Regolarità dei minimi del problema di Lagrange

Gioacchino Antonelli

Relatore: Prof. Luigi Ambrosio

Correlatore: Prof. Massimo Gobbino

Università di Pisa

13 Maggio 2016

Qual è il problema di minimo?

Qual è il problema di minimo?

Problema di Lagrange

Data una funzione $F : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$, trovare

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx \right\}.$$

Qual è il problema di minimo?

Problema di Lagrange

Data una funzione $F : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$, trovare

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx \right\}.$$

Ci sono due dettagli da definire:

Qual è il problema di minimo?

Problema di Lagrange

Data una funzione $F : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$, trovare

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx \right\}.$$

Ci sono due dettagli da definire:

1. Che regolarità sto assumendo su $F(x, z, p)$?

Qual è il problema di minimo?

Problema di Lagrange

Data una funzione $F : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$, trovare

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx \right\}.$$

Ci sono due dettagli da definire:

1. Che regolarità sto assumendo su $F(x, z, p)$?
2. In quale classe prendo le $u(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^N$?

Qual è il problema di minimo?

Problema di Lagrange

Data una funzione $F : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$, trovare

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx \right\}.$$

Ci sono due dettagli da definire:

1. Se non specificato, assumerò $F(x, z, p) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Perché l'integrale sia ben definito basterà solo $F(x, z, p)$ di *Carathéodory*;
2. In quale classe prendo le $u(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^N$?

La classe delle funzioni assolutamente continue

La classe delle funzioni assolutamente continue

Studierò il problema nella classe $\mathcal{C}$ delle funzioni *assolutamente continue* (AC) definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}^N$,

La classe delle funzioni assolutamente continue

Studierò il problema nella classe $\mathcal{C}$ delle funzioni *assolutamente continue* (AC) definite su $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}^N$, con $u(a)=\alpha$ e $u(b)=\beta$, dove $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^N$ sono fissati.

La classe delle funzioni assolutamente continue

Studierò il problema nella classe $\mathcal{C}$ delle funzioni *assolutamente continue* (AC) definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}^N$, con $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ sono fissati. Perché?

La classe delle funzioni assolutamente continue

Studierò il problema nella classe $\mathcal{C}$ delle funzioni *assolutamente continue* (AC) definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}^N$, con $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ sono fissati. Perché?

1. Le funzioni AC sono derivabili quasi ovunque (componente per componente) e in più vale il teorema fondamentale del calcolo integrale;

La classe delle funzioni assolutamente continue

Studierò il problema nella classe $\mathcal{C}$ delle funzioni *assolutamente continue* (AC) definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}^N$, con $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ sono fissati. Perché?

1. Le funzioni AC sono derivabili quasi ovunque (componente per componente) e in più vale il teorema fondamentale del calcolo integrale;
2. $u'(x)$ è in $L^1((a, b); \mathbb{R}^N)$ e anche solo avendo che $F(x, z, p)$ sia di *Carathéodory*, allora $F(x, u(x), u'(x))$ è misurabile. Questo ci porta a concludere che $\int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx$ è ben definito poiché abbiamo supposto $F(x, z, p) \geq 0$;

La classe delle funzioni assolutamente continue

Studierò il problema nella classe $\mathcal{C}$ delle funzioni *assolutamente continue* (AC) definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}^N$, con $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ sono fissati. Perché?

1. Le funzioni AC sono derivabili quasi ovunque (componente per componente) e in più vale il teorema fondamentale del calcolo integrale;
2. $u'(x)$ è in $L^1((a, b); \mathbb{R}^N)$ e anche solo avendo che $F(x, z, p)$ sia di *Carathéodory*, allora $F(x, u(x), u'(x))$ è misurabile. Questo ci porta a concludere che $\int_a^b F(x, u(x), u'(x))\,dx$ è ben definito poiché abbiamo supposto $F(x, z, p) \geq 0$;
3. Hanno proprietà di compattezza sequenziale migliori rispetto ad altri spazi: questo torna utile per i teoremi di esistenza (Criterio di Dunford-Pettis);

La classe delle funzioni assolutamente continue

Studierò il problema nella classe $\mathcal{C}$ delle funzioni *assolutamente continue* (AC) definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}^N$, con $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ sono fissati. Perché?

1. Le funzioni AC sono derivabili quasi ovunque (componente per componente) e in più vale il teorema fondamentale del calcolo integrale;
2. $u'(x)$ è in $L^1((a, b); \mathbb{R}^N)$ e anche solo avendo che $F(x, z, p)$ sia di *Carathéodory*, allora $F(x, u(x), u'(x))$ è misurabile. Questo ci porta a concludere che $\int_a^b F(x, u(x), u'(x))\,dx$ è ben definito poiché abbiamo supposto $F(x, z, p) \geq 0$;
3. Hanno proprietà di compattezza sequenziale migliori rispetto ad altri spazi: questo torna utile per i teoremi di esistenza (Criterio di Dunford-Pettis);
4. D'altra parte "si tratta" di $W^{1,1}((a, b); \mathbb{R}^N)$.

Teorema di Esistenza

Teorema di Esistenza

Teorema di Esistenza [Tonelli]

Se $F(x, z, p)$ e $F_p(x, z, p)$ sono continue su $(a, b) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $F(x, z, p)$ è convessa in p per ogni scelta di $(x, z) \in (a, b) \times \mathbb{R}^N$ ed esiste $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ misurabile, limitata dal basso e a crescita superlineare tale che $F(x, z, p) \geq \theta(p)$, allora il funzionale $\mathcal{F}(u)$ ammette minimo nella classe $\mathcal{C}$ prima definita.

Teorema di Esistenza

Teorema di Esistenza [Tonelli]

Se $F(x, z, p)$ e $F_p(x, z, p)$ sono continue su $(a, b) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $F(x, z, p)$ è convessa in p per ogni scelta di $(x, z) \in (a, b) \times \mathbb{R}^N$ ed esiste $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ misurabile, limitata dal basso e a crescita superlineare tale che $F(x, z, p) \geq \theta(p)$, allora il funzionale $\mathcal{F}(u)$ ammette minimo nella classe $\mathcal{C}$ prima definita.

- Per superlinearità si intende $\lim_{|p| \to +\infty} \dfrac{\theta(p)}{|p|} = +\infty$.

Teorema di Esistenza

Teorema di Esistenza [Tonelli]

Se $F(x,z,p)$ e $F_p(x,z,p)$ sono continue su $(a,b) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $F(x,z,p)$ è convessa in p per ogni scelta di $(x,z) \in (a,b) \times \mathbb{R}^N$ ed esiste $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ misurabile, limitata dal basso e a crescita superlineare tale che $F(x,z,p) \geq \theta(p)$, allora il funzionale $\mathcal{F}(u)$ ammette minimo nella classe $\mathcal{C}$ prima definita.

- Per superlinearità si intende $\displaystyle\lim_{|p| \to +\infty} \frac{\theta(p)}{|p|} = +\infty$.

Perché la convessità e la dominazione superlineare?

Convessità $\to$ semicontinuità inferiore sequenziale di $\mathcal{F}(u)$ rispetto alla nozione di convergenza forte L^1 sulle funzioni e debole L^1 sulle derivate

Teorema di Esistenza

Teorema di Esistenza [Tonelli]

Se $F(x,z,p)$ e $F_p(x,z,p)$ sono continue su $(a,b)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$, $F(x,z,p)$ è convessa in p per ogni scelta di $(x,z)\in(a,b)\times\mathbb{R}^N$ ed esiste $\theta:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ misurabile, limitata dal basso e a crescita superlineare tale che $F(x,z,p)\geq\theta(p)$, allora il funzionale $\mathcal{F}(u)$ ammette minimo nella classe $\mathcal{C}$ prima definita.

- Per superlinearità si intende $\displaystyle\lim_{|p|\to+\infty}\frac{\theta(p)}{|p|}=+\infty$.

Perché la convessità e la dominazione superlineare?

Convessità $\rightarrow$ semicontinuità inferiore sequenziale di $\mathcal{F}(u)$ rispetto alla nozione di convergenza forte L^1 sulle funzioni e debole L^1 sulle derivate
Dominazione superlineare $\rightarrow$ Coercività, ovvero la sequenziale compattezza dei sottolivelli $\{u\in\mathcal{C}\mid\mathcal{F}(u)\leq M\}$.

Minimi ed equazioni di Eulero

Minimo $\rightarrow$ *qualche condizione di equilibrio*?

Minimi ed equazioni di Eulero

Minimo $\rightarrow$ *qualche condizione di equilibrio*?
Sia $F(x, z, p) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e $u(x)$ un minimo per $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$.

Minimo $\rightarrow$ *qualche condizione di equilibrio*?
Sia $F(x, z, p) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e $u(x)$ un minimo per $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$.
Se $u(x)$ fosse anche Lipschitziana, avrei l'esistenza di $c \in \mathbb{R}^N$ per cui:

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_z(s, u(s), u'(s))ds \quad \text{q.o. in} \quad (a, b)$$

Minimi ed equazioni di Eulero

Minimo $\rightarrow$ *qualche condizione di equilibrio*?
Sia $F(x,z,p) \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e $u(x)$ un minimo per $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$.
Se $u(x)$ fosse anche Lipschitziana, avrei l'esistenza di $c \in \mathbb{R}^N$ per cui:

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_z(s, u(s), u'(s))ds \quad \text{q.o. in} \quad (a,b)$$

Ovvero vale l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale.

Minimi ed equazioni di Eulero

Minimo $\rightarrow$ *qualche condizione di equilibrio*?
Sia $F(x, z, p) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e $u(x)$ un minimo per $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$.
Se $u(x)$ fosse anche Lipschitziana, avrei l'esistenza di $c \in \mathbb{R}^N$ per cui:

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_z(s, u(s), u'(s))\,ds \quad \text{q.o. in} \quad (a, b)$$

Ovvero vale l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale.
Maggiore regolarità di u ed $F \rightarrow$ versioni differenziali dell'equazione di Eulero-Lagrange.

Minimo nella classe $\mathcal{C} \rightarrow$ equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale?

Come ottenere l'equazione integrale di Eulero-Lagrange

Lagrangiane a crescita polinomiale

Minimo nella classe $\mathcal{C} \rightarrow$ equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale?
No [Ball, Mizel].

Minimo nella classe $\mathcal{C} \to$ equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale?
No [Ball, Mizel].
Sì sotto ipotesi di crescita polinomiale della lagrangiana e delle sue derivate.

Minimo nella classe $\mathcal{C} \to$ equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale?
No [Ball, Mizel].
Sì sotto ipotesi di crescita polinomiale della lagrangiana e delle sue derivate.

1. Il teorema di esistenza vale anche con $F(x,z,p) \geq \alpha|p|^m - \beta|z|^s - \gamma$, dove $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $m > s \geq 1$.

Minimo nella classe $\mathcal{C} \to$ equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale?
No [Ball, Mizel].
Sì sotto ipotesi di crescita polinomiale della lagrangiana e delle sue derivate.

1. Il teorema di esistenza vale anche con $F(x, z, p) \geq \alpha|p|^m - \beta|z|^s - \gamma$, dove $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $m > s \geq 1$. In tal caso il minimo, $u(x)$, appartiene a $W^{1,m}((a, b); \mathbb{R}^N)$;

Minimo nella classe $\mathcal{C}$ $\rightarrow$ equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale?
No [Ball, Mizel].
Sì sotto ipotesi di crescita polinomiale della lagrangiana e delle sue derivate.

1. Il teorema di esistenza vale anche con $F(x,z,p) \geq \alpha|p|^m - \beta|z|^s - \gamma$, dove $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $m > s \geq 1$. In tal caso il minimo, $u(x)$, appartiene a $W^{1,m}((a,b);\mathbb{R}^N)$;
2. Se per ogni $R > 0$ su $(a,b) \times \overline{B}_R(0) \times \mathbb{R}^N$ vale

$$|F(x,z,p)|, \quad |F_z(x,z,p)|, \quad |F_p(x,z,p)| \quad \leq \gamma(R)(1+|p|^m)$$

dove $\gamma(R) > 0$,

Minimo nella classe $\mathcal{C} \to$ equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale?
No [Ball, Mizel].
Sì sotto ipotesi di crescita polinomiale della lagrangiana e delle sue derivate.

1. Il teorema di esistenza vale anche con $F(x,z,p) \geq \alpha|p|^m - \beta|z|^s - \gamma$, dove $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $m > s \geq 1$. In tal caso il minimo, $u(x)$, appartiene a $W^{1,m}((a,b);\mathbb{R}^N)$;
2. Se per ogni $R > 0$ su $(a,b) \times \overline{B}_R(0) \times \mathbb{R}^N$ vale

$$|F(x,z,p)|, \quad |F_z(x,z,p)|, \quad |F_p(x,z,p)| \quad \leq \gamma(R)(1+|p|^m)$$

dove $\gamma(R) > 0$, $u(x)$ soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange integrale;

Come ottenere l'equazione integrale di Eulero-Lagrange

Lagrangiane a crescita polinomiale

Minimo nella classe $\mathcal{C} \rightarrow$ equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale?
No [Ball, Mizel].
Sì sotto ipotesi di crescita polinomiale della lagrangiana e delle sue derivate.

1. Il teorema di esistenza vale anche con $F(x,z,p) \geq \alpha |p|^m - \beta |z|^s - \gamma$, dove $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $m > s \geq 1$. In tal caso il minimo, $u(x)$, appartiene a $W^{1,m}((a,b);\mathbb{R}^N)$;
2. Se per ogni $R > 0$ su $(a,b) \times \overline{B}_R(0) \times \mathbb{R}^N$ vale
$$|F(x,z,p)|, \quad |F_z(x,z,p)|, \quad |F_p(x,z,p)| \quad \leq \gamma(R)(1+|p|^m)$$
dove $\gamma(R) > 0$, $u(x)$ soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange integrale;
3. convessità in $p \rightarrow u$ di Lipschitz.

Da Lipschitz a C^∞

Maggiore regolarità di $F(x, z, p) \rightarrow$ maggiore regolarità di $u(x)$?

Da Lipschitz a C^∞

Maggiore regolarità di $F(x,z,p) \to$ maggiore regolarità di $u(x)$?
Sì, ma sotto un'ipotesi di *non degenerazione* di F_{pp}:

Se $F(x,z,p) \in C^k([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, con $k \geq 2$, ogni minimo $u(x)$ Lipschitziano è automaticamente di classe C^k se $F_{pp}(x,z,p) > 0$ per ogni $(x,z,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Da Lipschitz a C^∞

Maggiore regolarità di $F(x,z,p) \to$ maggiore regolarità di $u(x)$?
Sì, ma sotto un'ipotesi di *non degenerazione* di F_{pp}:

Se $F(x,z,p) \in C^k([a,b]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, con $k \geq 2$, ogni minimo $u(x)$ Lipschitziano è automaticamente di classe C^k se $F_{pp}(x,z,p) > 0$ per ogni $(x,z,p) \in [a,b]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$.

Il passaggio chiave è Lipschitz $\to C^1$.

Da Lipschitz a C^∞

Maggiore regolarità di $F(x, z, p) \to$ maggiore regolarità di $u(x)$?
Sì, ma sotto un'ipotesi di *non degenerazione* di F_{pp}:

Se $F(x, z, p) \in C^k([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, con $k \geq 2$, ogni minimo $u(x)$ Lipschitziano è automaticamente di classe C^k se $F_{pp}(x, z, p) > 0$ per ogni $(x, z, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Il passaggio chiave è Lipschitz $\to C^1$. Per $C^1 \to C^k$ basta $\det F_{pp}(x, u(x), u'(x)) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

E se il minimo non è Lipschitziano?

Fenomeno di Lavrentiev

E se il minimo non è Lipschitziano?

Fenomeno di Lavrentiev

Esempio

Lagrangiana di Manià: Sia $N = 1$ e $F(x, z, p) = (z^3 - x)^2 p^6$.

Esempio

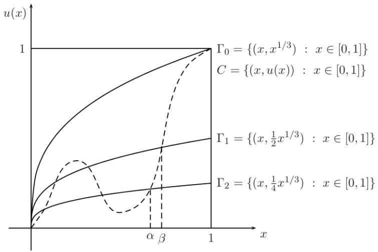
Lagrangiana di Manià: Sia $N = 1$ e $F(x, z, p) = (z^3 - x)^2 p^6$. Nella classe $\mathcal{C}(0, 1)$ delle funzioni $AC([0, 1])$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$,

E se il minimo non è Lipschitziano?

Fenomeno di Lavrentiev

Esempio

Lagrangiana di Manià: Sia $N = 1$ e $F(x, z, p) = (z^3 - x)^2 p^6$. Nella classe $\mathcal{C}(0, 1)$ delle funzioni $AC([0, 1])$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, il minimo è realizzato da $u_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

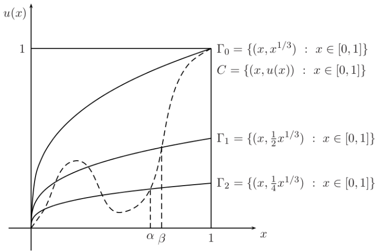


E se il minimo non è Lipschitziano?

Fenomeno di Lavrentiev

Esempio

Lagrangiana di Manià: Sia $N = 1$ e $F(x, z, p) = (z^3 - x)^2 p^6$. Nella classe $\mathcal{C}(0, 1)$ delle funzioni $AC([0, 1])$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, il minimo è realizzato da $u_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$.



Il minimo non è Lipschitziano, e accade che

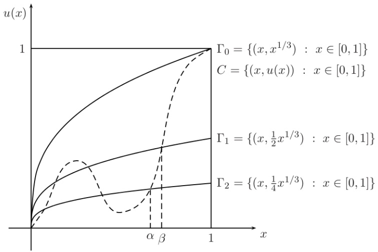
$$\inf_{u \in \mathcal{C}(0,1) \cap Lip([0,1])} \mathcal{F}(u) > 0 = \min_{u \in \mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(u).$$

E se il minimo non è Lipschitziano?

Fenomeno di Lavrentiev

Esempio

Lagrangiana di Manià: Sia $N = 1$ e $F(x, z, p) = (z^3 - x)^2 p^6$. Nella classe $\mathcal{C}(0, 1)$ delle funzioni $AC([0, 1])$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, il minimo è realizzato da $u_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$.



Il minimo non è Lipschitziano, e accade che

$$\inf_{u \in \mathcal{C}(0,1) \cap Lip([0,1])} \mathcal{F}(u) > 0 = \min_{u \in \mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(u).$$

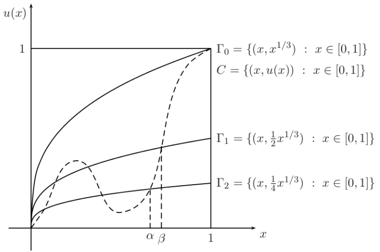
Esistono $\varepsilon > 0$ e $1 < \sigma < \frac{3}{2}$ tali che $F(x, z, p) = (z^3 - x)^2 p^6 + \varepsilon |p|^\sigma$ presenta ancora il fenomeno.

E se il minimo non è Lipschitziano?

Fenomeno di Lavrentiev

Esempio

Lagrangiana di Manià: Sia $N = 1$ e $F(x, z, p) = (z^3 - x)^2 p^6$. Nella classe $\mathcal{C}(0, 1)$ delle funzioni $AC([0, 1])$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, il minimo è realizzato da $u_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$.



Il minimo non è Lipschitziano, e accade che

$$\inf_{u \in \mathcal{C}(0,1) \cap Lip([0,1])} \mathcal{F}(u) > 0 = \min_{u \in \mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(u).$$

Esistono $\varepsilon > 0$ e $1 < \sigma < \frac{3}{2}$ tali che $F(x, z, p) = (z^3 - x)^2 p^6 + \varepsilon |p|^\sigma$ presenta ancora il fenomeno.

Il problema è la crescita di u_0' rispetto alla lagrangiana.

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

In generale, per $N = 1$ vale il seguente:

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

Se $F(x, z, p)$ è una funzione di classe $C^\infty([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tale che $F_{pp}(x, z, p) > 0$ ovunque e u è un *minimo locale forte* per il funzionale $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$, allora esiste $E \subseteq [a, b]$ chiuso di misura nulla tale che $u(x) \in C^\infty([a, b] \setminus E)$.

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

In generale, per $N = 1$ vale il seguente:

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

Se $F(x, z, p)$ è una funzione di classe $C^\infty([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tale che $F_{pp}(x, z, p) > 0$ ovunque e u è un *minimo locale forte* per il funzionale $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$, allora esiste $E \subseteq [a, b]$ chiuso di misura nulla tale che $u(x) \in C^\infty([a, b] \setminus E)$. Inoltre in qualsiasi intervallo di $[a, b] \setminus E$ vale la versione differenziale dell'equazione di Eulero-Lagrange.

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

In generale, per $N = 1$ vale il seguente:

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

Se $F(x, z, p)$ è una funzione di classe $C^\infty([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tale che $F_{pp}(x, z, p) > 0$ ovunque e u è un *minimo locale forte* per il funzionale $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$, allora esiste $E \subseteq [a, b]$ chiuso di misura nulla tale che $u(x) \in C^\infty([a, b] \setminus E)$. Inoltre in qualsiasi intervallo di $[a, b] \setminus E$ vale la versione differenziale dell'equazione di Eulero-Lagrange.

1. *minimo locale forte*: $\exists \delta > 0$ tale che $\forall v \in \mathcal{C} : \|u - v\|_\infty \leq \delta$ si ha $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$;

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

In generale, per $N = 1$ vale il seguente:

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

Se $F(x, z, p)$ è una funzione di classe $C^\infty([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tale che $F_{pp}(x, z, p) > 0$ ovunque e u è un *minimo locale forte* per il funzionale $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$, allora esiste $E \subseteq [a, b]$ chiuso di misura nulla tale che $u(x) \in C^\infty([a, b] \setminus E)$. Inoltre in qualsiasi intervallo di $[a, b] \setminus E$ vale la versione differenziale dell'equazione di Eulero-Lagrange.

1. *minimo locale forte*: $\exists \delta > 0$ tale che $\forall v \in \mathcal{C} : \|u - v\|_\infty \leq \delta$ si ha $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$;
2. Chi è E?

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

In generale, per $N = 1$ vale il seguente:

Teorema di regolarità parziale di Tonelli

Se $F(x, z, p)$ è una funzione di classe $C^\infty([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tale che $F_{pp}(x, z, p) > 0$ ovunque e u è un *minimo locale forte* per il funzionale $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$, allora esiste $E \subseteq [a, b]$ chiuso di misura nulla tale che $u(x) \in C^\infty([a, b] \setminus E)$. Inoltre in qualsiasi intervallo di $[a, b] \setminus E$ vale la versione differenziale dell'equazione di Eulero-Lagrange.

1. *minimo locale forte*: $\exists \delta > 0$ tale che $\forall v \in \mathcal{C} : \|u - v\|_\infty \leq \delta$ si ha $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$;
2. Chi è E? Esiste ovunque $u'(x)$ a valori possibilmente infiniti, è continua ed $E = \{x \in [a, b] : u'(x) \in \{+\infty, -\infty\}\}$.

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. graph$(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. graph$(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;
  2. $\exists! \;\; w \in C^2([x_0, x_1])$ soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (DEL), con $w \equiv u$ su $\{x_0, x_1\}$ e $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |w(x) - u(x_0)| < \frac{\delta}{2}$

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. $\mathrm{graph}(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;
  2. $\exists!\ w \in C^2([x_0, x_1])$ soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (DEL), con $w \equiv u$ su $\{x_0, x_1\}$ e $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |w(x) - u(x_0)| < \frac{\delta}{2}$ e in più w è l'unico minimo per $\mathcal{F}$ nella classe delle funzioni AC con queste proprietà.

Come lo ottengo?

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. graph$(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;
  2. $\exists! \; w \in C^2([x_0, x_1])$ soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (DEL), con $w \equiv u$ su $\{x_0, x_1\}$ e $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |w(x) - u(x_0)| < \frac{\delta}{2}$ e in più w è l'unico minimo per $\mathcal{F}$ nella classe delle funzioni AC con queste proprietà.

Come lo ottengo? Fissato M *sufficientemente grande*, considero, in un ε-intorno destro di x_0 *sufficientemente piccolo*, la famiglia di soluzioni $w(x; \alpha, \beta)$ di (DEL) con dati iniziali $w(x_0; \alpha, \beta) = u(x_0) + \alpha$ e $w'(x_0; \alpha, \beta) = \beta$

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. graph$(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;
  2. $\exists!\ w \in C^2([x_0, x_1])$ soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (DEL), con $w \equiv u$ su $\{x_0, x_1\}$ e $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |w(x) - u(x_0)| < \frac{\delta}{2}$ e in più w è l'unico minimo per $\mathcal{F}$ nella classe delle funzioni AC con queste proprietà.

Come lo ottengo? Fissato M *sufficientemente grande*, considero, in un ε-intorno destro di x_0 *sufficientemente piccolo*, la famiglia di soluzioni $w(x; \alpha, \beta)$ di (DEL) con dati iniziali $w(x_0; \alpha, \beta) = u(x_0) + \alpha$ e $w'(x_0; \alpha, \beta) = \beta$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $|\alpha|, |\beta| \leq M$.

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. graph$(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;
  2. $\exists!\ w \in C^2([x_0, x_1])$ soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (DEL), con $w \equiv u$ su $\{x_0, x_1\}$ e $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |w(x) - u(x_0)| < \frac{\delta}{2}$ e in più w è l'unico minimo per $\mathcal{F}$ nella classe delle funzioni AC con queste proprietà.

Come lo ottengo? Fissato M *sufficientemente grande*, considero, in un ε-intorno destro di x_0 *sufficientemente piccolo*, la famiglia di soluzioni $w(x; \alpha, \beta)$ di (DEL) con dati iniziali $w(x_0; \alpha, \beta) = u(x_0) + \alpha$ e $w'(x_0; \alpha, \beta) = \beta$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $|\alpha|, |\beta| \leq M$.
In questo ε-intorno trovo x_1 per cui esiste un unico β_0 con $w(x_1; 0, \beta_0) = u(x_1)$

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. graph$(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;
  2. $\exists!\ w \in C^2([x_0, x_1])$ soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (DEL), con $w \equiv u$ su $\{x_0, x_1\}$ e $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |w(x) - u(x_0)| < \frac{\delta}{2}$ e in più w è l'unico minimo per $\mathcal{F}$ nella classe delle funzioni AC con queste proprietà.

Come lo ottengo? Fissato M *sufficientemente grande*, considero, in un ε-intorno destro di x_0 *sufficientemente piccolo*, la famiglia di soluzioni $w(x; \alpha, \beta)$ di (DEL) con dati iniziali $w(x_0; \alpha, \beta) = u(x_0) + \alpha$ e $w'(x_0; \alpha, \beta) = \beta$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $|\alpha|, |\beta| \leq M$.
In questo ε-intorno trovo x_1 per cui esiste un unico β_0 con $w(x_1; 0, \beta_0) = u(x_1)$ e la famiglia $w(\cdot; \alpha, \beta_0)$, al variare di α è un *campo di estremali* che fibra R

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. graph$(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;
  2. $\exists!\ w \in C^2([x_0, x_1])$ soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (DEL), con $w \equiv u$ su $\{x_0, x_1\}$ e $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |w(x) - u(x_0)| < \frac{\delta}{2}$ e in più w è l'unico minimo per $\mathcal{F}$ nella classe delle funzioni AC con queste proprietà.

Come lo ottengo? Fissato M *sufficientemente grande*, considero, in un ε-intorno destro di x_0 *sufficientemente piccolo*, la famiglia di soluzioni $w(x; \alpha, \beta)$ di (DEL) con dati iniziali $w(x_0; \alpha, \beta) = u(x_0) + \alpha$ e $w'(x_0; \alpha, \beta) = \beta$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $|\alpha|, |\beta| \leq M$.
In questo ε-intorno trovo x_1 per cui esiste un unico β_0 con $w(x_1; 0, \beta_0) = u(x_1)$ e la famiglia $w(\cdot; \alpha, \beta_0)$, al variare di α è un *campo di estremali* che fibra R + $F_{pp} > 0 \to w(x; 0, \beta_0)$ minimo!

Idea della dimostrazione del teorema di Tonelli

- $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui $\liminf\limits_{x \to x_0} \left| \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \right| < +\infty$.
- $\exists b > x_1 > x_0$ tale che:
  1. graph$(u) \subseteq [x_0, x_1] \times [u(x_0) - \frac{\delta}{2}, u(x_0) + \frac{\delta}{2}] =: R$;
  2. $\exists!\ w \in C^2([x_0, x_1])$ soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (DEL), con $w \equiv u$ su $\{x_0, x_1\}$ e $\sup_{x\in[x_0,x_1]} |w(x) - u(x_0)| < \frac{\delta}{2}$ e in più w è l'unico minimo per $\mathcal{F}$ nella classe delle funzioni AC con queste proprietà.

  Come lo ottengo? Fissato M *sufficientemente grande*, considero, in un ε-intorno destro di x_0 *sufficientemente piccolo*, la famiglia di soluzioni $w(x; \alpha, \beta)$ di (DEL) con dati iniziali $w(x_0; \alpha, \beta) = u(x_0) + \alpha$ e $w'(x_0; \alpha, \beta) = \beta$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $|\alpha|, |\beta| \leq M$.
  In questo ε-intorno trovo x_1 per cui esiste un unico β_0 con $w(x_1; 0, \beta_0) = u(x_1)$ e la famiglia $w(\cdot; \alpha, \beta_0)$, al variare di α è un *campo di estremali* che fibra R + $F_{pp} > 0 \to w(x; 0, \beta_0)$ minimo!
- Modifico u con $w(x; 0, \beta_0)$ in $[x_0, x_1]$ e ottengo che $u \equiv w$. Stessa cosa in un intorno sinistro.

Alcune riflessioni sul teorema di regolarità

Alcune riflessioni sul teorema di regolarità

Regolarità in presenza di sommabilità di F_z o F_x

Assumo le ipotesi del teorema di Tonelli e $F(x, z, p)$ a crescita superlineare in p.

Alcune riflessioni sul teorema di regolarità

Regolarità in presenza di sommabilità di F_z o F_x

Assumo le ipotesi del teorema di Tonelli e $F(x, z, p)$ a crescita superlineare in p.
Se vale almeno una delle due:

1. $F_z(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$;
2. $F_x(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$.

dove u è un minimo locale forte per il funzionale $\mathcal{F}$,

Alcune riflessioni sul teorema di regolarità

Regolarità in presenza di sommabilità di F_z o F_x

Assumo le ipotesi del teorema di Tonelli e $F(x, z, p)$ a crescita superlineare in p. Se vale almeno una delle due:

1. $F_z(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$;
2. $F_x(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$.

dove u è un minimo locale forte per il funzionale $\mathcal{F}$, allora $u(x) \in C^\infty([a, b])$.

Alcune riflessioni sul teorema di regolarità

Regolarità in presenza di sommabilità di F_z o F_x

Assumo le ipotesi del teorema di Tonelli e $F(x, z, p)$ a crescita superlineare in p. Se vale almeno una delle due:

1. $F_z(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$;
2. $F_x(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$.

dove u è un minimo locale forte per il funzionale $\mathcal{F}$, allora $u(x) \in C^\infty([a, b])$.

Risultato utile per:

1. Regolarità per minimi relativi a lagrangiane $F(x, p)$ e $F(z, p)$;

Alcune riflessioni sul teorema di regolarità

Regolarità in presenza di sommabilità di F_z o F_x

Assumo le ipotesi del teorema di Tonelli e $F(x, z, p)$ a crescita superlineare in p. Se vale almeno una delle due:

1. $F_z(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$;
2. $F_x(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$.

dove u è un minimo locale forte per il funzionale $\mathcal{F}$, allora $u(x) \in C^\infty([a, b])$.

Risultato utile per:

1. Regolarità per minimi relativi a lagrangiane $F(x, p)$ e $F(z, p)$;
2. Esempi di minimi che non soddisfano l'equazione di Eulero-Lagrange integrale perché F_z non è sommabile.

Alcune riflessioni sul teorema di regolarità

Regolarità in presenza di sommabilità di F_z o F_x

Assumo le ipotesi del teorema di Tonelli e $F(x, z, p)$ a crescita superlineare in p. Se vale almeno una delle due:

1. $F_z(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$;
2. $F_x(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$.

dove u è un minimo locale forte per il funzionale $\mathcal{F}$, allora $u(x) \in C^\infty([a, b])$.

Risultato utile per:

1. Regolarità per minimi relativi a lagrangiane $F(x, p)$ e $F(z, p)$;
2. Esempi di minimi che non soddisfano l'equazione di Eulero-Lagrange integrale perché F_z non è sommabile. Basta considerare $F(x, z, p) = (z^{\alpha_1} - x^{\alpha_2})^{\beta_0} p^\gamma + \varepsilon p^2$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \gamma$ interi positivi con

Alcune riflessioni sul teorema di regolarità

Regolarità in presenza di sommabilità di F_z o F_x

Assumo le ipotesi del teorema di Tonelli e $F(x, z, p)$ a crescita superlineare in p. Se vale almeno una delle due:

1. $F_z(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$;
2. $F_x(\cdot, u, u') \in L^1((a, b))$.

dove u è un minimo locale forte per il funzionale $\mathcal{F}$, allora $u(x) \in C^\infty([a, b])$.

Risultato utile per:

1. Regolarità per minimi relativi a lagrangiane $F(x, p)$ e $F(z, p)$;
2. Esempi di minimi che non soddisfano l'equazione di Eulero-Lagrange integrale perché F_z non è sommabile. Basta considerare $F(x, z, p) = (z^{\alpha_1} - x^{\alpha_2})^{\beta_0} p^\gamma + \varepsilon p^2$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \gamma$ interi positivi con β_0 pari, $\frac{1}{2} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 1$ e γ pari con $\gamma \geq \frac{\alpha_1(1+\alpha_2\beta)}{\alpha_1 - \alpha_2}$.

Esempio di Davie

Il teorema è ottimale?

Esempio di Davie

Il teorema è ottimale? Sì [Davie]. In più posso scegliere la lagrangiana in modo che valga il fenomeno di Lavrentiev.

Esempio di Davie

Il teorema è ottimale? Sì [Davie]. In più posso scegliere la lagrangiana in modo che valga il fenomeno di Lavrentiev.

Davie costruisce una $v \in \mathcal{C}(0,1)$, $v \in C^\infty([a,b] \setminus E)$ con $v' \in L^2((a,b))$ e $v'(t) = +\infty$ sse $t \in E$

Esempio di Davie

Il teorema è ottimale? Sì [Davie]. In più posso scegliere la lagrangiana in modo che valga il fenomeno di Lavrentiev.

Davie costruisce una $v \in \mathcal{C}(0,1)$, $v \in C^\infty([a,b] \setminus E)$ con $v' \in L^2((a,b))$ e $v'(t) = +\infty$ sse $t \in E$ e considera $F(x,z,p) = (\phi(z) - \phi(v(x)))^2 \psi(p) + \varepsilon p^2$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo

Esempio di Davie

Il teorema è ottimale? Sì [Davie]. In più posso scegliere la lagrangiana in modo che valga il fenomeno di Lavrentiev.

Davie costruisce una $v \in \mathcal{C}(0,1)$, $v \in C^\infty([a,b] \setminus E)$ con $v' \in L^2((a,b))$ e $v'(t) = +\infty$ sse $t \in E$ e considera $F(x,z,p) = \left(\phi(z) - \phi(v(x))\right)^2 \psi(p) + \varepsilon p^2$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e con $\phi, \phi \circ v, \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\psi, \psi'' \geq 0$ costruite *ad hoc*.

Regolarità dei minimi del problema di Lagrange

Gioacchino Antonelli

Relatore: Prof. Luigi Ambrosio

Correlatore: Prof. Massimo Gobbino

Università di Pisa

13 Maggio 2016