Abstract per il seminario del corso di *Sistemi Dinamici* Dinamica Hamiltoniana: teoremi di *Liouville* e *Arnold Jost*

Gioacchino Antonelli

March 21, 2017

Comincerò il seminario enunciando un paio di fatti che mi saranno utili e fissando velocemente la notazione che adotterò. Tutte le proposizioni, i lemmi e i teoremi a cui faccio riferimento sono estratti dalle note di A. Giorgilli.

Osservazioni e Notazioni: Durante il corso si è data la definizione di *applicazione simplettica* fra *varietà simplettiche*. Nello specifico $\psi : (M, \omega) \to (\widetilde{M}, \widetilde{\omega})$, è detta *simplettica* se $\psi^\star \widetilde{\omega} = \omega$. Nel caso in cui $M = \Omega$ e $\widetilde{M} = \widetilde{\Omega}$ sono aperti di $\mathbb{R}^{2n}$ e le forme ω e $\widetilde{\omega}$ sono la *forma simplettica standard*, l'applicazione viene anche detta *trasformazione canonica*.

Durante il seminario adotterò la seguente notazione: se non specificato, il punto (q, p) apparterrà a un aperto Ω di $\mathbb{R}^{2n}$ e $x = (q, p)$. Una generica trasformazione canonica sarà della forma $(q, p) : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ e le coordinate in partenza saranno $y = (\bar{q}, \bar{p}) \in \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Scriverò dunque $q = q(\bar{q}, \bar{p})$ e $p = p(\bar{q}, \bar{p})$.

Osserverò, senza dimostrarlo, che una trasformazione è canonica se e solo se preserva le *parentesi di Poissons*. (**Proposizione 2.9**)

Prima Parte: Enunciato e dimostrazione dei teoremi di *Liouville* e *Arnold Jost*. Enuncerò il seguente risultato che mette insieme il **Teorema 3.10** e il **Teorema 3.18**.

Teorema 1. *Sia $H(q, p)$ un'hamiltoniana che possiede n integrali primi in involuzione $\{\Phi_1(q, p), \ldots, \Phi_n(q, p)\}$.*

- *Fisso $(q_0, p_0) \in \Omega$ tale che $\Phi(q_0, p_0) = c \in \mathbb{R}^n$. Esiste un diffeomorfismo* canonico

  $$\chi : (\alpha, \Phi) \in U_0 \times U_\Phi \to (q, p) \in U_{(q_0,p_0)} \tag{1}$$

  dove U_0 è un intorno di 0 in $\mathbb{R}^n$, U_Φ è un intorno di c in $\mathbb{R}^n$, $U_{(q_0,p_0)}$ è un intorno di (q_0, p_0) in Ω e le coordinate Φ sono esattemente *gli n integrali primi. Nelle nuove coordinate, H dipende solo da $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ e la soluzione dell'ODE associata a H con dati iniziali $(\alpha_j(0), \Phi_j(0))_{j=1,\ldots,n}$ è*

  $$\begin{cases} \alpha_j(t) = \alpha_j(0) + t \frac{\partial H}{\partial \Phi_j}(\Phi(0)) \\ \Phi_j(t) = \Phi_j(0). \end{cases} \tag{2}$$

- *Suppongo che $\Phi(q_0, p_0) = 0$ e che $\Phi^{-1}(0)$ contenga una componente connessa e compatta M_0. Allora M_0 è diffeomorfa a $\mathbb{T}^n$ ed esiste un diffeomorfismo canonico*

  $$\mathcal{A} : (\theta, I) \in \mathbb{T}^n \times \mathcal{G} \to (q, p) \in U(M_0) \tag{3}$$

con $U(M_0)$ intorno di M_0 e $\mathcal{G}$ intorno di 0 in $\mathbb{R}^n$, in modo che le coordinate $(I^1,\dots,I^n)$ dipendano solo da $(\Phi^1,\dots,\Phi^n)$. Nelle nuove coordinate, H dipende solo dalle coordinate $(I_1,\dots,I_n)$ e la soluzione dell'ODE associata a H con dati iniziali $(\theta_j(0),I_j(0))_{j=1,\dots,n}$ è

$$\begin{cases}\theta_j(t)=\theta_j(0)+t\frac{\partial H}{\partial I_j}(I(0))\\ I_j(t)=I_j(0).\end{cases}\tag{4}$$

Svolgerò la dimostrazione di questo teorema assumendo l'esistenza dei diffeomorfismi canonici χ e $\mathcal{A}$, e tralasciando il fatto che M_0 sia diffeomorfa a un toro, poiché è stato mostrato in classe.

Seconda parte: Come ottenere i diffeomorfismi canonici χ e $\mathcal{A}$?
In questa seconda parte del seminario, senza fornire nessuna dimostrazione completa, evidenzierò i passi principali che consentono di definire i diffeomorfismi canonici di cui ho assunto l'esistenza per mostrare il **Teorema 1**. Per la costruzione di χ faccio riferimento al **Lemma 3.6** e alla **Proposizione 3.7** delle note di cui sopra, mentre per la costruzione di $\mathcal{A}$ alla **Proposizione 3.15**, al **Lemma 3.16** e alla **Sezione 3.4.2**.

- *Come costruisco χ?* Suppongo di lavorare con $\{\Phi_1(q,p),\dots,\Phi_n(q,p)\}$ in involuzione e fisso (q_0,p_0) dimodoché $\Phi(q_0,p_0)=(\Phi_1(q_0,p_0),\dots,\Phi_n(q_0,p_0))=c\in\mathbb{R}^n$. Darò una spiegazione grafica ed euristica di quali saranno le coordinate (α,Φ), notando che varrà

$$\chi(0,c)=(q_0,p_0)\qquad\chi(0,\Phi)=(q_0,p)\qquad\phi^\alpha\chi(0,\Phi)=\chi(\alpha,\Phi)\tag{5}$$

  non appena quelle quantità sono definite (s'intende $\phi^\alpha:=\phi_1^{\alpha_1}\circ\cdots\circ\phi_n^{\alpha_n}$ dove ϕ_i è il flusso generato dal campo relativo a Φ_i). Questo cambio canonico si ottiene costruendo *per quadrature* una funzione generatrice $S(\Phi,q)$. E' sufficiente invertire localmente le Φ_i nelle coordinate p (cosa che si può fare a meno di scambiare coordinate, si veda il **Lemma 3.2**) e costruire la forma $\omega:=\sum_j p_j(\Phi,q)dq_j$, notando che è esatta. A questo punto $S(\Phi,q):=\int_\gamma\omega$, dove γ è un cammino da q_0 a q, soddisfa le ipotesi della **Proposizione 2.19** e dunque definisce implicitamente un cambio di coordinate canonico che è quello desiderato. Noterò, senza dare i dettagli, che questa scelta soddisfa quanto scritto in (5).

- *Come costruisco $\mathcal{A}$?* Suppongo che $\Phi(q_0,p_0)=0$ e che $\Phi^{-1}(0)$ contenga M_0 una componente connessa e compatta, che so essere diffeomerfa a un toro. So già che, in un intorno di (q_0,p_0), esistono coordinate come in (1), costruite precedentemente. A patto di restringere U_Φ, χ può essere estesa a tutto $\mathbb{R}^n$ lungo le prime coordinate, ovvero esiste

$$\widetilde{\chi}:\mathbb{R}^n\times U_\Phi\to U(M_0)\tag{6}$$

  un diffeomerfismo locale canonico, tale che $\widetilde{\chi}(t,\Phi)=\phi^t\chi(0,\Phi)$. In realtà si può dire di più: a patto di rimpicciolire ulteriormente U_Φ, il gruppo stazionario

$$G(\Phi):=\{t\in\mathbb{R}^n:\phi^t\chi(0,\Phi)=\chi(0,\Phi)\}$$

  è proprio $Span_{\mathbb{Z}}\{\tau_j(\Phi)\}$ dove $\tau_j(\Phi)=e_j+\partial_\Phi W_j(\Phi)$, essendo e_j una base del gruppo stazionario $G(0)$ e W_j funzioni lisce in Φ tali che $\partial_\Phi W_j(0)=0$. Allora la mappa $\widetilde{\chi}$ induce un diffeomorfismo canonico fra $\mathbb{R}^n/G(\Phi)\times U_\Phi$ e $U(M_0)$ e si può notare che fissato $C\in U_\Phi$ ho un diffeomorfismo fra il toro $\mathbb{R}^n/G(C)$ e M_C una componente su cui $\Phi(\cdot)=C$. Il diffeomeorfismo canonico $\mathcal{A}$, a questo punto, si ottiene cambiando coordinate mediante la funzione generatrice

$$S(\theta,\Phi):=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^n\theta_k[e_k\cdot\Phi+W_k(\Phi)].$$