, ma cerchiamo intanto di ottenere le ipotesi corrette con dei ragionamenti qualitativi.

Innanzitutto notiamo che è necessario imporre che μ sia nulla sui fasci di rette per un punto. Questo non solo serve affinché si possa ottenere la formula di Crofton (nel caso della metrica standard avevamo ampiamente usato che l'insieme delle rette per un punto fosse trascurabile), ma anche perché la distanza ottenuta sia continua rispetto alla topologia euclidea, ipotesi richiesta nel nostro enunciato del problema. Inoltre vorremmo che d fosse effettivamente una distanza e quindi in particolare abbia valori finiti e diversi da 0 se calcolata per punti distinti. Per la prima richiesta è sufficiente imporre che μ sia una misura finita sui compatti, mentre per la seconda serve che μ sia strettamente positiva sugli insiemi $[\overline{xy}]$ con $x, y \in \mathbb{R}^2$ punti distinti.

Viene naturale chiedersi se l'ultima ipotesi sia equivalente al fatto che μ sia diffusa (cioè strettamente positiva sugli aperti). La risposta però è negativa, in quanto esistono misure strettamente positive sugli insiemi $[\overline{xy}]$ con $x, y \in \mathbb{R}^2$ punti distinti, ma che non sono diffuse.

SOLUZIONE GEOMETRICA DI ALEXANDER

Presentiamo in questo capitolo la vera e propria soluzione del problema enunciato, presentata da Alexander nel 1978. Tale soluzione funziona esclusivamente per il caso piano poiché sfrutta intrinsecamente la geometria e la combinatoria delle rette del piano. Questa non è la prima soluzione del problema e nemmeno la più generale, ma risulta molto elementare ed elegante e risolve il problema in modo diretto, senza passare per approssimazioni delle distanze con distanze regolari.

L'idea è sostanzialmente quella enunciata alla fine del precedente capitolo e ha origine dalla costruzione di Crofton presentata nel Teorema 2.3.2 (Formula di Crofton).

3.1 Enunciato preciso

Già abbiamo enunciato la nostra versione del quarto problema di Hilbert nella Sezione 1.3 (Enunciato del quarto problema di Hilbert), che chiedeva di costruire e studiare tutte le distanze proiettive sul piano continue rispetto alla metrica standard. Questa però chiaramente non era una formulazione precisa del problema, poiché il termine “studiare” può assumere una varietà di significati diversi. Di seguito diamo quindi un enunciato preciso, che risponderà completamente alla richiesta di costruire tutte le distanze proiettive e continue sul piano e che darà un'interpretazione dello “studiarle”. Prima di ciò diamo una breve definizione.

Definizione 3.1.1. Sia X uno spazio topologico, diciamo che μ è una misura di Radon su X se è una misura sui boreliani di X finita sui sottoinsieme compatti di X .

Teorema 3.1.2 (Quarto problema di Hilbert). *Esiste una corrispondenza fra le distanze proiettive e continue su \mathbb{R}^2 e le misure di Radon sullo spazio delle rette \mathcal{G} nulle sui fasci di rette e strettamente positive sugli insiemi $[\overline{xy}]$ con $x, y \in \mathbb{R}^2$ punti distinti.*

In particolare, data una misura μ con le ipotesi appena enunciate, possiamo definire una distanza su \mathbb{R}^2 tale che

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \mu([\overline{xy}]) \tag{3.1.1}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ e tale distanza è proiettiva e continua.

Viceversa ogni distanza proiettiva e continua è generata da un'unica misura con le ipotesi sopra tramite l'Equazione (3.1.1).

Mostriamo però innanzitutto una versione leggermente diversa, da cui poi seguirà facilmente il Teorema 3.1.2 (Quarto problema di Hilbert), che semplicemente considera pseudo-distanze invece di distanze e parallelamente le mette in corrispondenza con le misure di Radon nulle sui fasci di rette, cioè toglie l'ipotesi di positività sugli insiemi $[\overline{xy}]$ con $x, y \in \mathbb{R}^2$ distinti.

Definizione 3.1.3. Diciamo che una funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una *pseudo-distanza* se, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, rispetta le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, x) = 0$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

In altri termini una pseudo-distanza è una distanza per cui non richiediamo che $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.

Proposizione 3.1.4 (Quarto problema di Hilbert per pseudo-distanze). *Esiste una corrispondenza fra le pseudo-distanze proiettive e continue su \mathbb{R}^2 e le misure di Radon sullo spazio delle rette \mathcal{G} nulle sui fasci di rette.*

Le corrispondenze sono analoghe a quelle enunciate nel Teorema 3.1.2 (Quarto problema di Hilbert).

L'equivalenza fra le due versioni del quarto problema di Hilbert è immediata e la versione con le pseudo-distanze sembra addirittura più pulita e chiara. Abbiamo però voluto presentare il problema nella versione con distanze e non pseudo-distanze, poiché in questo caso si ha una maggiore regolarità, come possiamo vedere dagli enunciati del Capitolo 1 (Enunciato del problema e primi esempi). Per esempio risulta che le distanze proiettive e continue inducono la topologia euclidea, cosa ovviamente falsa nel caso delle pseudo-distanze (basti pensare alla pseudo-distanza costantemente nulla), la cui topologia indotta potrebbe addirittura non essere Hausdorff.

In realtà la soluzione presentata da Alexander in [Ale78] ha un enunciato ancora più generale, nel quale non si richiede che la pseudo-distanza sia continua. Le dimostrazioni dei due enunciati sono però sostanzialmente analoghe, con la differenza che servono delle accortezze ulteriori nei punti di discontinuità della pseudo-distanza.

3.2 Considerazioni preliminari

Vediamo qui un lemma che ci sarà utile in seguito e che mostra un primo accenno del fatto che una misura sui boreliani di \mathcal{G} è determinata dai valori che assume sugli insiemi della forma $[\overline{xy}]$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$. Tale lemma ci dice in particolare che la misura sugli insiemi $[\delta_1] \cap [\delta_2]$ con $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ è determinata dalla misura sugli insiemi di rette che intersecano i segmenti.

Lemma 3.2.1. *Sia μ misura di Radon sullo spazio delle rette \mathcal{G} nulla sui fasci di rette, allora valgono le due seguenti proposizioni.*

1. Dati $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ lati di un triangolo, di cui chiamiamo δ il terzo lato, vale che

$$2\mu([\delta_1] \cap [\delta_2]) = \mu([\delta_1]) + \mu([\delta_2]) - \mu([\delta]).$$

2. Dati $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ che non si intersecano, chiamiamo D_1 e D_2 i due segmenti che uniscono un vertice di δ_1 e un vertice di δ_2 e i cui prolungamenti lasciano δ_1, δ_2 in due semipiani distinti. Analogamente definiamo S_1 ed S_2 , con la differenza che i loro prolungamenti lasciano δ_1 e δ_2 nello stesso semipiano. Allora vale che

$$2\mu([\delta_1] \cap [\delta_2]) = \mu([D_1]) + \mu([D_2]) - \mu([S_1]) - \mu([S_2]).$$

Dimostrazione. 1. L'insieme delle rette che intersecano i due lati δ_1 e δ_2 del triangolo, corrispondono alle rette che intersecano δ_1 più le rette che intersecano δ_2 meno le rette che intersecano δ . In questo modo però si sta contando ogni retta interessata due volte, perciò

$$2\mu([\delta_1] \cap [\delta_2]) = 2\mu([\delta_1] \cup [\delta_2] \setminus [\delta]) = \mu([\delta_1]) + \mu([\delta_2]) - \mu([\delta]).$$

2. Le rette che intersecano entrambi i segmenti δ_1 e δ_2 sono tutte quelle che intersecano δ_1 meno quelle che intersecano contemporaneamente δ_1 ed S_1 e meno quelle che intersecano contemporaneamente δ_1 ed S_2 . Perciò, utilizzando il punto 1, abbiamo

$$\begin{aligned} 2\mu([\delta_1] \cap [\delta_2]) &= \\ &= 2\mu([\delta_1]) - 2\mu([\delta_1] \cap [S_1]) - 2\mu([\delta_1] \cap [S_2]) = \\ &= 2\mu([\delta_1]) - (\mu([\delta_1]) + \mu([S_1]) - \mu([D_2])) - (\mu([\delta_1]) + \mu([S_2]) - \mu([D_1])) = \\ &= \mu([D_1]) + \mu([D_2]) - \mu([S_1]) - \mu([S_2]). \end{aligned}$$

□

3.3 Dalla misura alla distanza

Mostriamo ora la prima implicazione della Proposizione 3.1.4 (Quarto problema di Hilbert per pseudo-distanze), cioè che ogni misura di Radon μ sullo spazio delle rette \mathcal{G} nulla sui fasci genera una pseudo-distanza proiettiva e continua tramite l'Equazione (3.1.1). Questa implicazione è molto semplice ed è già stata accennata nel capitolo precedente.

Pseudo-distanza

Notiamo innanzitutto che $d(x, y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}])$ è un valore reale (non infinito), poiché $[\overline{xy}]$ è un compatto e μ è una misura di Radon. Verifichiamo ora che d rispetti le ipotesi di pseudo-distanza enunciate nella Definizione 3.1.3.

1. $d(x, y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}]) \geq 0$, perché μ è una misura non con segno, perciò assume sempre valori non negativi. Inoltre $d(x, x) = \frac{1}{2}\mu(\{x\}) = 0$ perché μ è nulla sui fasci di rette per un punto.
2. $d(x, y) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}]) = d(y, x)$ ovviamente.

3. Infine, sfruttando il punto 1 del Lemma 3.2.1, abbiamo che

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &= \frac{1}{2}\mu([\overline{xy}]) + \frac{1}{2}\mu([\overline{yz}]) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xz}]) + \mu([\overline{xy}] \cap [\overline{yz}]) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\mu([\overline{xz}]) = d(x, z). \end{aligned}$$

Proiettività

Siano $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ allineati con y compreso fra x e z , allora abbiamo che

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &= \frac{1}{2} [\mu([\overline{xy}]) + \mu([\overline{yz}])] = \\ &= \frac{1}{2}\mu([\overline{xz}]) - \frac{1}{2}\mu(\{y\}) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xz}]) = d(x, z), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato che μ è nulla sui fasci di rette per un punto (che in questo caso era y). Questo però dimostra direttamente che d è proiettiva grazie alla Proposizione 1.2.2.

Continuità

Grazie al Lemma 1.2.4, per mostrare la continuità della distanza d ci basta mostrare che, dato $x_0 \in \mathbb{R}^2$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $d(x, x_0) < \varepsilon$.

Consideriamo una successione di intorni limitati U_n di x_0 , che decrescono a $\{x_0\}$, cioè tali che $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{x_0\}$. Allora per le proprietà di misura, ricordando che μ è di Radon, abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu([U_n]) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [U_n]\right) = \mu(\{x_0\}) = 0.$$

Sia ora $\varepsilon > 0$, per quanto appena detto esiste U_n tale che $\mu([U_n]) < 2\varepsilon$. Consideriamo allora $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subseteq U_n$. Abbiamo perciò che per ogni x con $|x - x_0| < \delta$ vale

$$d(x, x_0) = \frac{1}{2}\mu([\overline{xx_0}]) \leq \frac{1}{2}\mu([U_n]) < \varepsilon,$$

da cui quanto cercato.

3.4 Dalla distanza alla misura

Ora vogliamo mostrare che data una pseudo-distanza d proiettiva e continua, esiste un'unica misura di Radon μ sullo spazio delle rette \mathcal{G} nulla sui fasci per un punto che la genera. Quindi nel corso di tutta la dimostrazione d sarà una fissata pseudo-distanza proiettiva e continua.

L'idea sarà costruire innanzitutto una misura μ_C sull'insieme delle rette che intersecano un poligono convesso $C \subset \mathbb{R}^2$. Il passo successivo sarà verificare che dati due poligoni convessi $C_1 \subseteq C_2$, le due misure μ_{C_1} e μ_{C_2} coincidono nell'intersezione dei domini. A questo punto potremmo definire facilmente una misura μ su tutte le rette, incollando le misure su poligoni crescenti. Sarà immediato che μ sia finita sui compatti, quindi rimarrà solo da verificare che la misura μ è nulla sui fasci di rette per un punto e che genera d tramite l'Equazione (3.1.1).

Nozioni di topologia e teoria della misura

Elenchiamo qui alcuni prerequisiti necessari alla dimostrazione, che riguardano in particolare dei fatti di topologia e teoria della misura. Citiamo [Tao09] come riferimento per i primi tre risultati, mentre l'ultimo lemma è una facile conseguenza del noto teorema della classe monotona.

Teorema 3.4.1 (Prokhorov). *Sia X uno spazio topologico compatto metrizzabile e sia $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di probabilità sui boreliani di X . Allora esiste una sottosuccessione di μ_n che converge debolmente ad una probabilità μ sui boreliani di X .*

Lemma 3.4.2 (Urysohn). *Sia X uno spazio topologico normale, cioè ogni coppia di chiusi disgiunti K ed L di X può essere separata da una coppia di aperti disgiunti $U \supset K$ e $V \supset L$. Allora dato K un chiuso di X e U un suo intorno aperto, esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che*

$$f = \begin{cases} 1, & \text{su } K; \\ 0, & \text{su } X \setminus U. \end{cases}$$

Nota 3.4.3. Uno spazio topologico compatto di Hausdorff è anche normale, quindi in particolare ogni sottospazio compatto di \mathcal{G} è normale, poiché \mathcal{G} è di Hausdorff.

Lemma 3.4.4 (Classe monotona). *Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio di misura e \mathcal{I} una famiglia di parti stabile per intersezione che genera la σ -algebra \mathcal{F} . Allora due misure che coincidono su \mathcal{I} coincidono anche su \mathcal{F} .*

Notazioni e lemmi di combinatoria sul piano

Introduciamo un po' di notazione che ci sarà utile nel corso della dimostrazione. Prima di tutto, data una curva poligonale $\rho = \overline{x_0 x_1 \dots x_k}$, notiamo che per la proiettività di d si ha

$$l(\rho) = \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Dato un insieme di punti distinti del piano $Q = \{x_1, \dots, x_n\}$, a tre a tre non allineati, indichiamo S_Q l'insieme degli $\binom{n}{2}$ segmenti $\overline{x_i x_j}$. Diciamo inoltre che una retta r del piano *separa* i punti di Q se nessun punto di Q ci appartiene e se c'è almeno un punto di Q in ognuno dei due semipiani generati dalla retta. È facile verificare per induzione che esistono $\binom{n}{2}$ modi di separare i punti di Q con una retta r nel modo appena citato. Prendiamo allora una retta r per ogni modo di separare i punti e chiamiamo R_Q l'insieme che le contiene¹, che perciò avrà cardinalità $\binom{n}{2}$.

Sia ora $r \in R_Q$, che separa i punti di Q in due insiemi i cui involucri convessi sono $K_Q^1(r)$ e $K_Q^2(r)$ (che in particolare sono poligono convessi). Si verifica che esistono due segmenti $\overline{x_1 x_2}, \overline{y_1 y_2} \in S_Q$ che "tangono" internamente i due poligoni $K_Q^1(r)$ e $K_Q^2(r)$, cioè x_1, y_1 sono vertici di $K_Q^1(r)$, x_2, y_2 sono vertici $K_Q^2(r)$ e le rette su cui giacciono $\overline{x_1 x_2}$ e $\overline{y_1 y_2}$ separano i due poligoni. Chiamiamo inoltre ρ_1 e ρ_2 le porzioni di perimetro di

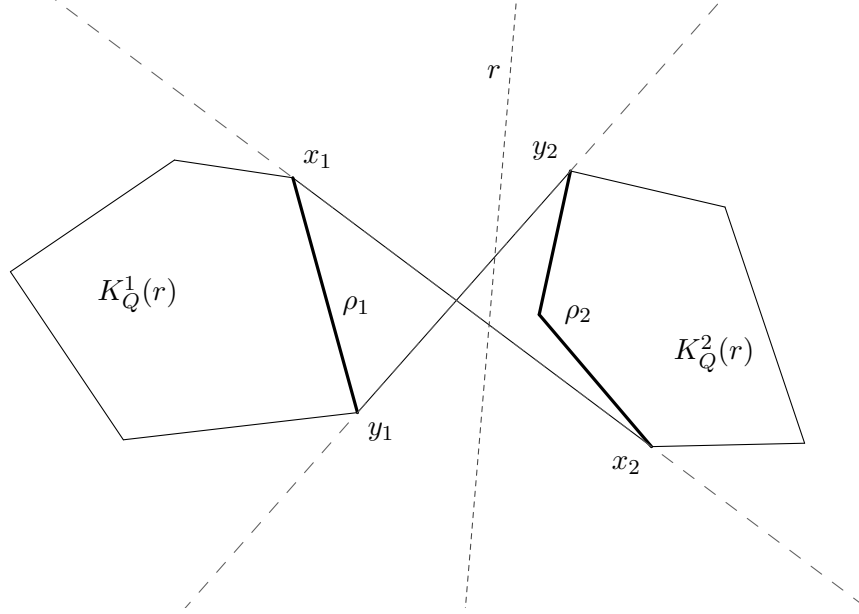


Figura 3.1

$K_Q^1(r)$ e $K_Q^2(r)$ contenute nell'involuppo convesso di x_1, x_2, y_1, y_2 . La Figura 3.1 mostra uno schema chiarificatore di tutte le definizioni.

Possiamo quindi ora definire

$$\sigma_Q(r) := d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) - l(\rho_1) - l(\rho_2).$$

Il seguente lemma è una versione discreta del Teorema 2.3.2 (Formula di Crofton), ristretta ai punti in Q e alle rette in R_Q ; tale lemma mette infatti in relazione la distanza fra due punti in Q con il “peso” delle rette che intersecano il segmento che li collega e che stanno in R_Q . In questo caso la nostra nozione di peso di una retta $r \in R_Q$ sarà data da $\sigma_Q(r)$.

Lemma 3.4.5. *Sia $Q = \{x_1, \dots, x_n\}$ come sopra, allora vale che:*

$$2d(x_i, x_j) = \sum_{r \in R_Q \cap \overline{x_i x_j}} \sigma_Q(r).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è molto semplice e richiede solo di verificare alcuni casi. L'idea è mostrare che per ogni $x_k, x_h \in Q$ il termine $d(x_k, x_h)$ compare nella sommatoria a destra tante volte con il segno positivo quante con quello negativo per $\{x_k, x_h\} \neq \{x_i, x_j\}$, mentre per $\{x_k, x_h\} = \{x_i, x_j\}$ compare due volte con il segno positivo. Per farlo bisogna distinguere i casi a seconda della relazione fra $\{x_k, x_h\}$ e $\{x_i, x_j\}$ (uguali, disgiunti o che si intersecano in un elemento) e tenendo presente se la retta che contiene $\overline{x_k x_h}$ interseca $\overline{x_i x_j}$ oppure no. Non specifichiamo però tali casi, che sono tutti molto semplici e si possono trovare esplicitamente in [Ale78]. \square

¹Notare che perciò R_Q non è univocamente determinato, ma quando lo useremo supporremo di averlo definito scegliendo un insieme di rette generico che rispetta le ipotesi dette.

Da questo abbiamo ovviamente il seguente corollario.

Corollario 3.4.6. *Dato un poligono convesso C con vertici y_1, \dots, y_k in un insieme $Q = \{x_1, \dots, x_n\}$ come sopra, vale che*

$$l(C) = \sum_{r \in R_Q \cap [C]} \sigma_Q(r),$$

dove con $l(C)$ indichiamo la lunghezza del perimetro di C visto come curva poligonale $\overline{y_1 \dots y_k y_1}$.

Mostriamo ora due lemmi di facile dimostrazione che ci aiuteranno nella costruzione della misura.

Lemma 3.4.7. *Dati C_1 e C_2 poligoni convessi tali che $C_1 \subseteq C_2$ vale che $l(C_1) \leq l(C_2)$.*

Dimostrazione. Chiamiamo x_1, x_2, \dots, x_k i vertici di C_1 . La retta che contiene $\overline{x_1 x_2}$ interseca il bordo di C_2 in y_1 e y_2 , con y_1 dalla parte di x_1 e y_2 dalla parte di x_2 (vedere la Figura 3.2). Tale retta inoltre, divide il bordo di C_2 in due curve poligonali che

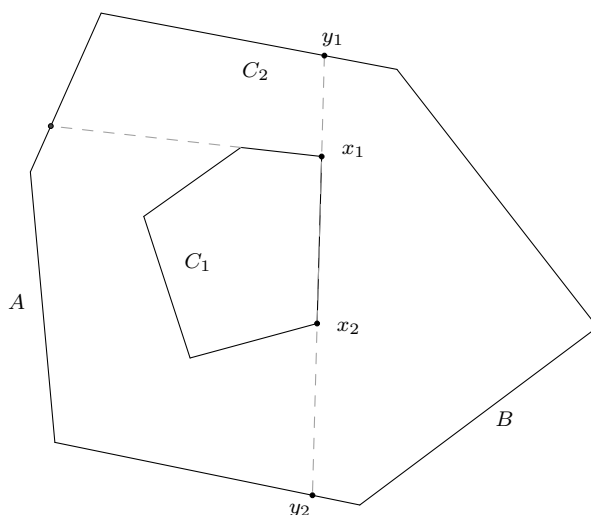


Figura 3.2

chiamiamo A e B . Chiamiamo $C_2^{(1)}$ il poligono che ha come bordo A e il segmento $\overline{y_1 y_2}$. Allora, utilizzando la disuguaglianza triangolare, si ha che

$$l(C_2) = l(A) + l(B) \geq l(A) + d(y_1, y_2) = l(C_2^{(1)}).$$

Ora possiamo ripetere la stessa costruzione sul segmento $\overline{x_2 x_3}$ di C_1 e il poligono $C_2^{(1)}$, generando il poligono $C_2^{(2)}$. Continuiamo così finché al k -esimo passo avremo $C_2^{(k)} = C_1$ e di conseguenza

$$l(C_2) \geq l(C_2^{(1)}) \geq \dots \geq l(C_2^{(k)}) = l(C_1),$$

da cui la tesi. □

Lemma 3.4.8. *Dato Q come sopra, abbiamo che $\sigma_Q(r) \geq 0$ per ogni $r \in R_Q$.*

Dimostrazione. Se entrambi $K_Q^1(r)$ e $K_Q^2(r)$ sono punti il risultato è ovvio. Supponiamo allora che non lo siano e chiamiamo z il punto di intersezione fra $\overline{x_1x_2}$ e $\overline{y_1y_2}$. Dal Lemma 3.4.7 si ottiene allora che $d(x_1, z) + d(y_1, z) \geq l(\rho_1)$ e $d(x_2, z) + d(y_2, z) \geq l(\rho_2)$. Sommando infine queste due equazioni e sfruttando la proiettività di d otteniamo proprio $d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \geq l(\rho_1) + l(\rho_2)$. \square

Costruzione della misura su un poligono convesso

Sia C un poligono convesso (limitato) chiuso e con parte interna non vuota. Sia inoltre $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso di punti di C , a tre a tre non allineati, a cui in particolare appartengono i vertici di C . Chiamiamo ora $Q_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'insieme dei primi n punti di tale insieme denso. Da qui in avanti, considereremo n abbastanza grande in modo che i vertici di C siano contenuti in Q_n .

Poniamo ora su $[C] \subseteq \mathcal{G}$ la topologia di sottospazio e definiamo una misura atomica μ_n sull'insieme di rette $[C]$ tale che

$$\mu_n(r) := \begin{cases} \sigma_{Q_n}(r), & \text{se } r \in R_{Q_n}; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questa è una buona definizione grazie al Lemma 3.4.8. Osserviamo inoltre che, grazie al Corollario 3.4.6, si ha $\mu_n([C]) = l(C)$, che perciò è costante al variare di n . Di conseguenza possiamo applicare il Teorema 3.4.1 (Prokhorov) (grazie alla Nota 2.1.3 che ci dà la compattezza di $[C]$) e ottenere che esiste una sottosuccessione μ_{n_k} che converge debolmente ad una misura di Radon μ_C sui boreliani di $[C]$, per la quale inoltre vale che $\mu_C([C]) = l(C)$.

Vediamo ora un lemma che ci aiuterà a dimostrare le proprietà cercate sulla misura μ_C appena definita.

Lemma 3.4.9. *Se $C_0 \subseteq \overset{\circ}{C}^2$ è un poligono convesso chiuso, allora $\mu_C([\overset{\circ}{C}_0]) \leq l(C_0) \leq \mu_C([C_0])$.*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che C_0 abbia parte interna non vuota e che i suoi vertici appartengano al denso D . Consideriamo una successione di poligoni convessi chiusi $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ con vertici in D , contenuti nella parte interna di C_0 e la cui unione è $\overset{\circ}{C}_0$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, per il Lemma 3.4.2 (Urysohn), esiste una funzione $f_m : [C] \rightarrow [0, 1]$ continua tale che

$$f_m = \begin{cases} 1, & \text{su } [A_m]; \\ 0, & \text{su } [C] \setminus [\overset{\circ}{C}_0]. \end{cases}$$

Perciò, per k abbastanza grande affinché i vertici di A_m appartengano a Q_{n_k} , abbiamo che $\mu_C([A_m]) \leq \int_{[C]} f \, d\mu_C$ e $\int_{[C]} f \, d\mu_{n_k} \leq \mu_{n_k}([C_0]) = l(C_0)$. Da cui, per la convergenza debole di μ_{n_k} a μ_C , otteniamo che

$$\mu_C([A_m]) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}([C_0]) = l(C_0).$$

²Dato un sottoinsieme A di uno spazio topologico X , indichiamo con $\overset{\circ}{A}$ la sua parte interna.

Prendendo ora il limite per $m \rightarrow \infty$, si ha perciò $\mu_C([\mathring{C}_0]) \leq l(C_0)$, che è la prima disuguaglianza cercata.

Mantieniamo ora l'ipotesi che C_0 abbia vertici in D , ma ammettiamo che abbia parte interna vuota. Vogliamo dimostrare che in queste ipotesi vale la seconda disuguaglianza cercata con un processo analogo al precedente. Sia perciò $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ una successione decrescente di poligoni convessi chiusi, con vertici in D , nella cui parte interna è contenuto C_0 e la cui intersezione è proprio C_0 . Allora per ogni $m \in \mathbb{N}$, grazie al Lemma 3.4.2 (Urysohn), esiste una funzione $f_m : [C] \rightarrow [0, 1]$ continua tale che

$$f = \begin{cases} 1, & \text{su } [C_0]; \\ 0, & \text{su } [C] \setminus [B_m]. \end{cases}$$

A questo punto si applica un ragionamento del tutto simile al precedente per ottenere che $l(C_0) \leq \mu_C([C_0])$.

Consideriamo ora un generico poligono convesso chiuso $C_0 \subseteq \mathring{C}$. Possiamo approssimare C_0 dall'alto e dal basso con poligoni convessi $A \subseteq C_0 \subseteq B$ con vertici in D . Per quanto dimostrato prima e per il Lemma 3.4.7, abbiamo perciò

$$\mu_C([\mathring{A}]) \leq l(A) \leq l(C_0) \leq l(B) \leq \mu_C([B]),$$

da cui mandando al limite A e B a C_0 otteniamo proprio quanto cercato. \square

Vediamo ora che μ_C rispetta le due proprietà fondamentali che cerchiamo, cioè che sia nulla sui fasci di rette per un punto e che valga $\mu_C([\overline{xy}]) = 2d(x, y)$, per ogni $x, y \in C$.

Proposizione 3.4.10. *La misura μ_C è nulla sui fasci di rette per un punto, cioè, per ogni punto $x \in C$, vale $\mu_C([\{x\}]) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ una successione decrescente di triangoli chiusi tali che $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \{x\}$ e per i quali $x \in \mathring{C}_k$. Allora, per il Lemma 3.4.9, abbiamo che

$$\mu_C([\{x\}]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_C([\mathring{C}_k]) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} l(C_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} l(\delta_k^{(1)}) + l(\delta_k^{(2)}) + l(\delta_k^{(3)}) = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta alla continuità della distanza d . \square

Proposizione 3.4.11. *Per ogni $x, y \in C$, vale la relazione $\mu_C([\overline{xy}]) = 2d(x, y)$.*

Dimostrazione. Sia $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ una successione decrescente di rettangoli chiusi tali che $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \overline{xy}$ e $\overline{xy} \in \mathring{C}_k$. Inoltre se chiamiamo $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$ i vertici del rettangolo C_k , chiediamo che le successioni $(x_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(x_k^{(2)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergano a x , mentre le successioni $(y_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y_k^{(2)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergano a y . Per il Lemma 3.4.9, abbiamo allora che

$$2d(x, y) \leq \mu_C([\overline{xy}]) \leq \mu_C([\mathring{C}_k]) \leq l(C_k).$$

Inoltre, per la continuità di d , abbiamo però che $l(C_k) \rightarrow 2d(x, y)$ per $k \rightarrow \infty$ e di conseguenza $2d(x, y) = \mu_C([\overline{xy}])$. \square

Infine mostriamo l'unicità della misura μ_C , che risulta infatti l'unica misura di Radon sui boreliani di $[C]$ tale che $\mu_C([\overline{xy}]) = 2d(x, y)$, per ogni $x, y \in C$.

Proposizione 3.4.12. *Date due misure μ_C, μ'_C di Radon sui boreliani di C , nulle sui fasci di rette per un punto e tali che*

$$\mu_C([\overline{xy}]) = \mu'_C([\overline{xy}]) = 2d(x, y),$$

per ogni $x, y \in C$, vale che $\mu_C = \mu'_C$.

Dimostrazione. Chiamiamo a_1, \dots, a_k i lati semiaperti del poligono convesso chiuso C , in modo che

$$[C] = \bigsqcup_{1 \leq i < j \leq k} ([a_i] \cap [a_j]),$$

dove \bigsqcup indica l'unione disgiunta. Ci basta perciò mostrare che μ_C e μ'_C coincidono sui boreliani del sottospazio $[a_i] \cap [a_j]$ per ogni $1 \leq i < j \leq k$.

Consideriamo allora $H_{ij} = \{[\delta_1] \cap [\delta_2] : \delta_1 \subseteq a_i, \delta_2 \subseteq a_j, \delta_1, \delta_2 \in \Delta\}$, che è facilmente una famiglia stabile per intersezione che genera la σ -algebra di Borel su $[a_i] \cap [a_j]$. Inoltre μ_C e μ'_C coincidono sugli elementi di H_{ij} ; infatti per il punto 2 del Lemma 3.2.1, dati $\delta_1 \subseteq a_i, \delta_2 \subseteq a_j, \delta_1, \delta_2 \in \Delta$, si ha che

$$\begin{aligned} \mu_C([\delta_1] \cap [\delta_2]) &= \frac{1}{2}(\mu_C(D_1) + \mu_C(D_2) - \mu_C(S_1) - \mu_C(S_2)) = \\ &= l(D_1) + l(D_2) - l(S_1) - l(S_2) = \\ &= \frac{1}{2}(\mu'_C(D_1) + \mu'_C(D_2) - \mu'_C(S_1) - \mu'_C(S_2)) = \mu'_C([\delta_1] \cap [\delta_2]), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la stessa notazione del lemma. Possiamo quindi applicare il Lemma 3.4.4 (Classe monotona) e ottenere che μ_C e μ'_C sono uguali sui boreliani di $[a_i] \cap [a_j]$, da cui la tesi. \square

Costruzione della misura su tutto il piano

Consideriamo ora una successione crescente $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di poligoni chiusi la cui unione è tutto \mathbb{R}^2 e notiamo innanzitutto che $([C_n])_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione crescente di compatti di \mathcal{G} la cui unione è proprio \mathcal{G} .

Costruiamo quindi la misura μ di un boreliano A di \mathcal{G} come

$$\mu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{C_n}(A \cap [C_n]).$$

Notiamo che, per la Proposizione 3.4.12, vale che $\mu_{C_n} = \mu_{C_m}|_{[C_n]}$, per ogni $m > n$, fatto che sfrutteremo implicitamente nel corso della dimostrazione.

Vediamo allora innanzitutto che questa è una buona definizione e genera una misura di Radon sui boreliani di \mathcal{G} . La successione $\mu_{C_n}(A \cap [C_n])$ è crescente, infatti

$$\mu_{C_n}(A \cap [C_n]) = \mu_{C_{n+1}}(A \cap [C_n]) \leq \mu_{C_{n+1}}(A \cap [C_{n+1}]),$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, perciò il limite esiste. Con facili ragionamenti analoghi si verifica che μ è proprio una misura e inoltre tale misura è di Radon. Prendiamo infatti un compatto $K \subseteq \mathcal{G}$, allora definitivamente apparterrà alla successione $([C_n])_{n \in \mathbb{N}}$. Di conseguenza $\mu_{C_n}(K \cap [C_n])$ sarà definitivamente costante uguale a $\mu(K)$ e in particolare minore o uguale a $\mu_{C_N}(K \cap [C_N]) = l(C_N)$ per un certo N , quindi $\mu(K)$ è finito.

Anche verificare che μ è nulla sui fasci e genera d tramite l'Equazione (3.1.1) è a questo punto molto facile. Sia $x \in \mathbb{R}^2$, allora definitivamente apparterrà a C_n e di conseguenza, per $n > N$ abbastanza grande, grazie alla Proposizione 3.4.10 si ha

$$\mu(\{x\}) = \mu_{C_n}(\{x\} \cap [C_n]) = \mu_{C_n}(\{x\}) = 0.$$

Consideriamo ora due punti $x, y \in \mathbb{R}^2$. Analogamente a prima, definitivamente il segmento \overline{xy} appartiene a C_n , quindi per $n > N$ abbastanza grande abbiamo che

$$\mu(\overline{xy}) = \mu_{C_n}(\overline{xy} \cap [C_n]) = \mu_{C_n}(\overline{xy}) = 2d(x, y),$$

dove abbiamo utilizzato la Proposizione 3.4.11.

COMMENTI CONCLUSIVI E SOLUZIONI ALTERNATIVE

In quest'ultimo capitolo vogliamo innanzitutto commentare la soluzione che Ambartzumian presenta in [Amb76] e nella quale non riusciamo a giustificare un passaggio enunciato. Successivamente presenteremo due diversi approcci al problema, che abbiamo affrontato nel tentativo di trovare una soluzione alternativa al Teorema 3.1.2 (Quarto problema di Hilbert). Concluderemo infine ponendo una domanda, alla quale non siamo riusciti a trovare risposta, riguardo alla relazione fra le definizioni di distanza proiettiva globale e locale.

4.1 Soluzione di Ambartzumian

Nel 1976 Ambartzumian pubblicò indipendentemente da Alexander una soluzione sostanzialmente analoga a quella che abbiamo presentato, che dimostrava esattamente lo stesso risultato nel caso però di pseudo-distanze continue (diversamente da Alexander). L'enunciato contenuto in [Amb76] è perciò esattamente quello della Proposizione 3.1.4 (Quarto problema di Hilbert per pseudo-distanze).

Come abbiamo osservato, il passaggio più delicato è la costruzione della misura a partire dalla pseudo-distanza. Ambartzumian presenta però una costruzione molto naturale, che sintetizziamo di seguito. L'idea di fondo è la stessa: costruire innanzitutto una misura μ_C per ogni poligono convesso $C \subseteq \mathbb{R}^2$ e poi estenderla a tutto \mathcal{G} analogamente a quanto abbiamo fatto nel capitolo precedente. Consideriamo quindi un poligono convesso C con lati semiaperti a_1, \dots, a_k , allora ovviamente vale che

$$[C] = \bigsqcup_{1 \leq i < j \leq k} ([a_i] \cap [a_j]),$$

dove \bigsqcup indica l'unione disgiunta. Ci basta perciò costruire la misura μ_C sui boreliani di $[a_i] \cap [a_j]$ per ogni $1 \leq i < j \leq k$, per poi poterla estendere ai boreliani di tutto $[C]$.

Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 3.4.12, chiamiamo ora $H_{ij} = \{[\delta_1] \cap [\delta_2] : \delta_1 \subseteq a_i, \delta_2 \subseteq a_j, \delta_1, \delta_2 \in \Delta\}$. Si vede facilmente che H_{ij} è una semi-algebra¹ e genera la σ -algebra di Borel di $[a_i] \cap [a_j]$.

¹Dato X insieme, diciamo che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una semi-algebra se:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
2. dati $A, B \in \mathcal{A}$, allora $A \cap B \in \mathcal{A}$;

Dati $\delta_1 \subseteq a_i$, $\delta_2 \subseteq a_j$, con $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$, tenendo presente il Lemma 3.2.1, definiamo quindi

$$\mu_C([\delta_1] \cap [\delta_2]) := l(D_1) + l(D_2) - l(S_1) - l(S_2),$$

dove ricordiamo che D_1 e D_2 sono i segmenti che collegano un estremo di δ_1 e uno di δ_2 e lasciano δ_1 e δ_2 in due semipiani distinti, mentre S_1 ed S_2 collegano sempre un estremo di δ_1 e uno di δ_2 ma lasciano i due segmenti nello stesso semipiano.

A questo punto Ambartzumian dimostra che μ_C rispetta le seguenti tre proprietà:

1. $\mu_C(A) \geq 0$ per ogni $A \in H_{ij}$;
2. μ_C è finitamente additiva su H_{ij} , cioè dato $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$ vale $\mu_C(A) = \mu_C(A_1) + \dots + \mu_C(A_k)$ per ogni $A \in H_{ij}$ e $A_1, \dots, A_k \in H_{ij}$ disgiunti;
3. $\mu_C(A_n) \rightarrow 0$ per $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione decrescente di elementi di H_{ij} la cui intersezione è vuota.

Quindi afferma che queste tre proprietà “implicano che μ_C può essere estesa ad una misura sui boreliani di $[C]$ ”.

Non riusciamo però a giustificare tale passaggio. L’enunciato che sembra utilizzare Ambartzumian, ma che non enuncia mai esplicitamente, è il seguente.

Proposizione 4.1.1. *Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio misurabile e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ una semi-algebra che genera la σ -algebra \mathcal{F} . Sia inoltre $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata tale che:*

1. $m(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}$;
2. m è finitamente additiva su \mathcal{A} , cioè dato $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$ vale $m(A) = m(A_1) + \dots + m(A_k)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ disgiunti;
3. $m(A_n) \rightarrow 0$ per $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione decrescente di elementi di \mathcal{A} la cui intersezione è vuota.

Allora m può essere estesa ad una misura su \mathcal{F} .

Tale proposizione, così come detta, risulta però falsa in generale. Consideriamo infatti $X := [0, 1] \setminus \mathcal{C}$, dove \mathcal{C} è l’insieme di Cantor. Sia $\mathcal{F} := \mathcal{B}(X)$ la σ -algebra di Borel e sia

$$\mathcal{A} := \left\{ \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} \right) \cap X : n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Definiamo infine

$$m \left(\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} \right) \cap X \right) := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{se } \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} \right) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si verifica facilmente che \mathcal{A} ed m hanno le proprietà richieste, però m non può essere estesa ad una misura su \mathcal{F} . Consideriamo infatti tutti gli elementi di \mathcal{A} che hanno misura nulla, questi sono disgiunti e numerabili e la loro unione è tutto X , ma la somma delle loro misure ovviamente non è $m(X) = 1$.

Perciò evidentemente sono necessarie ulteriori ipotesi, che probabilmente Ambartzumian dà per scontate. Ci poniamo dunque la seguente domanda.

-
3. dati $A, B \in \mathcal{A}$, esistono $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ disgiunti tali che $A \setminus B = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$.

Problema. *Quali ipotesi dobbiamo aggiungere alla Proposizione 4.1.1 in modo da renderla vera e in modo che la costruzione di Ambartzumian ancora le rispetti?*

4.2 Approccio per dualità proiettiva

Nel Capitolo 2 (Topologia sulle rette del piano e formula di Crofton) abbiamo visto la rappresentazione delle rette del piano tramite la dualità con il cilindro. La scelta di tale rappresentazione è a posteriori giustificata dal fatto che valga il Teorema 2.3.2 (Formula di Crofton), dove la misura sulle rette su cui si sta integrando è proprio quella indotta dalla misura standard sul cilindro.

C'è però una parametrizzazione forse più naturale dello spazio topologico \mathcal{G} . Fissiamo infatti un'origine nel piano, che supponiamo essere il punto $(0,0)$. Allora possiamo mettere in corrispondenza ogni retta r del piano non passante per l'origine con il suo polo rispetto alla circonferenza unitaria centrata nell'origine. Questa non è altro che la dualità proiettiva fra le rette e i punti del piano. Abbiamo così una mappa fra le rette del piano non passanti per l'origine e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che in particolare è facilmente un omeomorfismo (basta guardare la dualità con il cilindro).

Vorremmo ora definire la misura μ richiesta dal Teorema 3.1.2 (Quarto problema di Hilbert) a partire da una pseudo-distanza proiettiva e continua d , poiché abbiamo visto essere il punto delicato della dimostrazione del problema. Per farlo, grazie alla rappresentazione appena enunciata, possiamo costruirla su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; per estenderla a \mathcal{G} basterà poi utilizzare la dualità appena citata e porre che μ sia 0 sul fascio di rette per l'origine.

Vediamo intanto che la generica retta non passante per l'origine $ax + by = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$, tramite dualità proiettiva corrisponde al punto di coordinate (a, b) . Infatti il punto di minima distanza di tale retta dall'origine è $(a/(a^2 + b^2), b/(a^2 + b^2))$, il cui inverso rispetto alla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine è proprio (a, b) .

Perciò l'insieme $[x, \infty) \times [y, \infty)$, con $x, y > 0$ reali, corrisponde alle rette che intersecano entrambi i segmenti con estremi $(0,0)$, $(1/x, 0)$ e $(0,0)$, $(0, 1/y)$. Poniamo dunque

$$\mu([x, \infty) \times [y, \infty)) := \frac{1}{2} [d((0,0), (1/x, 0)) + d((0,0), (0, 1/y)) - d((1/x, 0), (0, 1/y))] .$$

Analogamente l'insieme $\{0\} \times [y, \infty)$ corrisponde alle rette parallele all'asse x che intersecano l'asse y fra $(0,0)$ e $(0, 1/y)$; quindi definiamo

$$\mu(\{0\} \times [y, \infty)) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [d((T, 0), (0, 1/y)) + d((-T, 0), (0, 1/y)) - d((T, 0), (-T, 0))] ,$$

dove il limite facilmente esiste per monotonia in T , usando la disuguaglianza triangolare. Allo stesso modo possiamo definire la misura sugli altri quadranti e semiassi. Notiamo in particolare che, per ogni $x, y > 0$ (gli altri casi sono analoghi) reali, $\mu([x, \infty) \times [y, \infty))$, $\mu(\{0\} \times [y, \infty))$ e $\mu([x, \infty) \times \{0\})$ sono reali e finiti; quindi per differenza

possiamo definire μ su tutti i rettangoli semiaperti dei quattro quadranti e sugli intervalli semiaperti dei quattro semiassi.

Utilizzando Caratheodory si può quindi estendere μ ad una misura sui boreliani di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. In questo modo, perciò, definire una misura μ sullo spazio delle rette \mathcal{G} è molto facile; quello che però manca da dimostrare è che μ sia zero sui fasci di rette per un punto e che generi d tramite l'Equazione (3.1.1).

Osserviamo che il fascio di rette per un punto, tramite dualità proiettiva, corrisponde alla retta polare di tale punto. Per dimostrare il primo fatto mancante basterebbe dunque dimostrare che la misura di una retta non passante per l'origine è 0.

Per il secondo fatto, invece, sarebbe sufficiente mostrare che date due pseudo-distanze proiettive e continue d_1 e d_2 distinte, le misure da loro generate tramite questo procedimento sono diverse. Questo è equivalente a dire che se le due pseudo-distanze coincidono per coppie di punti sugli assi, allora coincidono ovunque. Infatti per definire la misura su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ abbiamo utilizzato solo distanze fra coppie di punti negli assi.

Per avere una dimostrazione completa ci mancano quindi questi due fatti, che sembrano piuttosto elementari, ma di cui non siamo riusciti a trovare una dimostrazione. A posteriori però, assumendo di conoscere già la Proposizione 3.1.4 (Quarto problema di Hilbert per pseudo-distanze), le considerazioni che abbiamo fatto in questa sezione mostrano la seguente proposizione.

Proposizione 4.2.1. *Sia d una pseudo-distanza proiettiva e continua sul piano, allora d è univocamente definita dai valori che assume per coppie di punti sugli assi.*

Questo ribadisce l'idea, già accennata nel Capitolo 1 (Enunciato del problema e primi esempi), che una distanza proiettiva sul piano abbia una forte struttura.

4.3 Approccio tramite il teorema di Choquet

Il fatto che la soluzione da noi presentata del quarto problema di Hilbert abbia a che fare con una rappresentazione tramite una misura, può far pensare al teorema di Choquet, che per l'appunto mostra una rappresentazione dei punti di uno spazio topologico convesso con delle determinate proprietà tramite una misura supportata dai suoi estremi. Presentiamo quindi tale teorema in una delle versioni per coni convessi, che è l'ambientazione che sarà a noi più utile.

Innanzitutto introduciamo alcune definizioni che ci serviranno ad enunciare il teorema di Choquet e spiegheranno per esempio i concetti di spazio convesso, rappresentazione tramite una misura e di misura supportata da un insieme. Prima di tutto definiamo quindi gli spazi in cui lavoreremo.

Definizione 4.3.1. Uno *spazio vettoriale topologico* è uno spazio vettoriale su \mathbb{R}^2 tale che le operazioni di somma e moltiplicazione per scalare sono continue.

Definizione 4.3.2. Uno spazio vettoriale topologico è detto *localmente convesso* se la sua origine ammette una base di intorni convessi. Equivalentemente uno spazio vettoriale topologico è detto localmente convesso se ogni suo punto ammette una base di intorni convessi.

²Si può definire analogamente uno spazio vettoriale topologico su un generico campo topologico \mathbb{K} , ma ci limitiamo al caso reale poiché è l'unico che ci interessa in questo contesto.

Vediamo quindi tre definizioni piuttosto intuitive che ci serviranno ad enunciare il teorema di Choquet.

Definizione 4.3.3. Sia X un sottoinsieme non vuoto di uno spazio localmente convesso E e sia μ una probabilità sui boreliani di X . Diciamo che un punto $x \in X$ è *rappresentato* da μ se $f(x) = \int_X f d\mu$ per ogni funzionale continuo e lineare f su E .

Definizione 4.3.4. Sia μ una misura di Borel sullo spazio topologico X e sia B un boreliano di X . Allora diciamo che la misura μ è *supportata* da B se $\mu(X \setminus B) = 0$.

Definizione 4.3.5. Sia X un sottospazio convesso di uno spazio localmente convesso E . Un punto $x \in X$ è detto *punto estremale* di X se, qualora $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ con $0 < \lambda < 1$ e $y, z \in X$, si ha $y = z = x$; cioè x non appartiene a nessun segmento aperto contenuto in X .

Enunciamo quindi la versione di Choquet originale, che tratta di spazi metrizzabili, compatti e convessi.

Teorema 4.3.6 (Choquet). *Sia X un sottospazio metrizzabile, compatto e convesso di uno spazio localmente convesso E e sia $x_0 \in X$. Allora esiste una probabilità μ su X che rappresenta x_0 ed è supportata dai punti estremali di X .*

È possibile generalizzare facilmente tale teorema a coni convessi chiusi (non necessariamente compatti), che però hanno una base che rispetta le ipotesi del teorema di Choquet.

Definizione 4.3.7. Sia K un cono chiuso convesso. Diciamo che $B \subseteq K$ è una *base* di K se per ogni $y \in K$ esistono unici $x \in B$ e $\alpha \geq 0$ tali che $y = \alpha x$.

A questo punto otteniamo facilmente la generalizzazione cercata del teorema di Choquet per coni convessi.

Teorema 4.3.8 (Choquet - coni convessi). *Sia K un cono convesso chiuso contenuto in uno spazio localmente convesso E e che ammette una base B metrizzabile, compatta e convessa. Allora, dato $x_0 \in K$, esiste una misura finita μ su B che rappresenta x_0 ed è supportata dai punti estremali di B .*

Naturalmente questa è solo una prima versione del teorema di Choquet per coni convessi, esistono però molte altre formulazioni con ipotesi alleggerite o modificate, in particolare che non richiedono l'ipotesi di metrizzabilità. Non avendo però concluso la dimostrazione del problema di Hilbert tramite il teorema di Choquet, non sappiamo precisamente quale sarebbe più utile e abbiamo quindi presentato la più diretta e semplice da enunciare.

Veniamo quindi al nostro teorema. Non limitiamoci alle pseudo-distanze proiettive e continue sul piano e togliamo quindi l'ipotesi di continuità. Notiamo facilmente che le pseudo-distanze proiettive su \mathbb{R}^2 sono un cono convesso nello spazio vettoriale delle funzioni localmente limitate da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in \mathbb{R} che sono nulle sulla diagonale. La prima cosa che ci servirebbe sarebbe quindi trovare una topologia sull'insieme delle pseudo-distanze proiettive che lo renda un chiuso con una base compatta, che rispetti le ipotesi del Teorema 4.3.8 (Choquet - coni convessi) o analoghe. La seguente proposizione può aiutare a costruire tale topologia.

Proposizione 4.3.9. *Sia K un cono convesso chiuso in uno spazio localmente convesso E tale che $K \cap (-K) = \{0\}$. Allora K ammette una base compatta se e solo se K è localmente compatto.*

L'altro problema sta nel trovare i punti estremali di un'eventuale base. Vediamo innanzitutto la seguente definizione.

Definizione 4.3.10. Una *raggio* ρ di un cono convesso K è un sottoinsieme di K della forma $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$, dove $x \in K \setminus \{0\}$.

Un raggio ρ di K si dice invece *raggio estrema* se vale che se $x \in \rho$ e $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, con $y, z \in K$ e $0 < \lambda < 1$, allora $y, z \in \rho$.

Notiamo che dato un cono convesso chiuso K che ammette una base compatta e convessa B , i suoi raggi estremali sono generati dai punti estremali di B . In particolare i punti estremali di B sono l'intersezione fra B e i raggi estremali di K .

Quindi vorremmo almeno trovare i raggi estremali del cono convesso delle pseudo-distanze proiettive e una topologia su tale cono che lo renda localmente compatto. Non siamo riusciti a trovare una risposta a queste domande, ma possiamo innanzitutto mostrare alcune pseudo-distanze particolarmente significative che appartengono ai raggi estremali del cono considerato.

Consideriamo un semipiano H di \mathbb{R}^2 aperto, chiuso o semiaperto (cioè che contiene una semiretta aperta o chiusa del suo bordo). Definiamo quindi d_H la pseudo-distanza proiettiva tale che $d_H(x, y) = 1$ se e solo se esattamente uno tra x e y appartiene ad H e 0 altrimenti. Tali pseudo-distanze d_H facilmente appartengono ai raggi estremali del cono convesso di tutte le pseudo-distanze proiettive. Chiamiamo ora \mathcal{H} l'insieme di tutti i semipiani H . Vediamo innanzitutto che esiste una facile funzione $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$, che associa ad ogni semipiano H la sua retta caratteristica. Tale funzione è ovviamente surgettiva, ma non iniettiva. Supponiamo però che su \mathcal{H} ci sia una topologia che rende π continua.

La Proposizione 3.1.4 (Quarto problema di Hilbert per pseudo-distanze) ci dice allora che, data una pseudo-distanza continua e proiettiva d sul piano, esiste una misura di Radon μ sui boreliani di \mathcal{H} tale che

$$d(x, y) = \int_{\mathcal{H}} d_H(x, y) d\mu$$

e tale che μ è nulla sulle controimmagini di fasci di rette per un punto tramite π .

Questo ci fa ben pensare per una possibile applicazione del teorema di Choquet (naturalmente con ipotesi modificate) per rappresentare tutte le pseudo-distanze proiettive del piano, per esempio con una generica misura di Radon μ sui boreliani di \mathcal{H} .

4.4 Definizione globale e locale per distanze proiettive

Ricordiamo che nel corso di tutta la trattazione abbiamo preso come definizione di geodetica quella globale, come abbiamo specificato in particolare nella Definizione 1.1.4. Generalmente però si parla di geodetica come una curva che localmente minimizza la distanza, come vediamo nella seguente definizione.

Definizione 4.4.1 (Geodetica locale). Dati (X, d) spazio metrico e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva continua, diciamo che γ è una *geodetica locale* se localmente è una geodetica, cioè per ogni $t \in (a, b)$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ è una geodetica (e similmente per $t = a$ e $t = b$).

Sappiamo che in generale le due definizioni non sono equivalenti, anche nel caso particolare in cui $X = \mathbb{R}^2$ e d è una distanza che induce la topologia euclidea. Ci chiediamo però se le due definizioni coincidono se $X = \mathbb{R}^2$ e d è una distanza proiettiva e continua, poiché in questo caso la regolarità guadagnata potrebbe essere sufficiente.

Tale domanda sorge dal fatto che la soluzione variazionale del problema, come presentata per esempio in [Alv03], prende come definizione di geodetica quella locale, per poi utilizzare il fatto che una curva $\gamma(t)$ è una geodetica per una metrica Finsler liscia se e solo se rispetta le equazioni di Eulero-Lagrange. Non entriamo nei dettagli delle definizioni e degli enunciati, ma chiudiamo con la seguente domanda.

Problema. *Sia d una distanza proiettiva e continua sul piano. È vero che le definizioni di geodetica e geodetica locale in questo caso coincidono?*

Bibliografia

- [Ale78] R. Alexander, *Planes for which the lines are the shortest paths between points*, Illinois Journal of Mathematics, **22** (1978), pp. 177-190.
- [Alv03] J. C. Alvarez, *Hilbert's fourth problem in two dimension*, MASS selecta: teaching and learning advanced undergraduate mathematics (2003), American Mathematical Society, pp. 165-183.
- [Amb76] R. V. Ambartzumian, *A note on pseudo-metrics on the plane*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **37** (1976), pp. 145-155.
- [Pap14] A. Papadopoulos, *On Hilbert's fourth problem*, Handbook of Hilbert geometry, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, **22** (2014), European Mathematical Society, pp. 391-432.
- [Phe01] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Second Edition, Lectures Notes in Mathematics **1757**, Springer.
- [Alv13] J. C. Alvarez, *Choquet theory and Hilbert's fourth problem*, Mathoverflow (2013), <http://mathoverflow.net/q/150329/84071>.
- [Tao09] T. Tao, *245B, Notes 12: Continuous functions on locally compact Hausdorff spaces*, What's new (2009), <https://goo.gl/zTwm7i>.

