Spazi topologici normali e lemma di Urysohn

Gioacchino Antonelli, Francesco Florian,
Guglielmo Nocera, Luigi Pagano

11 marzo 2014

Indice

1 Assiomi di separazione 1

2 Lemma di Urysohn 2

3 Teorema di Tietze 5

4 COMPLEMENTI 7

4.1 Spazi normali e perfettamente normali 7

4.1.1 Esempi di spazi normali ma non perfettamente normali 9

4.2 Funzioni continue da uno spazio topologico nei reali 10

4.3 Compattificazione di Alexandrov 11

Sommario

In questo lavoro ci occupiamo di definire gli spazi topologici normali per poi dare alla normalità una caratterizzazione più potente legata alla nozione di continuità: mostreremo che l'esistenza di un certo tipo di funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ è equivalente alla normalità. Tratteremo in seguito l'estensione di funzioni continue da un chiuso dello spazio a tutto lo spazio, dimostrando il Teorema di estensione di Tietze.

1 Assiomi di separazione

Definizione 1.1. *Si definisce spazio topologico una coppia (X, τ) ove X è un insieme e $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale per cui $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$ e τ sia stabile per unioni infinite e intersezioni finite.*

Definizione 1.2. *Uno spazio topologico (X, τ) si dice:*

1. $\mathbf{T_1}$ *se dati due punti x e y esistono sempre due aperti A e B tali che $x \in A$, $x \notin B$, e $y \in B$, $y \notin A$ (i. e. i punti sono chiusi)*

2. $\mathbf{T_2}$ *(o Hausdorff) se dati due punti x e y esistono sempre due aperti disgiunti A e B tali che $x \in A$ e $y \in B$*

3. ***regolare*** *se per ogni chiuso F e per ogni punto $x \notin F$ esistono due aperti disgiunti V e W tali che $x \in V$ e $F \subseteq W$ (e $\mathbf{T_3}$ se è anche T_1)*

4. ***normale*** *se per ogni coppia di chiusi disgiunti A, B esistono due aperti disgiunti V e W tali che $A \subseteq V$ e $B \subseteq W$ (e* $\mathbf{T_4}$ *se è anche T_1).*

Lemma 1.1 (Caratterizzazione equivalente degli spazi normali)**.** *Uno spazio topologico (X, τ) è normale se e solo se per ogni F chiuso in X e ogni aperto U che lo contiene esiste un aperto V tale che $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

DIMOSTRAZIONE:

$\Longrightarrow$ Per ogni F chiuso di X e U aperto che lo contiene, abbiamo che $X \setminus U$ è chiuso e disgiunto da F. Per normalità esistono V e W aperti disgiunti tali che $F \subseteq V$ e $X \setminus U \subseteq W$. Allora $V \subseteq (X \setminus W)$. Ma poiché $X \setminus W$ è chiuso, $\overline{V} \subseteq (X \setminus W)$. Allora, poiché $X \setminus W \subseteq U$, abbiamo $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

$\Longleftarrow$ Dati F e G chiusi disgiunti di X, $X \setminus G$ è un aperto contenente F. Per ipotesi esiste allora V aperto tale che $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq (X \setminus G)$, e in particolare $F \subseteq V$ e $G \subseteq (X \setminus \overline{V})$. Poiché $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \varnothing$, segue la tesi ($X$ è normale).

2 Lemma di Urysohn

Lemma 2.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico tale che, dati due chiusi A e B, esiste sempre una funzione continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tale che $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$. Allora (X, τ) è normale.*

DIMOSTRAZIONE:
Dati A, B chiusi, per ipotesi esiste f continua tale che $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$; per un certo $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ consideriamo $V = f^{-1}([0, \epsilon))$ e $W = f^{-1}((1 - \epsilon, 1])$ aperti di [0,1]. Per continuità V e W sono aperti, e sono disgiunti per costruzione. Inoltre, sempre per costruzione, $V \supseteq A$ e $W \supseteq B$. Dunque lo spazio è normale.

Lemma 2.2. *Considerato $[0, 1]$ con la topologia usuale, cioè quella indotta dalla distanza euclidea, sia D un suo sottoinsieme denso (i.e. $\overline{D} = [0, 1]$). Sia $\{F_t\}_{t \in D}$ una famiglia di aperti di un certo spazio topologico (X, τ) tale per cui valgano le due seguenti:*

- $\forall t, s \in D : \quad t < s \Rightarrow F_t \subseteq \overline{F_t} \subseteq F_s$;
- $\displaystyle\bigcup_{t \in D} F_t = X$

Inoltre sia $f : X \to [0, 1]$ definita da

$$f(x) = \inf \, \{t \in D | x \in F_t\} \tag{1}$$

Allora f è continua.

DIMOSTRAZIONE:
Innanzitutto si noti che la f è ben definita dal momento che la seconda ipotesi garantisce $\forall x \in X$ l'esistenza di almeno un $t \in D$ tale che $x \in F_t$.
Sono veri i due seguenti risultati:

- $\forall s \in (0,1]$ si ha che $A = \{x \in X | f(x) < s\} = \displaystyle\bigcup_{t<s} F_t$.

  $\subseteq$ Se $x \in A$, per come è stata posta la definizione di f, si ha che $\inf\{t \in D | x \in F_t\} = s* < s$. Ciò vuol dire che esisterà un certo indice j tale che $s* \leq j < s$ per cui vale $x \in F_j \subseteq \displaystyle\bigcup_{t<s} F_t$.

  $\supseteq$ Se $x \in \displaystyle\bigcup_{t<s} F_t$ allora esiste un certo $j < s$ tale che $x \in F_j$. Ma allora $f(x) = \inf\{t \in D | x \in F_t\} \leq j < s$ e dunque $x \in A$.

- $\forall s \in [0,1]$ si ha che $B = \{x \in X | f(x) \leq s\} = \displaystyle\bigcap_{t>s} \overline{F_t}$.

  $\subseteq$ Se $x \in B = \{x \in X | f(x) \leq s\}$, suppongo per assurdo che x non appartenga a $\displaystyle\bigcap_{t>s} \overline{F_t}$ e dunque passando al complementare, $x \in \displaystyle\bigcup_{t>s} \overline{F_t}^c$. Esiste dunque un certo $j > s$ tale che $x \in \overline{F_j}^c$. Dal momento che, per ipotesi, $\forall i < j \quad F_i \subseteq \overline{F_i} \subseteq F_j \subseteq \overline{F_j}$ ho che $\forall i < j \quad \overline{F_j}^c \subseteq F_i{}^c$. Dunque se x non appartiene a F_i per ogni $i < j$, ciò significa che $\inf\{t \in D | x \in F_t\} \geq j > s$ ovvero $f(x) > s$ che è assurdo.

  $\supseteq$ Sia $x \in \displaystyle\bigcap_{t>s} \overline{F_t}$ e suppongo per assurdo $f(x) = s^* > s$. Per densità di D esistono $j, j' \in D$ tale che $s < j < j' < s^*$. Ma allora $x \in \overline{F_j} \subseteq F_{j'}$ per l'ipotesi richiesta nel lemma, essendo $j < j'$. Ma ciò contraddice l'assunzione di assurdo per cui l'inf sia s^* dal momento che è stato prodotto un indice j' inferiore rispetto a s^* per cui vale $x \in F_{j'}$.

Dalle due proposizioni precedenti è immediato concludere i due seguenti fatti:

- $f^{-1}([0,s))$ è aperto $\forall s \in (0,1]$. Basta notare che $f^{-1}([0,s)) = \{x \in X | f(x) < s\} = \displaystyle\bigcup_{t<s} F_t$ per quanto detto precedentemente, ed è aperto poiché tutti gli F_t lo sono e gli insiemi aperti sono stabili per unioni infinite.

- $f^{-1}((s,1])$ è aperto $\forall s \in [0,1)$. Passando al complementare, infatti, basta mostrare che $f^{-1}([0,s]) = \{x \in X | f(x) \leq s\} = \displaystyle\bigcap_{t>s} \overline{F_t}$ è chiuso. Ma ciò è vero considerata la stabilità dei chiusi (e gli $\overline{F_t}$ lo sono) per intersezioni infinite.

Prima di concludere si noti che $f^{-1}((a,b))$ è chiaramente aperto $\forall\ 0 \leq a < b \leq 1$, dal momento che lo sono $f^{-1}([0,b))$ e $f^{-1}((a,1])$ e gli aperti sono stabili per intersezioni finite.

Abbiamo mostrato ad esercitazione che ogni aperto di $\mathbb{R}$, con la topologia indotta dalla distanza euclidea, è unione numerabile di intervalli aperti (siano essi limitati o illimitati) disgiunti. In maniera del tutto analoga si ripropone la dimostrazione sullo spazio $[0,1]$: in esso ogni aperto è unione numerabile di intervalli aperti disgiunti. Si noti il ruolo perfettamente simmetrico degli intervalli illimitati su $\mathbb{R}$, e degli intervalli della forma $(-\infty, a)$, (b, ∞), che corrispondono agli intervalli della forma $[0,a)$, $(b,1]$ nello spazio $[0,1]$ con la topologia indotta dalla metrica euclidea.

In conclusione sia A un aperto di $[0,1]$. Allora esistono $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ intervalli aperti tali che $A = \displaystyle\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$. Ma allora $f^{-1}(A) = \displaystyle\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_j)$. Ma, avendo esaminato tutti i possibili intervalli aperti nelle osservazioni precedenti, si ha che $f^{-1}(I_j)$ è aperto $\forall j \in \mathbb{N}$ e dunque, essendo gli aperti stabili per unioni infinite, lo è anche $f^{-1}(A)$ garantendo, infine, la continuità di f, dal momento che le controimmagini di aperti sono aperti.

Teorema 2.3 (**Lemma di Urysohn**). *In uno spazio topologico (X, τ) normale, dati due chiusi A, B, con $A \cap B = \varnothing$ $\exists f : X \longrightarrow [0,1]$, con f continua e $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$. f è detta funzione di Urysohn su A e B.*[1]

DIMOSTRAZIONE:
Si consideri un insieme D numerabile e denso in $[0,1]$, con $\{0,1\} \subseteq D$ (ad esempio $\mathbb{Q} \cap [0,1]$); sia $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ una numerazione degli elementi di D, ovvero $\phi(n) = r_n \in D$, con $r_0 = 0,\ r_1 = 1$.
Definiamo ricorsivamente una funzione $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \tau$. Si denoti $\psi(n)$ con A_n.

Per il *Lemma 1.1* esiste un aperto Z con $A = \overline{A} \subseteq Z \subseteq X \backslash B$; dunque è possibile sceglierne uno e porre

$$\psi(0) = A_0 = Z \subseteq X \backslash B = \psi(1)$$

quindi $\forall n \geq 2$, detti $m = \max_{i<n}\{i | r_i < r_n\}$ e $M = \min_{i<n}\{i | r_i > r_n\}$, per il *Lemma 1.1* esiste un aperto Y, con

$$\overline{A_m} \subseteq Y \subseteq \overline{Y} \subseteq A_M$$

e dunque è possibile sceglierne uno e porre $A_n = Y$. Si consideri, ora, la funzione $g : D \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, (indico $g(r)$ con F_r) ponendo $A \subset F_0 = A_0$, $F_1 = X$ e $F_{r_n} = A_n$ $\forall n \geq 2$.

Gli F_t sono quindi una famiglia di insiemi aperti numerati con indici nell'insieme D per cui valgono le seguenti affermazioni:

$$t < s \Longleftrightarrow F_t \subset \overline{F_t} \subset F_s \tag{2}$$

$$\bigcup_{t \in D} F_t = X \tag{3}$$

Allora la funzione $f : X \to [0,1]$ definita da

$$f(x) = \inf_{t \in D} \{t | x \in F_t\}\, \forall x \in X$$

è continua come conseguenza del *Lemma 2.2*. Inoltre si noti che $x \in A \Rightarrow x \in F_0 \Rightarrow f(x) = 0$ e $x \in B \Rightarrow \forall\, t < 1\, x \notin F_t \Rightarrow f(x) = 1$.

La funzione continua qui esibita assume i valori desiderati nei due chiusi assegnati, come previsto dalla tesi.

Lemma 2.4. *In ogni spazio metrico vale il lemma di Urysohn, ovvero dati due chiusi A e B esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tale che $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$.*

DIMOSTRAZIONE:
Siano A e B chiusi disgiunti di uno spazio metrico (X, d). Consideriamo la funzione $\delta : X \to \mathbb{R}$

$$\delta(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \tag{4}$$

[1] Per una condizione necessaria e sufficiente alla condizione aggiuntiva che $f^{-1}(\{0\}) = A$ e $f^{-1}(\{1\}) = B$ si veda *Approfondimenti, Teorema 4.4* e precedenti, e nel caso di spazi metrici *Lemma 2.4*.

dove la distanza di un punto da un insieme chiuso è definita come $d(x, A) = \inf_{a \in A}\{d(x, a)\}$. Osserviamo innanzitutto che il denominatore non è mai nullo, perché se per assurdo lo fosse, essendo la distanza una funzione a valori non negativi, dovrebbe essere $d(x_0, A) = 0$ e $d(x_0, B) = 0$ per qualche $x_0 \in X$. Ma in tal caso, come sappiamo, x_0 apparterrebbe alle chiusure di A e B, ovvero ad $A \cap B$ in quanto A e B sono chiusi; ma ciò è assurdo per ipotesi.

NOTA: vale la condizione aggiuntiva $f^{-1}(\{0\}) = A$ e $f^{-1}(\{1\}) = B$.

Corollario 2.5. *Ogni spazio metrico è normale.*

DIMOSTRAZIONE:
Discende immediatamente dal *Lemma 2.4* e dal *Lemma 2.1*.

3 Teorema di Tietze

Lemma 3.1. *Data una funzione continua $f : F \longrightarrow [-L, L]$ con F chiuso in uno spazio normale X, esiste una funzione continua $g : X \longrightarrow [-L/3, L/3] \subseteq [-L, L]$ tale che*

- $|g(x)| \leq \frac{L}{3}\ \forall x \in X$
- $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2L}{3}\ \forall x \in F$

DIMOSTRAZIONE:
Pongo $A = f^{-1}([-L, -L/3])$ e $B = f^{-1}([L/3, L])$. Poiché f è continua, A e B sono chiusi perché controimmagini di chiusi. Posso allora applicare il lemma di Urysohn (*Teorema 2.3*) agli insiemi A e B. Esiste quindi una funzione $\gamma : X \longrightarrow [0, 1]$ continua tale che $\gamma(A) = \{0\}$, $\gamma(B) = \{1\}$. Posta ora $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = L\ \frac{2x-1}{3}$, la funzione $g = \psi \circ \gamma$ è quella cercata. Infatti, detto $C = F\backslash(A \cup B)$:

- $|g(x)| \leq \dfrac{L}{3}\ \forall x \in X$ perché $\psi([0, 1]) = [-L/3, L/3]$
- $|f(a) - g(a)| = \left| - f(a) - \dfrac{L}{3}\right| \leq \left| - (-L) - \dfrac{L}{3}\right| = \dfrac{2L}{3}\ \forall a \in A$
- $|f(b) - g(b)| = \left|f(b) - \dfrac{L}{3}\right| \leq \left|L - \dfrac{L}{3}\right| = \dfrac{2L}{3}\ \forall b \in B$
- $|f(c) - g(c)| \leq |f(c)| + |g(c)| < \sup_{c \in C} |f(c)| + \sup_{c \in C} |g(c)| \leq \dfrac{L}{3} + \dfrac{L}{3} =$
  $= \dfrac{2L}{3}\ \forall x \in C$

Teorema 3.2 (Teorema di estensione di Tietze). *Dato uno spazio topologico normale (X, τ) e un chiuso $F \subseteq X$, una funzione continua $f : F \longrightarrow [-1, 1]$, si può estendere ad una funzione continua su tutto lo spazio, ovvero $\exists \phi : X \longrightarrow [-1, 1]$ con ϕ continua e $\phi|_F = f$.*

DIMOSTRAZIONE:
Si tratta di applicare iterativamente il *Lemma 3.1* alla funzione f. Definiamo ricorsivamente:

$$\begin{cases} f_1 = f \\ f_{n+1} = f_n - g_n = f - \sum_{i=1}^{n} g_i \end{cases} \tag{5}$$

dove $g_1 : X \longrightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ è la funzione g costruita nel *Lemma 3.1* a partire f. Dimostriamo per induzione che $\forall n\ \exists g_n : X \longrightarrow [-1,1]$ continua tale che:

- $|g_n(x)| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \ \forall x \in X$
- $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \forall x \in F$, dunque f_{n+1} ha valori in $\left[-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n, \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$

<u>*Passo base*</u> $(n = 1)$: è il *Lemma 3.1* con $L = 1$.
<u>*Passo induttivo*</u> $(n \Rightarrow n+1)$: È ben definita per ipotesi induttiva

$f_{n+1} : F \longrightarrow [-(\frac{2}{3})^n, (\frac{2}{3})^n]$ continua con $f_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i$.

Applichiamo allora il Lemma a f_{n+1} e otteniamo g_{n+1} continua su X tale che:

- $|g_{n+1}(x)| \leq \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \ \forall x \in X$
- $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(x)\right| \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \ \forall x \in F$

L'induzione è così completa.
Vogliamo ora dimostrare che:

- la successione $(\sum_{i=1}^{n} g_i)$ converge uniformemente a una funzione $\phi : X \longrightarrow [-1,1]$ che sarà pertanto continua[2];
- su F la successione $(\sum_{i=1}^{n} g_i)$ converge uniformemente a f. (Dunque $\phi|_F = f$).

Ora:

- per quanto mostrato precedentemente abbiamo che $|g_n(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \forall x \in X$, ovvero $\sup_{x \in X} |g_n(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, cosicché la serie $(\sum_{n=1}^{\infty} g_n)$ converge. Infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in X} |g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 \tag{6}$$

[2]Sappiamo che il limite uniforme di funzioni continue definite su uno spazio metrico a valori in $\mathbb{R}$ è continuo. Per la dimostrazione di questo risultato nel caso che lo spazio di partenza sia uno spazio topologico qualsiasi si veda *Approfondimenti, Teorema 4.5*.

(convergenza totale). Dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformemente per il criterio di Weierstrass[3] ad una funzione continua ϕ che avrà come dominio X e come codominio [-1,1], per convergenza della serie dei moduli ad un numero minore o uguale ad 1.

- del resto, su F vale anche:

$$\forall x \in F \quad |f_n(x) - g_n(x)| = |f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

per cui passando al limite in n si può concludere che, detta $\phi_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$, allora $(\phi_n|_F) \longrightarrow f$ (uniformemente per quanto visto).

In conclusione

$$\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \tag{7}$$

è continua, e $\phi|_F = f$, e dunque è l'estensione cercata.

4 COMPLEMENTI

4.1 Spazi normali e perfettamente normali

Teorema 4.1 (Lemma di Tychonov). *Uno spazio di Lindelöf regolare è anche normale.*

DIMOSTRAZIONE:
Siano A, B due chiusi disgiunti. Consideriamo la classe $\mathcal{U}$ degli aperti U di X tali che $\overline{U} \cap B = \varnothing$; sia, inoltre, $\mathcal{V}$ la classe degli aperti V tali che $\overline{V} \cap A = \varnothing$. Siccome lo spazio X è regolare, $\forall x \in A\ \exists U \in \mathcal{U}$ tale che $\overline{U} \cap B = \varnothing$; vale una proposizione analoga invertendo i ruoli di A e B e considerando la classe $\mathcal{V}$.
Pertanto la famiglia di aperti $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \{X \setminus (A \cup B)\}$ ricopre lo spazio X.
Siccome lo spazio è di Lindelöf, da una famiglia di aperti che ricopre X è possibile estrarre una sottofamiglia numerabile che ricopre lo spazio, per cui esistono una successione $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di aperti di $\mathcal{U}$ e $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di aperti di $\mathcal{V}$ che ricoprono, rispettivamente, A e B (si ricorda che A è disgiunto dagli aperti di $\mathcal{V}$ e B da quelli di $\mathcal{U}$).
$\forall n \in \mathbb{N}$ siano $U'_n = U_n \setminus \bigcup_{p\leq n} \overline{V_p}$, e $V'_n = V_n \setminus \bigcup_{p\leq n} \overline{U_p}$. Allora $\forall n \in \mathbb{N}\ U'_n \subseteq U_n$ è un aperto disgiunto da V_m tutte le volte che $m \leq n$; così $\forall n \in \mathbb{N}\ V'_n \subseteq V_n$ è un aperto disgiunto da U_m tutte le volte che $m \leq n$ e, dunque, $\forall m, n \in \mathbb{N}\ U'_n \cap V'_m = \varnothing$. Dunque $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n$ e $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ sono due aperti disgiunti che contengono rispettivamente A e B.
Da qui segue che lo spazio X è normale.

Definizione 4.1. *Definiamo insieme G_δ un'intersezione numerabile di aperti. Uno spazio normale in cui ogni chiuso è G_δ è detto "perfettamente normale".*

Lemma 4.2. *Ogni spazio regolare che soddisfa il secondo assioma di numerabilità è perfettamente normale.*

[3] Per l'applicabilità del Criterio di Weierstrass, cfr. ancora *Teorema 4.5*.

DIMOSTRAZIONE:
Sappiamo già dal Lemma di Tychonov che lo spazio è normale (la seconda numerabilità implica la proprietà di Lindelöf). Sia ora F un chiuso qualunque dello spazio X: vogliamo dimostrare che esso è intersezione numerabile di aperti. Per ogni $x \in F^c$ esiste per regolarità un aperto $U_x \ni x$ tale che $\overline{U} \cap F = \varnothing$ (questa proprietà discende dalla regolarità allo stesso modo in cui (*Lemma 1.1*) la proprietà analoga su una coppia di chiusi discende dalla normalità). Per la seconda numerabilità ristretta a $F^c \subset X$ possiamo applicare la proprietà di Lindelöf a F^c, e affermare che il ricoprimento aperto di F^c $\{U_x\}_{x \in F^c}$ ammette un sottoricoprimento numerabile $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Definiamo l'aperto

$$V_n = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i} \right).$$

Poiché $\overline{U_i} \cap F = \varnothing \ \forall i$, ogni V_n contiene il chiuso F, ovvero $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \supseteq F$. Ora, se $x \in F^c$, esiste n tale che che

$$x \in U_n \Longrightarrow x \notin V_n \Longrightarrow x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n.$$

Questo dimostra che $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Lemma 4.3. *Sia (X, τ) uno spazio normale e A e B chiusi disgiunti di X. Condizione necessaria e sufficente per l'esistenza di una funzione di Urysohn su A e B $f : X \longrightarrow [0,1]$ tale che $f^{-1}(\{0\}) = A$ è che A sia G_δ.*

DIMOSTRAZIONE:
Se una tale funzione esiste, allora

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X | f(x) < (1/n)\} \tag{8}$$

per cui A è G_δ. Viceversa, sia A un G_δ e sia $\{U_n\}_{n \in N}$ una famiglia numerabile di aperti tale che $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Senza perdita di generalità, a meno di scegliere intersezioni finite di alcuni U_n, possiamo assumere che $U_n \supset U_{n+1} \ \forall n$, e anche che $U_1 \cap B = \varnothing$.[4] Sia allora $\forall n$ f_n una funzione di Urysohn sui chiusi disgiunti A e $(X \setminus U_n)$ tale che $f_n(A) = 0$. Allora la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) f_n(x)$$

è continua su X (in quanto, come si verifica facilmente, è limite uniforme di funzioni continue (cfr. *Teorema 4.5*)) ed è una funzione di Urysohn su A e B. Del resto, se $y \notin A$, allora $\exists n_0 : y \notin U_{n_0}$, per cui per definizione di f_{n_0} vale $f_{n_0}(y) = 1$, da cui segue $f(y) \geq \frac{1}{2^{n_0}}$. Dunque $f^{-1}(\{0\}) = A$.

[4] Infatti possiamo equivalentemente scrivere che $A = \bigcap_i (U_i \cap A)$, e dunque ponendo $V_i = U_i \cap A$ suppore che tutti i V_i abbiano intersezione vuota con B, dal momento che A e B sono disgiunti. Definiamo poi $T_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Così $T_{n+1} \supset T_n$ e l'intersezione dei T_n rimane ancora A.

Teorema 4.4 (Lemma di Urysohn su spazi perfettamente normali)**.** *Sia (X, τ) uno spazio normale e (A, B) una qualunque coppia di chiusi disgiunti di X. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione di Urysohn $\phi : X \longrightarrow [0,1]$ tale che $\phi^{-1}(\{0\}) = A$ e $\phi^{-1}(\{1\}) = B$ è che A e B siano entrambi G_δ. (Ovvero, per l'arbitrarietà della scelta di A e B, che lo spazio sia perfettamente normale).*

DIMOSTRAZIONE:
Se A e B sono G_δ, costruiamo f e g come nel *Lemma 4.3* tali che $f^{-1}(\{0\}) = A$, $f(B) = \{1\}$ e $g^{-1}(\{0\}) = B$, $g(A) = \{0\}$. Allora $\phi : X \longrightarrow [0,1]$ definita da

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)}$$

è continua perché il denominatore è sempre positivo in quanto $A \cap B = \varnothing$. Inoltre si verifica facilmente dalle proprietà di f e g che $\phi^{-1}(\{0\}) = A$ e $\phi^{-1}(\{1\}) = B$.
L'implicazione inversa si dimostra come nel *Lemma 4.3* usando la *A.1* su A e B.

4.1.1 Esempi di spazi normali ma non perfettamente normali

Esempio 1 Un esempio semplice di spazio normale ma non perfettamente normale, ma che non sia T_1, può essere costruito utilizzando come insieme $X = \{a, b, c\}$ e come classe degli aperti

$$\tau = (\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}).$$

Infatti le uniche coppie di chiusi disgiunti sono $A_1 = (\{c\}, \{a, b\})$, che sono separati dalla coppia di aperti $A_2 = (\{c\}, \{a, b\})$, e $B_1 = (\{a\}, \{c\})$ che sono separati dalla coppia di aperti $B_2 = (\{a, b\}, \{c\})$. Dunque lo spazio è normale.

D'altra parte qualsiasi funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ assume lo stesso valore sui punti a e b: ciò poiché se per assurdo f assumesse tre valori distinti sui tre punti, gli insiemi $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{c\}$ dovrebbero essere dei chiusi essendo controimmagini tramite funzione continua di tre distinti valori, ma ciò è assurdo per come è stata effettuata la scelta della topologia. Allora certamente almeno due assumono lo stesso valore: supponiamo per assurdo dunque che $a \neq b = c$. Essendo $f(a) = s$, con $0 \leq s \leq 1$, ciò vorrebbe dire che $f^{-1}(s)$ è un chiuso, ovvero $\{a\}$ è un chiuso, che è assurdo. Allora indubbiamente $f(a) = f(b)$ in qualsiasi modo si scelga una funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$.

Ciò significa che non è possibile costruire una funzione continua che valga esattamente 0 e 1 solo sugli elementi della coppia B_1 di chiusi precedentemente scritta: infatti se senza perdita di generalità $f(a) = 0$, allora $f^{-1}(0) = \{a, b\}$ per quanto appena notato. Dunque lo spazio non è perfettamente normale per il *Teorema 4.4*.

D'altra parte, come si è detto, questo spazio non è T_1: come si osserva facilmente, qualsiasi aperto che contenga b contiene anche a; dunque i punti a e b contraddicono la proprietà T_1.

Esempio 2 Consideriamo l'ordinale non numerabile $\mathcal{O}^*$ ={precedenti[5] di Ω} $\cup \{\Omega\} = \Omega \cup \{\Omega\} = \Omega + 1$ (dove Ω è il primo ordinale non numerabile) con la topologia dell'ordine, ovvero quella generata dagli aperti del tipo $L_x = \{\alpha \in \mathcal{O}^* : \alpha < x\}$ o $R_x = \{\alpha \in \mathcal{O}^* : \alpha > x\}$ al variare di x in $\mathcal{O}^*$. È uno spazio T_4 ma non perfettamente normale. Infatti:

[5] Con "precedenti di un punto" intendiamo tutti i punti minori strettamente di esso.

– i punti sono chiusi (T_1), in quanto complementari di aperti della forma $L_x \cup R_x$.

– lo spazio è normale per il Lemma di Tychonov (*Teorema 4.1*). Infatti

  * è Lindelöf, perché, preso un suo ricoprimento con aperti $\mathcal{U}$, esso conterrà un aperto A tale che $\Omega \in A$. Sia $p \in A$, $p < \Omega$ (esiste perché $\{\Omega\}$ non può essere aperto, poiché se lo fosse, non avendo successori in $\mathcal{O}^*$, dovrebbe essere della forma R_x per un certo x, il che è impossibile essendo Ω un ordinale limite). Allora p deve avere numerabili precedenti, e dunque esiste evidentemente un sottoricoprimento numerabile di $\mathcal{U}$ per $\mathcal{O}^*$ (basta scegliere un aperto del ricoprimento per ogni $x \in (\mathcal{O}^* \setminus A)$ ed aggiungervi A stesso).
  * è regolare. Siano p ed F rispettivamente un punto ed un chiuso di $\mathcal{O}^*$, $p \notin F$. Se p non è un ordinale limite, $\{p\}$ è aperto (intersezione di R_{x-1} e di L_{x+1}), e dunque i due aperti separanti sono dati da p stesso e da $L_x \cup R_x$. Se p è un ordinale limite, e $L_p \cap F$ non è vuoto (nel qual caso gli aperti separanti sono banalmente L_{x+1} e R_x), esiste $\alpha = max(L_p \cap F)$. Infatti altrimenti p sarebbe un limite in F, e dunque apparterrebbe ad F[6]. Allora gli aperti separanti sono dati da $R_\alpha \cap L_{p+1}$ e $L_{\alpha+1} \cup R_p$.

– non è perfettamente normale, perché il punto Ω è un chiuso non G_δ.
Dimostriamo equivalentemente che $\{\Omega\}^c$ non è un'unione numerabile di chiusi. Ciò è vero perché

  * $\{\Omega\}^c$ è non numerabile, essendo proprio l'insieme Ω.
  * ogni chiuso F contenuto in $\{\Omega\}^c = \Omega$ è numerabile: infatti non può essere Ω stesso, dato che $\Omega^c = \{\Omega\}$ non è aperto, ed ha massimo in Ω (cfr. nota 6); ma allora è contenuto in un ordinale di $\mathcal{O}^*$ strettamente minore di Ω che sarà pertanto numerabile, essendo Ω il primo ordinale non numerabile; ma allora anche F è numerabile.

  Poiché un'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile, $\{\Omega\}^c$ non può essere unione numerabile di chiusi.

4.2 Funzioni continue da uno spazio topologico nei reali

Teorema 4.5. *Lo spazio $C_b(X)$ delle funzioni continue e limitate definite da uno spazio topologico X nei reali è chiuso e completo rispetto alla convergenza uniforme e alla distanza del sup.*

DIMOSTRAZIONE:
Mostriamo anzitutto che una caratterizzazione equivalente della continuità di una funzione f definita fra due spazi topologici X e Y è la seguente: $\forall x \in X, \forall V$ *intorno aperto di* $f(x)$, $\exists W$ *intorno aperto di* x *tale che* $f(W) \subseteq V$.
Dimostriamo che la proprietà enunciata implica la continuità di f: infatti, dato V aperto di Y, ogni punto $x \in f^{-1}(V)$ ha un intorno aperto W_x tale che $f(W_x) \subseteq V$, e quindi $W_x \subseteq f^{-1}(V)$. Ma d'altra parte $\left(\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} W_x \right) \supseteq f^{-1}(V)$, per cui $f^{-1}(V) = \left(\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} W_x \right)$ che è unione di aperti

[6] Più precisamente, se tale α non esistesse, p sarebbe il minimo dell'aperto $A = F^c \cup R_p$. Ma se A è aperto è generato da insiemi della forma L_x o R_x, e poiché $p \neq \varnothing$, $\exists\ R_z$ t. c. $A = R_z \cap B$ (per un certo aperto B non inferiormente limitato da p), ovvero tale che $min(R_z) = min(A)$. Ma allora $z = p - 1$, contro l'ipotesi che p sia un ordinale limite. Da questa dimostrazione, peraltro, si può evincere che in $\mathcal{O}^*$ la chiusura implica la chiusura rispetto al limite.

e dunque aperta. Dunque f è continua, perché la controimmagine di ogni aperto V in Y è aperta. Per quanto riguarda l'implicazione inversa, basterà osservare che per ogni x_0 nel dominio qualunque intorno aperto di $f(x_0)$ ha per controimmagine un intorno aperto di x_0.
Per dimostrare la chiusura di $C_b(X)$, cioè che limite uniforme di continue è continuo, basterà allora provare che la nostra $f = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n$ soddisfa la proprietà enunciata. Poiché il codominio è $\mathbb{R}$, ci restringeremo a considerare come aperti nell'immagine intorni di raggio arbitrario ϵ di $f(x_0)$ al variare di x_0 nel dominio. Sappiamo dalla convergenza uniforme delle f_n che $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall x \in X \quad |f(x) - f_N(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

mentre la continuità di f_N, nella forma equivalente precedentemente fornita, ci assicura l'esistenza di un intorno aperto W di x_0 tale che

$$\forall x \in W \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \ .$$

Dunque $\forall x \in W$ risulta

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \ .$$

Ciò conclude la dimostrazione che f è continua, e che $C_b(X)$ è chiuso rispetto alla convergenza uniforme (la limitatezza della funzione limite discende immediatamente dalla definizione di convergenza uniforme). Per quanto riguarda la completezza, la dimostrazione è analoga a quella usata nel caso metrico.
NOTA: Completezza e chiusura di $C_b(X)$ consentono di applicare il criterio di Weierstrass come nella dimostrazione del *Teorema 3.2*.

4.3 Compattificazione di Alexandrov

Teorema 4.6 (Compattificazione di Alexandrov). *Dato uno spazio topologico (X, τ), lo spazio $(\overline{X}, \overline{\tau})$ definito come segue*

$$\overline{X} = X \cup \{\infty\}$$

$$\overline{\tau} = \tau \cup \{V \cup \{\infty\} | V^c \textit{compatto e chiuso in } X\}$$

è compatto (per ricoprimenti).

DIMOSTRAZIONE:
Bisogna innanzitutto mostrare che $\overline{\tau}$ è ancora una topologia, ovvero stabile per unioni infinite e intersezioni finite e tale che $\{\varnothing, X\} \subseteq \overline{\tau}$. Quest'ultima proprietà è evidente dal momento che $\varnothing \in \tau \subseteq \overline{\tau}$ e $\overline{X} = X \cup \{\infty\} \in \overline{\tau}$ poiché $X^c = \varnothing$ è compatto e chiuso in X. Mostro le altre due stabilità:

- Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di elementi di $\overline{\tau}$. Se tutti questi sono elementi di τ, non c'è nulla da verificare. Altrimenti

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{X_i \in \tau} X_i \cup \bigcup_{X_i \notin \tau} X_i = A \cup \bigcup_{i | X_i \notin \tau} V_i \cup \{\infty\}$$

dove A è un aperto di X dal momento che τ è stabile per unioni infinite. Rimane solo da mostrare che, detto $J = \{i | X_i \notin \tau\}$ allora $\left(A \cup \bigcup_{i\in J} V_i\right)^c = \left(A^c \cap \bigcap_{i\in J} V_i^c\right)$ è un chiuso e compatto di X. Ma ciò è vero dal momento che $B = \bigcap_{i\in J} V_i^c$ è chiaramente chiuso poiché i V_i^c sono chiusi della topologia τ e i chiusi sono stabili per intersezioni infinite; è compatto perché sottoinsieme chiuso di ogni V_i^c che è un compatto per la richiesta dalla definizione, ed è dunque compatto. Dunque $A^c \cap B$ è chiuso perché intersezione di due chiusi ed è compatto poiché è un sottoinsieme chiuso del compatto B.

- Sia $\{X_i\}_{i=1}^n$ una famiglia di elementi di $\overline{\tau}$. Se tutti questi sono elementi di τ, non c'è nulla da verificare. Altrimenti

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = \bigcap_{X_i\in\tau} X_i \cap \bigcap_{X_i\notin\tau} X_i = F \cap \bigcap_{i|X_i\notin\tau} V_i \cup \{\infty\}$$

  dove F è un aperto di X dal momento che τ è stabile per intersezioni finite. Se $F \neq \varnothing$ non c'è nulla da verificare poiché certamente $\{\infty\}$ si può eliminare dall'intersezione e la proprietà si riduce alla stabilità delle intersezioni finite su τ. Rimane solo da mostrare che, se $F = \varnothing$, $\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^n V_i^c\right)$ è un chiuso e compatto di X. Ma ciò è vero dal momento che è unione finita di V_i^c che sono compatti per definizione (ed è facilmente ricavabile dalla definizione per ricoprimenti che la compattezza è stabile per unioni finite) ed è chiuso poiché i V_i^c sono chiusi della topologia τ.

Lo spazio $\overline{X}$ è compatto poiché dato un ricoprimento aperto $\mathcal{F}$, esiste certamente un aperto $U = V \cup \{\infty\} \in \mathcal{F}$ del ricoprimento. Poiché V^c in X è compatto ed è ricoperto da $\mathcal{F}|_\tau$ (ovvero tutti gli aperti della famiglia epurati dal punto aggiunto all'infinito), esiste un sottoricoprimento finito $\mathcal{F}' \subseteq \tau$ di V^c. Un ricoprimento finito di $\overline{X}$ Ã è quindi dato da $\mathcal{F}' \cup \{U\}$.

Riferimenti bibliografici

[1] V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini, *Lezioni di Topologia generale*, Feltrinelli 1971

[2] J. Dugundji, *Topology*, WCB 1989

[3] J. Greever, *Theory and examples of Point-Set Topology*, Brooks/Cole 1967

[4] J. L. Kelley, *General Topology*, Springer-Verlag 1975