Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI MATEMATICA
Corso di Laurea triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Regolarità dei minimi del problema di Lagrange

Candidato:
Gioacchino Antonelli
Matricola 508701

Relatore:
Prof. Luigi Ambrosio

Correlatore:
Prof. Massimo Gobbino

Anno Accademico 2015–2016

Indice

CAPITOLO 1

Preliminari

Il problema classico di calcolo delle variazioni, che ci proponiamo di studiare, è il seguente: data una lagrangiana $F : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con una certa regolarità, trovare

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \right\} \tag{1.0.1}$$

al variare delle funzioni $u : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ con $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$, essendo $\alpha \in \mathbb{R}^N$ e $\beta \in \mathbb{R}^N$ fissi.

Chiaramente, in questo modo, il problema non è ben posto: non è chiaro, infatti, in quale classe funzionale possa variare la u. La classe più adatta, in cui affronteremo il problema da ora in poi, è quella delle funzioni *assolutamente continue*

$$\mathcal{C} := \{u \in AC([a, b]; \mathbb{R}^N) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}. \tag{1.0.2}$$

Nella prossima sezione, infatti, mostreremo come, per una funzione assolutamente continua, esista quasi ovunque la derivata in senso classico e in più valga il teorema fondamentale del calcolo integrale. Prima, però, è necessario enunciare qualche teorema di base di teoria della misura.

1.1 Richiami di teoria della misura

In questa prima parte richiameremo due importanti risultati, entrambi noti: il teorema di Radon-Nikodym, e il teorema di continuità in media. Del primo forniamo una dimostrazione "variazionale". La dimostrazione solita che si potrebbe fornire utilizza la teoria classica sugli spazi di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali continui, e si può trovare in vari testi [2, pagg. 95-99].

Teorema 1.1.1 (Radon-Nikodym)**.** *Siano ν e μ due misure finite su $(X, \mathcal{F})$ spazio di misura. Se $\nu \ll \mu$ (ovvero $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{F}$) allora esiste $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ positiva tale che $\nu = f\mu$, ovvero*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \nu(A) = \int_A f(x)d\mu. \tag{1.1.1}$$

Dimostrazione. D'ora in poi sarà indicata con $f\mu$ la misura su $(X, \mathcal{F})$ tale che $f\mu(A) = \int_A f d\mu$. Consideriamo il problema variazionale

$$\sup\left\{\int_X f d\mu \mid f \geq 0, f\mu \leq \nu\right\}. \tag{1.1.2}$$

Sia s il sup (esiste perché perlomeno la funzione nulla è nell'insieme). Considerata una successione g_n tale che $\int_X g_n d\mu$ tende crescendo ad s, si consideri $f_i = \sup_{\{} n = 1, \dots, i\} g_n$ il sup puntuale delle funzioni. Risulta che $f_i\mu \leq \nu$, poiché cioè era vero per le g_n ed è immediato notare che la proprietà è stabile per il sup puntuale. Inoltre $f_i \uparrow f$. Per il teorema di convergenza monotona [2, pag.34] $f_i\mu \uparrow f\mu$ e dunque anche $f\mu \leq \nu$. Dunque $\int_X f d\mu \leq s$. Ma $\int_X g_n \leq \int_X f_n$ e passando al limite ho ancora per convergenza monotona che $s \leq \int_X f d\mu$ e dunque f realizza il massimo cercato.

Detta $\sigma := \nu - f\mu \geq 0$ vale la seguente

$$\forall t > 0, \forall B \in \mathcal{F}, \quad t\chi_B\mu \leq \sigma \Rightarrow \mu(B) = 0. \tag{1.1.3}$$

Infatti $t\chi_B\mu \leq \sigma \Rightarrow (f + t\chi_B)\mu \leq \nu$. Dunque, risolvendo f il problema variazionale (1.1.2), vale

$$\int_X (f + t\chi_B)d\mu \leq \int_X f d\mu \Rightarrow \mu(B) \leq 0 \tag{1.1.4}$$

e dunque $\mu(B) = 0$. Mostrato che σ e μ misure positive soddisfano la proprietà in (1.1.3), mostro che da qui si ottiene che $\sigma \perp \mu$ (Ovvero esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A) = 0$ e $\sigma(A^c) = 0$). Considero il nuovo problema variazionale

$$\inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{F}, \sigma(A^c) = 0\}. \tag{1.1.5}$$

Sia m tale inf. Siano A_n tali che $\mu(A_n) \downarrow m$. E' evidente che $\sigma((\cap_{n=1}^{+\infty} A_n)^c) = 0$ e dunque $\mu(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n) \geq m$. Ma vale anche che $\mu(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \mu(A_n) \downarrow m$ e dunque $A := \cap_{n=1}^{+\infty} A_n$ è una soluzione al problema variazionale 1.1.5. Mostro che $\mu(A) = 0$, da cui seguirebbe l'ortogonalità. Suppongo, dunque, per assurdo, che $\mu(A) > 0$. Considero quest'ultimo problema variazionale, dipendente da $h \in \mathbb{N}$,

$$\sup\{\mu(B) \mid \mathcal{F} \ni B \subseteq A, \mu(C) \geq 2^h\sigma(C) \quad \forall \mathcal{F} \ni C \subseteq B\}. \tag{1.1.6}$$

Anche questo problema ammette soluzione B_h, in quanto è semplice notare che la proprietà si mantiene per unione e dunque vale un discorso analogo a quello fatto per i due problemi precedenti. Si ha, inoltre, per la proprietà, che $\sigma(B_h) \leq \frac{\mu(B_h)}{2^h}$ e dunque per il lemma di Borel-Cantelli [2, pag.6] vale che $\sigma(\limsup_{h\to+\infty} B_h) = 0$. Allora anche

$\mu(\limsup_{h\to+\infty} B_h) = 0$, altrimenti, essendo $C := \limsup_{h\to+\infty} B_h \subseteq A$, si avrebbe che $\sigma((A \setminus C)^c) = 0$, da cui, poiché A era soluzione di (1.1.5), $\mu(A \setminus C) \geq \mu(A)$ e dunque $\mu(C) = 0$. Dunque $0 = \mu(C) \geq \limsup_{h\to+\infty} \mu(B_h)$, da cui $\mu(B_h) \to 0$. In più, vale la seguente

$$\mu(D) \leq 2^h \sigma(D) \quad \forall D \subseteq A \setminus B_h. \tag{1.1.7}$$

Infatti se per assurdo non valesse, esisterebbe $D_0 \subseteq A \setminus B_h$ con $\mu(D_0) > 2^h\sigma(D_0)$. Questo insieme, per massimalità di B_h, ne deve contenere uno $S \subset D_0$ con $\mu(S) < 2^h\sigma(S)$ (e dunque, esiste il più piccolo $l_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(S) \leq 2^h\sigma(S) - \frac{1}{l_1}$). Sia Y la classe dei sottoinsiemi S di D_0 per cui vale questa disuguaglianza. Ad ognuno di questi è associato un l_1 come definito sopra ed essendo l'insieme degli l_1 così scelti non vuoto, esiste il minimo, diciamo h_1, per cui esiste un certo D_1 tale che $\mu(D_1) \leq 2^h\sigma(D_1) - \frac{1}{h_1}$. Analogamente $D_1 \setminus D_0$ deve contenere un D_2 con $\mu(D_2) \leq 2^h\sigma(D_2) - \frac{1}{h_2}$ dove è possibile scegliere h_2 minimo fra quelli per cui vale questa proprietà. Allora, iterando il ragionamento, sia $D := D_0 \setminus \cup_{i=1}^{+\infty} D_i$ (visto che $\mu(D_0) > 2^h\sigma(D_0)$, non posso arrestarmi dopo un numero finito di passi e $\mu(D) \neq 0$). Inoltre sicuramente la successione h_i è illimitata altrimenti $\mu(\cup_{i=1}^{+\infty} D_i) \leq 2^h\sigma(\cup_{i=1}^{+\infty} D_i) - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{h_i} \downarrow -\infty$, che è palesemente assurdo. Allora, posso supporre, a meno di passare ad una sottosuccessione, che $h_i \to +\infty$. Se $F \subseteq D$, sicuramente $F \subseteq D_0 \setminus \cup_{i=1}^{j} D_j$ per ogni j, e in particolare per quelli tali che $h_j > 1$. Per la proprietà di minimalità di cui s'è tenuto conto per la scelta dei D_i, risulta $\mu(F) \geq 2^h\sigma(F) - \frac{1}{h_j - 1}$. Valendo questo per ogni j ed essendo $h_j \to +\infty$, vale dunque $\mu(F) \geq 2^h\sigma(F)$. Dunque $B_h \sqcup D$ soddisfa le richieste del problema variazionale (1.1.6), eppure $\mu(B_h \sqcup D) = \mu(B_h) + \mu(D) > \mu(B_h)$ poiche $\mu(D) \neq 0$ come osservato prima. Essendo ciò assurdo vale la (1.1.7).

Ora, per concludere, siccome $\mu(B_h) \to 0$ e $\mu(A) > 0$ per ipotesi di assurdo, esiste un certo h per cui $\mu(B_h) < \mu(A)$. La (1.1.7) mi permette di concludere che

$$2^{-h}\chi_{A\setminus B_h}\mu \leq \sigma \tag{1.1.8}$$

e dunque per la (1.1.3) ottengo che $\mu(A \setminus B_h) = \mu(A) - \mu(B_h) = 0$, assurdo poiché s'è scelto h dimodoché $\mu(B_h) < \mu(A)$.

A questo punto s'è mostrato che $\sigma \perp \mu$, ovvero l'esistenza di un $A \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A) = 0$ e $\sigma(A^c) = 0$. Se per assurdo esistesse un $B \in \mathcal{F}$ tale che $\sigma(B) \neq 0$, allora $\sigma(B \cap A) \neq 0$. Ma $\mu(B \cap A) = 0$ per come è stato trovato A e dunque per assoluta continuità di σ rispetto a μ (che discende dall'ipotesi $\nu \ll \mu$) si avrebbe $\sigma(B \cap A) = 0$ che genera una contraddizione. Dunque $\sigma = 0$ e quindi la f trovata nel primo problema variazionale (1.1.2) soddisfa $\nu = f\mu$. □

Nota 1.1.2. Una volta ottenuto il teorema di Radon-Nikodym per misure finite, è semplice estenderlo al caso in cui sia μ che ν sono misure σ-finite (ovvero in cui lo spazio è ricopribile da un'unione numerabile di insiemi di misura finta). La conclusione del teorema però non rimane vera in tutte le sue parti: se μ è σ-finita e ν è finita il teorema si estende senza complicazione, ma se entrambe fossero σ-finite, la funzione densità f ottenuta potrebbe non essere L^1. Se non richiediamo neanche la σ-finitezza il teorema smette di valere. Per una discussione di ciò, si può leggere [18, pagg.124-125].

Di fondamentale importanza risulta il seguente risultato di continuità in media [2, pagg. 123-125]

Teorema 1.1.3 (Continuità in media)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ (nel senso della misura di Lebesgue) si ha*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0. \tag{1.1.9}$$

Saranno fondamentali, soprattutto nella dimostrazione del teorema di semicontinuità e del teorema di esistenza delle soluzioni al problema (1.0.1) i seguenti due teoremi, di Egorov e di Lusin. Con λ da ora in poi si indicherà la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1.4 (Teorema di Egorov)**.** *Siano $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ funzioni misurabili che convergono puntualmente quasi ovunque ad $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un compatto $K \subseteq (a, b)$ tale che $\lambda((a, b) \setminus K) \leq \epsilon$ e su K la convergenza è uniforme.*

Dimostrazione. Fissiamo un certo $\epsilon > 0$. Le f_n convergono puntualmente in $(a, b) \setminus N$, essendo N un insieme di misura nulla. Per ogni $j \in \mathbb{N}$, sia

$$A_i^j = \{x \in (a, b) \setminus N \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \quad \forall n \geq i\}. \tag{1.1.10}$$

Chiaramente gli A_i^j sono misurabili, e a j fisso, $A_i^j \uparrow (a, b) \setminus N$ per convergenza puntuale delle f_n. Allora esiste un certo $i(j)$ tale che

$$\lambda\left(((a, b) \setminus N) \setminus A_{i(j)}^j\right) = \lambda\left((a, b) \setminus A_{i(j)}^j\right) \leq \frac{\epsilon}{2^j}. \tag{1.1.11}$$

Posto $C := \cap_{j=1}^{+\infty} A_{i(j)}^j$ si ha dunque che

$$\lambda((a, b) \setminus C) = \lambda\left(\cup_{j=1}^{+\infty}\left((a, b) \setminus A_{i(j)}^j\right)\right) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda\left((a, b) \setminus A_{i(j)}^j\right) \leq \epsilon. \tag{1.1.12}$$

Mostro che su C la convergenza è uniforme. Infatti se $x \in C$, allora $x \in A_{i(j)}^j$ per ogni j. Dunque fissato un certo ϵ, esiste j con $\epsilon > \frac{1}{j}$, tale che si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} < \epsilon$ per ogni $n \geq i(j)$, per come erano stati definiti gli $A_{i(j)}^j$. Dunque la tesi è stata ottenuta con $C \subseteq (a, b)$ misurabile: basta ora ricordare che $\lambda(C) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq C, K \text{chiuso}\}$ [2, pagg.18-19] e dunque esiste un chiuso $K \subseteq C \subseteq (a, b)$ (e quindi compatto), su cui si ha convergenza uniforme e $\lambda((a, b) \setminus K) \leq 2\epsilon$. □

Nota 1.1.5. La dimostrazione precedente vale parola per parola nel caso in cui le funzioni siano misurabili in uno spazio di misura finito (chiaramente, nella conclusione, invece di "compatto" bisogna considerare un "misurabile" generico).

Teorema 1.1.6 (Teorema di Lusin)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Allora per ogni ϵ esiste un compatto $K \subseteq (a, b)$ con $\lambda((a, b) \setminus K) \leq \epsilon$ tale che la restrizione di f a K è una funzione continua.*

Dimostrazione. $f_n = f\chi_{\{-n\leq f(x)\leq n\}}$ sono funzioni in $L^1((a,b),\lambda))$ (poiché limitate) che coincidono con f sull'insieme $A_n = \{x \in (a,b) : -n \leq f(x) \leq n\} \uparrow (a,b)$. Allora mi basta mostrare il teorema per le funzioni in $L^1((a,b),\lambda)$ (poi con semplici discorsi di approssimazione il risultato generale segue usando questa prima osservazione).

E' noto che le funzioni $C^0([a,b])$ formano un denso (in norma L^1) delle funzioni $L^1((a,b),\lambda)$ e dunque esiste $f_n \to f$ in norma L^1 con f_n continue, e quindi una sua sottosuccessione $f_{n_k} \to f$ quasi certamente.

Dunque, per il teorema di Egorov 1.1.4, risulta che esiste un compatto $K \subseteq [a,b]$ tale che le f_{n_k} convergono uniformemente su K e $\lambda((a,b) \setminus K) \leq \epsilon$. Ma limite uniforme di funzioni continue è continuo e dunque la restrizione di f a K è una funzione continua. □

Nota 1.1.7. L'idea fondamentale della dimostrazione che le $C^0([a,b])$ sono dense, in norma L^p, in $L^p((a,b),\lambda)$ con $1 \leq p < +\infty$ si trova in [17, pagg.332-333] e si estende senza difficoltà al fatto che $C^0_c(\mathbb{R}^N)$ sono dense, in norma L^p, in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Il teorema di Lusin, più in generale, vale per misure di Radon su spazi T_2 localmente compatti, e la dimostrazione è sostanzialmente differente da quella data nel caso semplice, come si può immaginare ([18, pagg.53 e seguenti]). La dimostrazione del teorema di Lusin in questo caso più generale permette di dimostrare la densita delle $C^0_c(X)$ nelle $L^p(X,\mu)$, con μ misura di Radon, anche nel caso X T_2 e localmente compatto ([18, Pag. 68]).

1.2 Funzioni assolutamente continue

Per una questione di semplicità mostriamo i risultati sulle funzioni assolutamente continue solo per le funzioni a valori in $\mathbb{R}$, essendo le generalizzazioni con le funzioni a valori in $\mathbb{R}^N$ ovvie.

Definizione 1.2.1. Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che vale

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i - a_i < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon \tag{1.2.1}$$

per ogni famiglia finita di intervalli $(a_i, b_i)_{1\leq i\leq n}$, a due a due disgiunti, tutti contenuti in $[a,b]$.

Per le funzioni assolutamente continue è di particolare rilievo la proprietà che esse hanno di poter essere scritte come differenza di funzioni non-decrescenti. Questa proprietà torna molto utile in una certa quantità di contesti, fra cui la dimostrazione, che daremo fra breve, che una funzione è esprimibile come integrale di una funzione $g \in L^1((a,b))$ se e solo se è assolutamente continua. Diamo, a questo scopo, una definizione.

Definizione 1.2.2. Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua, si dice *variazione totale* di f, la seguente seguente funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) := \sup_{\Sigma_{a,x}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \right\} \tag{1.2.2}$$

dove $\Sigma_{a,x}$ è l'insieme di tutte le possibili partizioni $\{a = x_0 < \cdots < x_n = x\}$ di $[a, x]$.

Nota 1.2.3. E' semplice mostrare che se la funzione f è assolutamente continua, allora per ogni $a \leq x \leq b$, $F(x)$ è finito.

A questo punto, definendo

$$f_+ = \frac{1}{2}(F(x) + f(x)) \quad f_- = \frac{1}{2}(F(x) - f(x)) \tag{1.2.3}$$

è immediato notare che $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ e $F(x) = f_+(x) + f_-(x)$. Inoltre vale il seguente:

Lemma 1.2.4. *Le funzioni $f_+(x)$, $f_-(x)$ e $F(x)$ definite in $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$ sono non-decrescenti e assolutamente continue.*

Dimostrazione. Si può trovare in [2, pagg.120-121] □

Dal lemma 1.2.4 segue, infine, che una funzione assolutamente continua si può esprime come differenza di funzioni non-decrescenti, anch'esse assolutamente continue. A questo punto possiamo dimostrare quanto ci eravamo proposti poco fa:

Proposizione 1.2.5. *Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, allora esiste $g \in L^1((a, b))$ tale che*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(s)ds \quad \forall x \in [a, b] \tag{1.2.4}$$

se e solo se f è una funzione assolutamente continua

Dimostrazione. Nel seguito si intende che λ è l'usuale misura di Lebesgue, e $f\mu$ indica la misura definita in modo che $f\mu(E) = \int_E f d\mu$, con E misurabile.

Se esiste $g \in L^1((a, b))$ che soddisfa quanto scritto in (1.2.4), allora se $x > y$, si ha $|f(x) - f(y)| \leq \int_y^x |g(s)|ds$. La misura definita sui misurabili di (a, b) da $\mu(E) = \int_E |g(s)|ds$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e dunque per ogni ϵ esiste un certo δ tale che per ogni E misurabile, $\lambda(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \epsilon$. E' evidente che questo implica che f è assolutamente continua, secondo la definizione data in 1.2.1.

Viceversa se f è assolutamente continua, secondo il lemma 1.2.4, $f = f^+ - f^-$ con f^+ ed f^- assolutamente continue non-decrescenti. Per linearità posso dunque suppore f non-decrescente e considerare la misura finita su $\mathbb{R}$, ν, di cui f è funzione di ripartizione (dopo aver prolungato in maniera continua f definendola costantemente $f(a)$ prima di a e costantemente $f(b)$ dopo b). L'assoluta continuità della funzione f ci garantisce che $\nu \ll \chi_{(a,b)}\lambda$. Infatti, trattandosi di misure finite, ci basta mostrare che per ogni ϵ esiste δ tale che se E è un misurabile

$$\chi_{(a,b)}\lambda(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \epsilon. \tag{1.2.5}$$

Per come è stata costruita, ν è concentrata su (a, b), e dunque per provare (1.2.5) basta che mi concentri sui misurabili di (a, b). Se E è unione disgiunta finita di intervalli (a_i, b_i) contenuti in (a, b), la proprietà precedente è conseguenza della definizione in

(1.2.1). D'altronde ciò implica che se E è un aperto, e dunque unione numerabile di intervalli aperti, la (1.2.5) vale ancora, passando al limite su successioni crescenti di insiemi. Dato, infine, un misurabile qualunque E, è noto che [2, pagg.18-19] $\lambda(E) = \inf\{\lambda(A) \mid A \quad \text{aperto}, A \supseteq E\}$, e dunque la proprietà 1.2.5 vale per approssimazione su tutti i misurabili. Dunque per il teorema di Radon-Nykodim 1.1.1, esiste $g \in L^1((a,b))$ positiva tale che $\nu(E) = g(\chi_{(a,b)}\lambda)(E)$ e dunque se $E = (a,x]$, si ha $\nu((a,x]) = f(x) - f(a) = \int_a^x g(s)ds$ dove si intende, con ds che si integra rispetto alla λ, usuale misura di Lebesgue. Dunque, si è ottenuta la tesi. □

Con quanto visto finora, sfruttando il teorema 1.1.3, si può dimostrare il teorema enunciato all'inizio del capitolo, che inizia a rendere chiaro il motivo per cui la classe in cui indagare il problema fondamentale di calcolo delle variazioni sia quella delle funzioni assolutamente continue: sostanzialmente vale che quasi ovunque una funzione assolutamente continua è derivabile in senso classico, e in più essa è l'integrale della propria derivata.

Teorema 1.2.6. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua. Allora, per quasi ogni $x \in (a,b)$ esiste $f'(x)$ e in più vale, per ogni x, che*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds. \tag{1.2.6}$$

Dimostrazione. Per quanto mostrato nella proposizione 1.2.5, esiste $g \in L^1((a,b))$ tale che per ogni $x \in [a,b]$ valga $f(x) = f(a) + \int_a^x g(s)ds$. Fissiamo $x_0 \in (a,b)$ un punto di Lebesgue (i.e. per cui valga il teorema della continuità in media 1.1.3). Allora se $h > 0$ è scelto tale che $[x_0 - h, x_0 + h] \subseteq (a,b)$, risulta

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} g(s)ds = g(x_0) + \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (g(s) - g(x_0))ds. \tag{1.2.7}$$

Dal momento che x_0 è un punto di Lebesgue, si ha che

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (g(s) - g(x_0))ds\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} |g(s) - g(x_0)|ds \to 0 \tag{1.2.8}$$

quando $h \to 0$. Dunque si ha che $f'_+(x_0) = g(x_0)$. Analogamente si ha $f'_-(x_0) = g(x_0)$ e dunque f è derivabile in x_0. Visto che ciò vale se x_0 è un punto di Lebesgue in (a,b), e quasi tutti i punti sono di Lebesgue, si deduce che f è derivabile quasi ovunque e in particolare $f'(x) = g(x)$. Se ne deduce, per come era sta scelta g, che

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds \tag{1.2.9}$$

ovvero ciò che si voleva mostrare.

□

1.2.1 Funzioni AC, Spazi di Sobolev, Immersioni Holder

Ricordiamo brevemente la definizione degli Spazi di Sobolev in una dimensione:

Definizione 1.2.7. Dato $1 \leq p \leq +\infty$, si indica con $W^{1,p}((a,b))$ lo spazio delle funzioni $f \in L^p((a,b))$ tali per cui esiste una $g \in L^p((a,b))$ detta *derivata debole* di f, per cui vale

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b g(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty((a,b)). \tag{1.2.10}$$

Abbiamo mostrato che data una funzione $f \in AC([a,b])$, essa è derivabile quasi ovunque in senso classico, la sua derivata f' è in $L^1((a,b))$ e vale $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)dx$ per ogni $x \in [a,b]$. Una volta ottenuto questo è immediato notare che una funzione assolutamente continua appartiene anche a $W^{1,1}((a,b))$, essendo $f'(x)$ la sua derivata debole (infatti si dimostra semplicemente che vale l'integrazione per parti). Inoltre una semplice applicazione del teorema di Fubini-Tonelli e del lemma di Du boys-Reymond 1.4.2 in versione derivata, che sarà mostrato dopo, permette di concludere che, per le funzioni f in $W^{1,p}((a,b))$, esiste una costante c tale per cui valga quasi ovunque per $x \in (a,b)$ che

$$f(x) = c + \int_a^x g(x)dx \tag{1.2.11}$$

dove g è la derivata debole di f. Allora, se $f \in W^{1,1}((a,b))$, in virtù di quanto dimostrato nella proposizione 1.2.5, la funzione definita su $[a,b]$ da $c + \int_a^x g(x)dx$, essendo $g \in L^1((a,b))$, è assolutamente continua. Dunque f ha un rappresentante assolutamente continuo e si può dedurre la seguente proposizione:

Proposizione 1.2.8. *E' possibile identificare lo spazio delle funzioni $AC([a,b])$ con $W^{1,1}((a,b))$ nel seguente senso: ogni funzione $f \in AC([a,b])$ appartiene anche a $W^{1,1}((a,b))$ e viceversa ogni funzione in $W^{1,1}((a,b))$ ammette un rappresentante in $AC([a,b])$.*

A questo punto si può notare che se $f \in AC([a,b])$ e vale $f' \in L^p((a,b))$, con $1 < p < +\infty$ allora f è una funzione $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$-holderiana. Inoltre se $p = +\infty$, allora f è lipschitziana. Questo discende immediatamente dal teorema del calcolo e dalla disuguaglianza di Holder: infatti

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_y^x f'(s)ds\right| \leq \int_y^x \left|f'(s)ds\right| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f'(s)|^p\right)^{\frac{1}{p}} ds. \tag{1.2.12}$$

Si noti inoltre che se $f \in AC([a,b])$ e $f' \in L^p((a,b))$, allora $f \in W^{1,p}((a,b))$. In maniera del tutto identica a quanto fatto sopra, sfruttando che le funzioni di Sobolev sono quasi ovunque, a meno di una costante, integrale della propria derivata, lo stesso calcolo fatto in (1.2.12) permette di concludere che le funzioni in $W^{1,p}((a,b))$ ammettono un rappresentante $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$-holderiano. Dunque si può riassumere quanto mostrato nella seguente proposizione:

Proposizione 1.2.9. *Dato $1 < p \leq +\infty$, se una funzione $f \in AC([a,b])$ è tale per cui $f' \in L^p((a,b))$, allora f è $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$-holderiana. In generale ogni funzione $f \in W^{1,p}((a,b))$ ammette un rappresentante $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$-holderiano.*

Nota 1.2.10. D'ora in poi, quando sarà necessario, lavorando in $W^{1,p}((a,b))$ si sceglierà sempre un rappresentante $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$-holderiano, la cui esistenza è assicurata dalla proposizione 1.2.9.

1.3 Il criterio di Dunford-Pettis

In questa sezione studieremo alcune proprietà equivalenti, per una famiglia di funzioni in $L^1((0,1),\lambda)$ (essendo λ l'usuale misura di Lebesgue), all'essere equi-integrabili. A questo proposito diamo la seguente definizione:

Definizione 1.3.1. Sia $\mathcal{F} \subseteq L^1(X,\mu)$, dove (X,μ) è uno spazio di misura finito. Allora si dice che $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni equi-integrabili se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| d\mu < \epsilon. \tag{1.3.1}$$

Nota 1.3.2. Su spazi di misura non finita, bisogna richiedere, in aggiunta, che per ogni ϵ esista un insieme A tale che $\mu(A) < +\infty$ e tale che $\int_{X \setminus A} |f| < \epsilon$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Nota 1.3.3. Si noti che l'equi-integrabilita di una famiglia su $L^1((0,1),\lambda)$ implica l'equi-limitatezza. Basta infatti scegliere il δ relativo a $\epsilon = 1$ e dividere $(0,1)$ in M parti con $\frac{1}{M} < \delta$. In questo modo dalla definizione segue immediatamente che $\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_0^1 |f| < M$.

Il criterio di compattezza che andiamo a mostrare, che va sotto il nome di *criterio di Dunford-Pettis*, è particolarmente importante per l'esistenza dei minimi del problema classico (1.0.1). Per la dimostrazione del criterio sarà necessario un teorema che enunciamo e dimostriamo:

Teorema 1.3.4 (Teorema di Vitali-Hahn-Saks)**.** *Sia $(X,\mu,\mathcal{E})$ uno spazio di misura finito. Sia (f_n) una sequenza di funzioni di $L^1(X,\mu)$ e siano $\nu_n(E) := \int_E f_n d\mu$ per ogni $E \in \mathcal{E}$. Se per ogni $E \in \mathcal{E}$ risulta esistere finito il $\lim_{n\to\infty} \nu_n(E)$, allora la famiglia di funzioni (f_n) è equi-integrabile.*

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$, al variare di $k \in \mathbb{N}$ consideriamo

$$\mathcal{E}_k = \left\{ E \in \mathcal{E} : \sup_{h,l \geq k} |\nu_l(E) - \nu_h(E)| \leq \epsilon \right\}. \tag{1.3.2}$$

Poiché, per ogni $E \in \mathcal{E}$, per ipotesi esiste il limite di $\nu_n(E)$, la successione $\nu_n(E)$ è una successione di Cauchy e dunque esiste un certo k per cui $E \in \mathcal{E}_k$. Dunque si ottiene

$$\mathcal{E} = \cup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{E}_k. \tag{1.3.3}$$

Inoltre, munendo $\mathcal{E}$ della distanza $d(A, B) = \mu(A\Delta B)$, esso diviene uno spazio metrico completo (assunto che A e B sono identificati quando $\mu(A\Delta B) = 0$). Gli $\mathcal{E}_k$ sono facilmente chiusi: infatti se $d(E_n, E) = \mu(E_n \Delta E) \to 0$, ed $E_n \in \mathcal{E}_k$, allora presi h e l maggiori di k si ha

$$\begin{aligned} |\nu_l(E) - \nu_h(E)| &\leq |\nu_l(E) - \nu_l(E_n)| + |\nu_l(E_n) - \nu_h(E_n)| + \\ &+ |\nu_h(E_n) - \nu_h(E)| \leq \int_{E\Delta E_n} |f_l| d\mu + \epsilon + \int_{E\Delta E_n} |f_h| d\mu. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Siccome l e h sono fissi, per assoluta continuità dell'integrale, se $n \to \infty$ i due integrali nella formula (1.3.4) vanno a 0 e dunque anche $E \in \mathcal{E}_k$, mostrando la chiusura.

A questo punto per il teorema di Baire [6, pag.23] si ottiene che almeno uno degli $\mathcal{E}_k$ ha parte interna non vuota. Dunque esiste $k \in \mathbb{N}$ tale per cui vi sono $E \in \mathcal{E}_k$ e $\delta' > 0$ che realizzano ciò: ogni $F \in \mathcal{E}$ con $\mu(E\Delta F) < \delta'$ è tale che $\sup_{h,l\geq k} |\nu_l(F) - \nu_h(F)| \leq \epsilon$. Allora, se $h \leq k$, per assoluta continuità dell'integrale, scelgo $0 < \delta < \delta'$ tale che $|\nu_h(F)| < \epsilon$ ogniqualvolta $\mu(F) < \delta$ (lo posso fare perché ho il controllo su un numero finito di integrali).

Sia ora F un generico elemento di $\mathcal{E}$ tale che $\mu(F) < \delta$. Se $h \geq k$

$$\begin{aligned} |\nu_h(F)| &\leq |\nu_k(F)| + |\nu_h(F) - \nu_k(F)| \leq \\ &\leq \epsilon + |\nu_h(E \cup F) - \nu_k(E \cup F)| + |\nu_h(E \setminus F) - \nu_k(E \setminus F)|. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

D'altra parte $\mu((E \cup F)\Delta E) = \mu(F \setminus E) \leq \mu(F) < \delta'$ e $\mu((E \setminus F)\Delta E) = \mu(E \cap F) \leq \mu(F) < \delta'$. Dunque, usando la (1.3.5), si ha $|\nu_h(F)| \leq 3\epsilon$, ogniqualvolta $h \geq k$ e $\mu(F) < \delta$. D'altra parte δ era stato scelto dimodoché $|\nu_h(F)| \leq \epsilon$ anche per $h \leq k$. Dunque, abbiamo mostrato l'esistenza di un δ tale che ogni volta che $F \in \mathcal{E}$ e $\mu(F) < \delta$, allora $|\nu_h(F)| \leq 3\epsilon$. Basta ora notare che, preso un qualsiasi F con $\mu(F) < \delta$,

$$\int_F |f_h| d\mu = \int_{F^+} f_h^+ d\mu + \int_{F^-} f_h^- d\mu \tag{1.3.6}$$

dove $\mu(F^+) = \mu(F \cap \{f_h > 0\}) < \delta$ e $\mu(F^-) = \mu(F \cap \{f_h < 0\}) < \delta$. Inoltre $\int_{F^+} f_h^+ d\mu = |\nu_h(F^+)| \leq 3\epsilon$ e $\int_{F^-} f_h^- d\mu = |\nu_h(F^-)| \leq 3\epsilon$ in base a quanto mostrato prima. Ne segue che, dato qualsiasi $F \in \mathcal{E}$ con $\mu(F) < \delta$, allora $\int_F |f_h| < 6\epsilon$ che è appunto l'equi-integrabilità cercata. $\square$

Nota 1.3.5. In generale, il teorema vale anche per spazi con misura non finita. Vedi, ad esempio [3, pag.14]

Proposizione 1.3.6 (Criterio di Dunford-Pettis). *Sia $\mathcal{F} \subseteq L^1((0,1), \lambda)$, dove λ è l'usuale misura di Lebesgue. Allora le seguenti sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{F}$ è sequenzialmente relativamente compatta per la topologia debole di $L^1((0,1), \lambda)$.*

2. *$\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni equi-integrabili.*

3. *Esiste $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ misurabile di crescita superlineare (i.e. $\lim_{t\to+\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty$) tale che*
$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_0^1 \phi(|f|)d\mu < +\infty. \tag{1.3.7}$$

Dimostrazione. Indicherò in maniera più contratta $L^p((0,1),\lambda)$ con L^p.

- (1) $\Leftrightarrow$ (2). Supponiamo valga (1) e per assurdo non valga (2). Allora esistono ϵ, $E_n \downarrow \emptyset$ e funzioni $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ con $\int_{E_n} |f_n| \geq \epsilon$. D'altra parte, per compattezza sequenziale, è possibile estrarre una sottosuccessione f_{n_k} che converge debolmente a una certa f in L^1. Rinominando $n_k = n$, ciò significa che, dato qualunque E misurabile $\int_E f_n d\lambda = \int_0^1 f_n \chi_E d\lambda \to \int_0^1 f\chi_E d\lambda = \int_E f d\lambda$. Dunque essendo verificate le ipotesi del teorema di Hahn-Vitali-Sacks 1.3.4, la famiglia (f_n) è equi-integrabile, chiaramente in contraddizione con l'esistenza di $E_n \downarrow \emptyset$ tali che $\int_{E_n} |f_n| \geq \epsilon$ per un ϵ fissato.

  Viceversa supponiamo valga (2) ma non (1) . Consideriamo la famiglia numerabile (I_n) di intervalli aperti ad estremi razionali in $(0,1)$. Chiaramente la σ-algebra generata da questi coincide con la σ-algebra $\mathcal{B}$ dei misurabili secondo Lebesgue. Sia $(f_k) \in \mathcal{F}$ una successione di funzioni. Fissato n, le quantità $|\int_0^1 f_k \chi_{I_n}|$ sono equilimitate poiché $\chi_{I_n} \in L^\infty((0,1))$ e poiché $(f_k) \in \mathcal{F}$ è una famiglia equilimitata in norma L^1 poiché equi-integrabile su uno spazio di misura finito. Allora con un argomento diagonale si può estrarre una sottosuccessione (f_{k_j}) tale che per ogni n si abbia che $\int_0^1 f_{k_j}\chi_{I_n}$ converge. Rinomino per semplicità $k_j = k$ e considero
$$\mathcal{E} = \left\{ E \in \mathcal{B} \mid \int_0^1 f_k \chi_E d\lambda \quad \text{converge} \right\}. \tag{1.3.8}$$

  Risulta che $\mathcal{E}$ contiene gli (I_n) che sono chiusi per intersezione, è stabile per differenza insiemistica evidentemente ed è stabile per unione numerabile disgiunta. Questo perché se $(E_i) \in \mathcal{E}$ disgiunti risulta $\sqcup E_i \in \mathcal{B}$, e allora per ogni ϵ fissato, considero il δ assicuratomi dalla definizione di equi-integrabilità (1.3.1) e considero un N tale che $\lambda(\sqcup_{n=N}^{+\infty} E_n) = \lambda(E_N) < \delta$. Allora vale
$$\left| \int_E (f_k - f_h) d\lambda \right| \leq \sum_{i=1}^{N} \left| \int_{E_i} (f_k - f_h) d\lambda \right| + \int_{E_N} |f_k| d\lambda + \int_{E_N} |f_h| d\lambda < 3\epsilon \tag{1.3.9}$$
  scegliendo k, h abbastanza grandi in modo tale da avere il primo termine limitato da ϵ (lo posso fare perché ho la convergenza sugli E_i). Dunque $\int_E f_k d\lambda$, essendo una successione di Cauchy, converge.

  A questo punto, essendo $\mathcal{E}$ un sistema di Dynkin che contiene gli (I_n) che sono un π-sistema, è garantito che $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ [2, pagg.9-10]. La misura (che sia una misura si verifica facilmente) definita da $\mu(E) = \lim_{h\to+\infty} \int_E f_h d\lambda$ è assolutamente continua rispetto a λ e dunque per il teorema di Radon-Nikodym 1.1.1 esiste $f \in L^1((0,1))$ tale che

$$\int_E f_h d\lambda = \int_0^1 f_h \chi_E d\lambda \to \int_0^1 f \chi_E d\lambda = \int_E f d\lambda \tag{1.3.10}$$

per ogni $E \in \mathcal{B}$. Allora è chiaro che per linearità la (1.3.10) vale sostituendo χ_E con una funzione semplice e dunque con una qualsiasi funzione L^∞ vista la densità della semplici nelle L^∞. Dunque f_h converge debolmente ad f.

- (2) $\Leftrightarrow$ (3). Supponiamo che valga la (3). Fisso ϵ un reale positivo. Dato $\epsilon' > 0$, dall'ipotesi di crescita superlineare si deduce che esiste un certo t_0 tale per cui $\phi(t) \geq \frac{t}{\epsilon'}$ ogniqualvolta $t \geq t_0$. Allora preso E con $\mu(E) < \delta$ si ha per ogni $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}\int_E |f| d\mu &= \int_{E\cap\{|f|\leq t_0\}} |f| d\mu + \int_{E\cap\{|f|>t_0\}} |f| d\mu \leq \\ &\leq t_0 \mu(E) + \epsilon' \int_{E\cap\{|f|>t_0\}} \phi(|f|) \leq \\ &\leq t_0 \delta + \epsilon' M.\end{aligned}$$

  Essendo M la costante che limita gli integrali per ipotesi. Allora è possibile scegliere δ ed ϵ' dimodoché $t\delta + \epsilon' M < \epsilon$ e dunque è verificata l'equi-integrabilità.

  La dimostrazione dell'implicazione (2) $\Rightarrow$ (3) si basa sulla costruzione di una funzione *ad hoc*. La omettiamo qui (d'altra parte più avanti ci servirà solo (3) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1)), ma può essere trovata, ad esempio in [3, pagg.12-13]. Si noti che la ϕ si può scegliere anche continua, crescente, convessa e positiva, come emerge dalla dimostrazione citata.

□

Nota 1.3.7. L'implicazione (1) $\Leftrightarrow$ (2) Vale per spazi di misura anche non finita, con piccoli aggiustamenti, ma assumendo che la famiglia $\mathcal{F}$ sia limitata in norma L^1. Vedi, ad esempio [3, pag. 18].

Il criterio di Dunford-Pettis è particolarmente utile per il seguente criterio di compattezza, che è fondamentale nell'approccio diretto dei problemi di calcolo delle variazioni. Sostanzialmente, nell'utilizzare il metodo diretto, si cerca una nozione di convergenza che renda compatti i sottolivelli di un funzionale, e che contemporaneamente assicuri la semicontinuità inferiore del funzionale. Tale nozione di convergenza è quella uniforme sulle funzioni e debole sulle loro derivate.

Proposizione 1.3.8 (Criterio di Compattezza). *Siano date* $(f_n) \subseteq AC([0,1])$*,* M *una costante positiva, e* (x_n) *una successione di punti in* $[0,1]$ *tali per cui:*

- $|f_n(x_n)| \leq M$*,*
- f_n' *sono equi-integrabili.*

Allora è possibile estrarre da (f_n) *una sottosuccessione* (f_{n_k}) *di funzioni tali che* f_{n_k} *converge uniformemente ad* f*, assolutamente continua, ed* f'_{n_k} *convergono debolmente a* f' *in* $L^1((0,1))$*, dove* f *è ancora una funzione in* $AC([0,1])$*.*

Dimostrazione. Essendo le f'_n equi-integrabili, per il criterio di Dunford-Pettis 1.3.6, esiste una sottosuccessione f'_{n_k} che converge debolmente a una certa g in $L^1((0,1))$ (rinomino $n_k = n$). Allora, poiché una funzione assolutamente continua è integrale della propria derivata come mostrato nel teorema 1.2.6, si ha

$$|f_n(y) - f_n(x)| = \left| \int_x^y f'(s)ds \right| \leq \int_x^y |f'(s)ds|. \tag{1.3.11}$$

Vista l'equi-integrabilità, per ogni ϵ esiste δ tale che se $|y - x| < \delta$, allora $|f_n(y) - f_n(x)| \leq \epsilon$ e questo vale per ogni n. Dunque le f_n sono equicontinue. In più tali funzioni sono equi-limitate poiché per ogni n vale

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x_n)| + |f_n(x) - f_n(x_n)| \leq M + \int_0^1 \left|f'_n(s)\right| ds \tag{1.3.12}$$

e $\int_0^1 |f'_n(s)|ds$ è equi-limitato visto che vale l'equi-integrabilità su uno spazio di misura finito. Allora, valendo le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà ([17, pagg.156-157]), è possibile estrarre una sottosuccessione f_{n_k} che converge uniformemente ad f. Dunque, a meno di rinominare ancora $n_k = n$, ho che f_n converge uniformemente ad f e f'_n converge debolmente a g. Per ogni a e b fissati in $[0,1]$ vale, inoltre, che

$$f_n(b) - f_n(a) = \int_0^1 f'_n \chi_{[a,b]} d\lambda. \tag{1.3.13}$$

Prendendo a destra e sinistra il limite per $n \to +\infty$, si conclude, sfruttando $f_n \to f$ uniformemente (e quindi puntualmente) e usando la convergenza debole delle f'_n, che

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g d\lambda. \tag{1.3.14}$$

Dunque f è assolutamente continua per la proposizione 1.2.5 e in più g è la sua derivata che esiste quasi ovunque in virtù del teorema 1.2.6. Dunque il teorema è provato. □

Nota 1.3.9. La dimostrazione del teorema precedente diviene sensibilmente più facile nel momento in cui si chiede che le f'_n appartengano a $L^p((0,1))$ con $1 < p \leq +\infty$, e che siano equi-limitate in norma L^p.

Infatti, vista l'equilimitatezza delle norme in $L^p((0,1))$, sarebbe possibile estrarre da f'_n una sottosuccessione f'_{n_k} debolmente convergente in $L^p((0,1))$ ad una certa g, per il teorema di Kakutani [6, Pag.66] (rinomino $n_k = n$). Allora, a maggior ragione, la convergenza debole varrebbe in $L^1((0,1))$. Un calcolo del tutto simile a quello fatto in (1.2.12), sfruttando il fatto che le derivate sono equi-limitate in norma L^p, mostra che le f_n sono equi $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$-holderiane e dunque equicontinue. L'equilimitatezza, a questo punto, segue modificando leggermente la stima in (1.3.12) e la dimostrazione, ora, è identica a quella del teorema precedente.

1.4 Il Lemma di Du boys-Reymond

Fondamentale ai fini dello sviluppo della teoria, come vedremo alla fine di questa sezione, il lemma di Du boys-Reymond e la sua variante che qui enunciamo. Chiariamo preliminarmente che l'insieme delle funzioni $C_c^\infty((a,b))$ è definito come l'insieme delle funzioni C^∞ definite su (a,b) e che sono nulle solo all'esterno di un compatto $[c,d] \subset (a,b)$. D'ora in poi, sia $I = (a,b)$ un generico intervallo aperto.

Lemma 1.4.1 (Lemma di Du boys-Reymond I). *Sia $f \in L^1(I)$ tale che*

$$\int_I f\eta d\lambda = 0 \quad \forall \eta \in C_c^\infty(I). \tag{1.4.1}$$

Allora $f = 0$ quasi ovunque su I.

Dimostrazione. Sia ρ una funzione $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\int_\mathbb{R} \rho = 1$, $\rho \geq 0$ e il supporto di ρ sia in $[-1,1]$ (basta scegliere un'opportuna normalizzazione di $e^{\frac{1}{x^2-1}}$). Sia $\rho_n := n\rho(nx)$, dunque, una successione di mollificatori di Friedrichs e considerata una qualsiasi funzione $g \in L^1(\mathbb{R})$ definiamo

$$g_n(x) = (g * \rho_n)(x) := \int_\mathbb{R} \rho_n(y) g(x-y) dy \tag{1.4.2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. E' noto [6, pagg.110-112] che $g_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che $g_n \to g$ in $L^1(\mathbb{R})$. Nel nostro caso sia $g = \chi_{(c,d)}$ con $[c,d] \subseteq I$. Allora dalla definizione (1.4.2) è immediato che $0 \leq g_n(x) \leq 1$ e che per n abbastanza grande $g_n \in C_c^\infty(I)$ (infatti l'integrale nella (1.4.2) è sicuramente zero all'esterno dell'intervallo $\left[c - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right]$). Dunque possiamo suppore senza perdita di generalità che $g_n \in C_c^\infty(I)$ e siccome la convergenza in norma L^1 implica, a meno di passare a sottosuccesioni, la convergenza quasi ovunque, ho che esiste una successione di $g_n \in C_c^\infty(I)$ positive e limitate da 1, che converge quasi certamente a $\chi_{(c,d)}$. Allora per il teorema di convergenza dominata [2, pag.37] si può concludere che

$$\int_I f g_n d\lambda \to \int_I f \chi_{(c,d)} d\lambda. \tag{1.4.3}$$

E per l'ipotesi, essendo il termine di sinistra sempre zero, si conclude che $\int_c^d f d\lambda = 0$ per ogni $[c,d] \subseteq I$. Allora sia $x_0 \in I$ un punto di Lebesgue (i.e. un punto in cui vale il teorema della continuità in media 1.1.3). Si ha, per quanto appena mostrato, che $\frac{1}{r}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f d\lambda = 0$, per ogni r tale che $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$. Siccome il termine di sinistra tende a $f(x_0)$ per la continuità in media 1.1.3, si conclude che $f(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in I$ di Lebesgue, cioè quasi ovunque. □

Lemma 1.4.2 (Lemma di Du boys-Reymond II). *Sia $f \in L^1(I)$ tale che*

$$\int_I f\eta' d\lambda = 0 \quad \forall \eta \in C_c^\infty(I). \tag{1.4.4}$$

Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che f è costantemente uguale a c quasi ovunque in I.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in I$ un punto di Lebesgue fissato (in cui vale il teorema della continuità in media). Sia $x_0 < y_0 \in I$ un qualsiasi altro punto di Lebesgue. Per ogni $r > 0$ tale che $[x_0 - r, y_0 + r] \subset I$, la funzione $g := \chi_{(x_0-r,x)} - \chi_{(y_0,y_0+r)}$ può essere approssimata da una successione di $g_n \in C_c^\infty(I)$ limitate, che converge quasi certamente a g: infatti basta approssimare $\chi_{(x_0-r,x)}$ con delle $h_n \in C_c^\infty(I)$ positive e limitate $C_c^\infty(I)$ come mostrato nel lemma precedente 1.4.1 e considerare $\bar{h}_n$ la funzione simmetrica di g_n rispetto al punto medio di (x_0, y_0). Per n sufficientemente grande, convergendo i supporti di h_n a $[x_0 - r, x_0]$, allora $g_n := h_n + \bar{h}_n$ è sicuramente una funzione limitata e di classe $C_c^\infty(I)$ poiché si raccorda in maniera C^∞ a 0 in (x_0, y_0). In più g_n converge quasi certamente a g e per come è stata costruita le funzioni $\int_a^x g_n d\lambda$ sono $C_c^\infty(I)$, per n sufficientemente grande, e le loro derivate sono proprio le g_n. Per il teorema di convergenza dominata si può concludere che

$$\int_I f g_n d\lambda \to \int_I f(\chi_{(x_0-r,x_0)} - \chi_{(y_0,y_0+r)}) d\lambda \tag{1.4.5}$$

ed il termina di sinstra è sempre 0 per ipotesi. Dunque $\int_{x_0-r}^{x_0} f(s)ds - \int_{y_0}^{y_0+r} f(s)ds = 0$ e dividendo per r e facendo tendere $r \to 0$ come nella conclusione del teorema 1.2.6, usando il teorema della continuità in media 1.1.3, si conclude $f(x_0) = f(y_0)$. La dimostrazione è del tutto analoga se $x_0 > y_0$ e dunque la funzione è costantemente $c := f(x_0)$ su tutti i punti di Lebesgue, cioè quasi ovunque. □

Nota 1.4.3. I due lemmi 1.4.1 e 1.4.2 sono veri più in generale per funzioni $L^1(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato in $\mathbb{R}^N$ e le funzioni test η vengono scelte in $C_c^\infty(\Omega)$ (in tal caso ovviamente va sostituita η' con $\nabla\eta$). Una dimostrazione di questo caso generale, una discussione più dettagliata e anche una dimostrazione per $N = 1$ che non fa uso della proprietà della continuità in media, ma di altri risultati sulle convoluzioni, può essere trovata in [15, Pag.27 e seguenti]

1.5 Variazione prima, punti di minimo, equazione di Eulero

Ritorniamo al problema fondamentale (1.0.1) lavorando nella classe delle funzioni assolutamente continue con dati al bordo fissi (1.0.2).

Una funzione $u : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è da intendersi assolutamente continua se tutte le sue componenti lo sono. E' chiaro, dunque, che intendendo la derivata e l'integrale componente per componente, i risultati della sezione 1.2 sono validi anche per le funzioni a valori in $\mathbb{R}^N$. Inoltre l'equi-integrabilità, come definita in (1.3.1), considerando però la norma di $\mathbb{R}^N$, passa alle componenti e il criterio di Dunford-Pettis 1.3.6 si generalizza, per questo, facilmente al caso in cui le funzioni sono a valori in $\mathbb{R}^N$, assumendo che la convergenza debole sia intesa componente per componente. Inoltre, la differenziabilità quasi ovunqe delle assolutamente continue ci permette di poter applicare, fra le altre cose, senza problemi la chain-rule.

Inoltre anche i due lemmi di Du boys-Reymond 1.4.1 e 1.4.2 si generalizzano facilmente al caso vettoriale: infatti sostituendo il prodotto con un prodotto scalare e considerando f di componenti $L^1(I)$, l'ipotesi implica, usando come funzioni test semplicemente $\eta = (0, \dots, \eta_i, \dots, 0)$, che componente per componente vale quanto richiesto dalle ipotesi scalari. Dunque la conclusione dei lemmi resta vera anche se le funzioni sono a valori in $\mathbb{R}^N$.

Prima di andare avanti fissiamo alcune notazioni: le variabili *tempo*, *spazio* e *velocità* della lagrangiana verranno indicate con x, z, p: dunque la lagrangiana sarà $F(x, z, p)$. Salvo nei casi in cui venga esplicitamente scritto, la lagrangiana sarà intesa sempre almeno di classe $C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e per semplicità, laddove esplicitamente non indicato, lavoreremo con lagrangiane definite su tutto $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Con $F_x(x, z, p)$ si indicherà la derivata parziale rispetto al tempo, definita a valori in $\mathbb{R}$, mentre con $F_z(x, z, p) = (F_{z^i}(x, z, p))$, con $i = 1, \dots, N$, si indicherà il vettore delle derivate parziali di F rispetto alle coordinate spaziali (discorso analogo vale con $F_p(x, z, p)$). Tutte le operazioni fatte nel seguito, dunque, su F_z e F_p sono da intendersi componente per componente. D'ora in poi, inoltre, I indicherà l'intervallo (a, b) e $\bar{I} = [a, b]$. Infine, con $F_{pp}(x, z, p)$, ad esempio, si intende la matrice Hessiana della funzione $F(x, z, \cdot)$ valutata in (x, z, p).

Prima di andare avanti, diamo qualche definizione sui minimi:

Definizione 1.5.1. Dato il problema fondamentale (1.0.1), una $u : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ nella classe definita da (1.0.2) si dice:

- *minimo globale* se $\mathcal{F}(v) \geq \mathcal{F}(u)$ per qualunque $v \in \mathcal{C}$,
- *minimo locale forte* se esiste un δ tale che $\mathcal{F}(v) \geq \mathcal{F}(u)$ per qualunque $v \in \mathcal{C}$ tale che $\|u - v\|_{C^0} \leq \delta$,
- *minimo locale debole* se esiste un δ tale che $\mathcal{F}(v) \geq \mathcal{F}(u)$ per qualunque $v \in \mathcal{C}$ per cui $\|u - v\|_{C^1} \leq \delta$,
- *minimo locale direzionale* se per ogni $v \in C_c^\infty(I)$, $\phi_v(t) = \mathcal{F}(u + tv)$ è ben definita in un certo intorno di 0 e $\phi_v(t) \geq \phi_v(0)$ per ogni t in questo intorno.

Con la notazione $\|f\|_{C^0}$ si intende $\sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ e con $\|f\|_{C^1}$ si intende $\|f\|_{C^0} + \|f'\|_{L^\infty}$, con un abuso di notazione (è necessario poiché stiamo considerando una classe di funzioni derivabili quasi ovunque: se $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, quest'ultima norma diventa la classica norma che rende $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ un Banach). E' semplice notare che, in generale, se u è solo assolutamente continua, $\|u'\|_{L^\infty}$ non è detto che sia finita. Questo lo possiamo ottenere, se u è in una classe più ampia, ad esempio le $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ oppure, meglio, le $Lip([a, b]; \mathbb{R}^N)$. Perciò ci risulterà utile definire le seguenti classi:

$$\mathcal{L} = \{u \in Lip([a, b]; \mathbb{R}^N) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}, \tag{1.5.1}$$

$$\mathcal{D} = \{u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}, \tag{1.5.2}$$

$$\mathcal{D}' = \{u \in C^2([a,b];\mathbb{R}^N) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}. \tag{1.5.3}$$

Dunque, ad esempio, diremo che $u \in \mathcal{L}$ è un *minimo locale debole* nella classe $\mathcal{L}$ se vale la definizione data in 1.5.1, cambiano la classe $\mathcal{C}$ in $\mathcal{L}$.

Nota 1.5.2. E' molto semplice notare che le definizioni nella 1.5.1 sono date dalla più forte alla più debole (cioè la prima implica la seconda che implica la terza che implica la quarta).

Inoltre è semplice notare, nella definizione di *minimo locale debole*, che per una buona definizione è sufficiente che la lagrangiana sia definita in un intorno di u nella norma C^1 (come definita sopra). A questo punto, presa $v \in C_c^\infty(I)$, esiste un intorno di 0 sufficientemente piccolo in cui $\mathcal{F}(u+tv)$ è ben definita e per la proprietà di minimalità debole $\phi_v(t) \geq \phi_v(0)$. D'ora in poi diventerà importante assumere $\|u'\|_{L^\infty}$ finita, e ciò si vede facilmente che implica $u \in \mathcal{L}$ (confronta con la sezione 1.2.1). Dunque da ora in poi assumiamo di lavorare nella classe $\mathcal{L}$: in tal caso $\phi_v(t)$ è derivabile ovunque (ricordiamo che la lagrangiana è assunta di classe $C^1([a,b]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ e la derivata rispetto a t può essere portata dentro l'integrale. In questo punto diventa essenziale che $\|u'\|_{L^\infty}$ sia finita, per ottenere una limitazione delle norme L^∞ di $F_z(x,u(x)+tv(x),u'(x)+tv'(x))$ e $F_p(x,u(x)+tv(x),u'(x)+tv'(x))$ e per poter applicare il teorema di passaggio della derivata sotto il segno di integrale nelle ipotesi date in [14, Pag. 56].

Sulla scia della nota precedente, diamo la seguente definizione:

Definizione 1.5.3. Assumendo $\mathcal{F}$ ben definita in un intorno C^1 (sempre nel senso spiegato nella definizione 1.5.1) di una certa $u : \bar{I} \to \mathbb{R}^N$ nella classe $\mathcal{L}$, data $v \in C_c^\infty(I)$, si definisce la variazione prima $\delta\mathcal{F}(u,v) := \phi_v'(0)$.

Abbiamo notato che nell'ipotesi in cui la lagrangiana sia di classe $C^1([a,b]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, valgono le proprietà di passaggio della derivata sotto al segno di integrale [14, Pag. 56], e dunque

$$\begin{aligned}\phi_v'(0) &= \left(\frac{d}{dt}\int_a^b F(x,u(x)+tv(x),u'(x)+tv'(x))dx\right)_{|t=0} = \\ &= \int_a^b \big(F_z(x,u(x),u'(x))\cdot v(x) + F_p(x,u(x),u'(x))\cdot v'(x)\big)\,dx\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

in cui ho potuto derivare usando la chain-rule vista la differenziabilità quasi ovunque di u. Dal momento che $\|u'\|_{L^\infty}$ è finita (com'è in questo caso), siccome F_z è continua, ho che $\|F_z(x,u(x),u'(x))\|_{L^\infty}$ è finita. Dunque, a maggior ragione, $F_z(x,u(x),u'(x)) \in L^1(I)$, e allora posso integrare per parti la (1.5.4). Per ogni $v \in C_c^\infty(I;\mathbb{R}^N)$ si ha, dunque,

$$\int_a^b \left(\left(-\int_a^x F_z(s,u(s),u'(s))ds\right)\cdot v'(x) + F_p(x,u(x),u'(x))\cdot v'(x)\right)dx = 0 \tag{1.5.5}$$

e infine per il lemma di Du boys-Reymond 1.4.2 si ha l'esistenza di una certa costante c tale per cui

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_z(s, u(s), u'(s))ds \tag{1.5.6}$$

quasi ovunque in (a, b). Tale relazione va sotto il nome di *equazione di Eulero-Lagrange integrale*. Ancora sfruttando i teoremi sulle funzioni assolutamente continue (è ancora determinante che $F_z(s, u(s), u'(s)) \in L^1(I)$), si ha che

$$\frac{d}{dx} F_p(x, u(x), u'(x)) = F_z(x, u(x), u'(x)) \tag{1.5.7}$$

quasi ovunque in (a, b). In questo caso si deve intendere che $F_p(x, u(x), u'(x))$ ha un rappresentante assolutamente continuo su $[a, b]$ la cui derivata coincide quasi ovunque con $F_z(x, u(x), u'(x))$. Tale equazione differenziale viene detta *equazione di Eulero-Lagrange*. E' comodo definire $L_F(u) = F_z(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, u(x), u'(x))$, di modo che la (1.5.7) si possa riscrivere più semplicemente $L_F(u) = 0$. Abbiamo dunque mostrato il seguente:

Proposizione 1.5.4. *Sia $u(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, $u \in \mathcal{L}$. Se $F(x, z, p)$ è una lagrangiana $C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, definita almeno in un intorno di $u(x)$ nella norma C^1, e $u(x)$ è un minimo locale direzionale, allora $L_F(u) = 0$ quasi ovunque in (a, b).*

Nota 1.5.5. E' semplice notare che, nelle stesse ipotesi della proposizione 1.5.4, se u fosse di classe $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ in realta la (1.5.6) e la (1.5.7) valgono ovunque per continuità.

Nota 1.5.6. E' altresì interessante notare certi fenomeni di regolarizzazione: ad esempio col teorema della funzione implicita si riesce a mostrare che un minimo locale direzionale $u \in \mathcal{D}$ è automaticamente di classe $C^k([a, b]; \mathbb{R}^N)$ se la lagrangiana è di classe $C^k([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e F_{pp} è invertibile ovunque. [7, Pag.135]

Inoltre se la lagrangiana $F(x, z, p)$ fosse di classe $C^2([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ (in realtà basta $F_p \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$) e in più $F_{pp}(x, z, p) > 0$ (Hessiana definita positiva), un $u(x)$ minimo locale direzionale nella classe $\mathcal{L}$ automaticamente non può che essere di classe $C^2([a, b]; \mathbb{R}^N)$ Questi primi fenomeni di regolarizzazione saranno studiati avanti più a fondo nel capitolo 3 (3.4).

Nota 1.5.7. Se si richiede F di regolarità superiore, ad esempio di classe $C^2([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, e inoltre u minimo locale direzionale in $\mathcal{D}'$ (1.5.3), è possibile differenziare la funzione composta ed ottenere che, in tal caso, vale anche (ovunque)

$$\begin{aligned} F_z(x, u(x), u'(x)) &= F_{px}(x, u(x), u'(x)) + \\ &+ F_{pz}(x, u(x), u'(x)) \cdot u'(x) + \\ &+ F_{pp}(x, u(x), u'(x)) \cdot u''(x). \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Si noti che se $F_{pp}(x, u(x), u'(x))$ fosse invertibile ovunque in $[a, b]$, allora la (1.5.8) sarebbe una equazione differenziale del second'ordine (lineare a coefficienti non costanti), su cui valgono i classici risultati di esistenza e unicità locale (assegnati $u(x_0)$ e $u'(x_0)$) e il teorema di dipendenza C^1 dai valori iniziali. Queste osservazioni saranno fondamentali, poi, nella dimostrazione del teorema di regolarità parziale di Tonelli.

Nota 1.5.8 (Equazione di Du boys-Reymond). Assumendo sempre almeno che $F \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ è molto utile, a volte, riscrivere l'equazione di Eulero-Lagrange in un modo leggermente diverso, ovvero nella forma integrale di Du boys-Reymond. Si dice che la lagrangiana $F(x,z,p)$ soddisfa la *forma integrale* dell'equazione di Du boys-Reymond se esiste una costante c tale che per quasi ogni $x \in (a,b)$

$$F(x,u(x),u'(x)) - u'(x) \cdot F_p(x,u(x),u'(x)) = c + \int_a^x F_x(x,u(x),u'(x))dx. \qquad (1.5.9)$$

E' notevole che, nel momento in cui un minimo locale debole u, come definito in 1.5.1, del problema fondamentale (1.0.1) appartenga alla classe delle funzioni lipschitziane, allora si riesce a ricavare che la lagrangiana deve soddisfare l'equazione di Du boys-Reymond in forma integrale. Per ottenere tale risultato è opportuno non più scegliere le variazioni della forma $u + tv$, ma utilizzare delle *variazioni interne*: scegliendo $\lambda \in C_c^\infty((a,b))$, si consideri $z_\epsilon(x) := x + \epsilon\lambda(x)$ in $[a,b]$. Per ϵ sufficientemente piccolo, u_ϵ è un diffeomorfismo di $[a,b]$ in sé, e $u \circ z_\epsilon^{-1}$, definita su $[a,b]$, è lipschitziana. In più essa ha gli stessi dati al bordo di u e, nell'ipotesi di lipschitzianità, è possibile derivare sotto il segno di integrale (similmente a quanto fatto nella nota 1.5.2) per ϵ sufficientemente piccolo e dunque deve aversi, affinché u sia minimo locale debole, che

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}(u \circ z_\epsilon^{-1}) = 0. \qquad (1.5.10)$$

Si vede, con calcoli semplici, che la precedente condizione implica l'equazione di Du boys-Reymond integrale (1.5.9). Per i calcoli dettagliati si consulti [15, pagg.49-50].

Allora, si può passare alla forma differenziale dell'equazione di Du boys-Reymond, come si è fatto per l'equazione di Eulero-Lagrange, nel caso in cui il minimo locale debole sia lipschitziano. Dunque si ottiene che vale quasi ovunque per $x \in (a,b)$

$$\frac{d}{dx}\left(F(x,u(x),u'(x)) - u'(x) \cdot F_p(x,u(x),u'(x))\right) = F_x(x,u(x),u'(x)). \qquad (1.5.11)$$

Si noti, ancora una volta, che non appena il minimo $u(x)$ è nella classe $C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$, le equazioni di Du boys-Reymond integrale e differenziale (1.5.9) e (1.5.11) valgono ovunque in $[a,b]$ e in più se il minimo $u(x)$ è nella classe $C^2([a,b];\mathbb{R}^N)$, nell'equazione differenziale (1.5.11) si può derivare usando la chain-rule e con un semplice calcolo si mostra che l'equazione di Eulero-Lagrange (1.5.8) implica la (1.5.11).

A questo punto si noti che le formule di Du boys-Reymond e di Eulero-Lagrange sono particolarmente utili nel momento in cui le lagrangiane dipendono solo da (x,p) o (z,p). Questo assicura che un minimo che sia nella classe delle funzioni lipschitziane per lagrangiane del tipo $F(x,p)$ o $F(z,p)$ deve, allora, soddisfare delle equazioni differenziali piuttosto semplici. Tipicamente, però, il problema di minimo è ambientato nella classe $\mathcal{C}$ (1.0.2) e per ottenere che i minimi in questa classe hanno una regolarità maggiore si usano argomenti di crescita o di convessità (si veda 3.4).

E' da notare, però, che Ball e Mizel ([5, pagg.332-333]) hanno mostrato che per lagrangiane della forma $F(x,z,p) = F_1(x,z) + F_2(x,p)$ che siano di classe $C^1([a,b] \times \mathbb{R} \times$

$\mathbb{R}$), se u è un minimo locale debole come definito in 1.5.1, nella classe $\mathcal{C}$ (1.0.2), allora soddifa l'equazione di Eulero-Lagrange integrale (1.5.6) mentre per lagrangiane di classe $C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ della forma $F(x, z, p) = F_1(x, z) + F_2(z, p)$, se u è un minimo locale forte nella classe $\mathcal{C}$, allora soddisfa l'equazione di Du boys-Reymond integrale (1.5.9). Questo risultato è particolarmente utile perché non fa uso di nessuna ipotesi aggiuntiva sulla lagrangiana: è il caso, però, di notare che non è possibile a priori passare alle forme differenziali delle due equazioni, poiché nulla si sa sulle integrabilità dei vari termini (poiché in generale $u \in \mathcal{C}$).

E' possibile elencare varie condizioni necessarie e sufficienti all'essere minimi locali forti, deboli o direzionali. La teoria, a proposito, sfocia facilmente nello studio dei funzionali quadratici e può essere trovata nel libro di Giaquinta e Hildebrandt [15, Capitolo 4]. Lo studio di queste problematiche ha portato allo sviluppo di tecniche per dimostrare che una certa funzione è un minimo locale forte: di fondamentale importanza, a questo proposito, la teoria dei campi di estremali e le tecniche di calibrazione che svilupperemo nel prossimo capitolo e che hanno trovato ampio utilizzo nel calcolo delle variazioni.

CAPITOLO 2

Campi di estremali e calibrazione

2.1 Calibrazione

Le lagrangiane che utilizzeremo da ora in poi sono da considerarsi $C^2([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ se non specificato.

Supponiamo di avere una certa $u_0 \in \mathcal{C}$, con $\mathcal{C}$ definito in (1.0.2), e di voler mostrare che u_0 risolve il problema di minimo in (1.0.1) con lagrangiana $F(x,z,p)$, supponendo di sapere che risolve il problema di minimo in (1.0.1) ma con una lagrangiana $M(x,z,p)$. E' semplice notare che ci basta avere $F(x,u(x),u'(x)) \geq M(x,u(x),u'(x))$ per ogni u nella classe $\mathcal{C}$ definita in (1.0.2), e $F(x,u_0(x),u_0'(x)) = M(x,u_0(x),u_0'(x))$. Infatti in questa maniera, per qualsiasi $u \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x,u(x),u'(x))dx \quad &\geq \quad \int_a^b M(x,u(x),u'(x))dx \geq \\ &\geq \quad \int_a^b M(x,u_0(x),u_0'(x))dx = \int_a^b F(x,u_0(x),u_0'(x))dx\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Dunque possiamo dare la seguente:

Definizione 2.1.1. Data $\mathcal{G}$ una certa classe di funzioni (ad esempio $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ come definite in (1.0.2) e (1.5.1)), data $F(x,z,p)$ una lagrangiana per cui il funzionale del (1.0.1) è ben definito sulle $u \in \mathcal{G}$, e data $u_0 \in \mathcal{G}$, la lagrangiana $M(x,z,p)$, il cui funzionale relativo sia almeno definito sulle $u \in \mathcal{G}$, funge da *calibratore* per la terna $\{F, u_0, \mathcal{G}\}$, se vale che per ogni $u \in \mathcal{G}$,

$$M(x,u(x),u'(x)) \leq F(x,u(x),u'(x)) \quad \text{per quasi ogni} \quad x \in (a,b) \tag{2.1.2}$$

in cui si richiede, inoltre, che se $u \equiv u_0$ l'uguaglianza valga per quasi ogni $x \in (a, b)$. In aggiunta si richiede

$$\mathcal{M}(u) := \int_a^b M(x, u(x), u'(x))dx \quad \text{è invariante nella classe delle} \quad u \in \mathcal{G}. \tag{2.1.3}$$

Inoltre M è detto *calibratore stretto* se, per ogni $u \in \mathcal{G}$ che non coincide quasi ovunque con u_0, esiste un sottoinsieme di (a, b) di misura non nulla, per cui, in (2.1.2), vale la disuguaglianza stretta.

Nota 2.1.2. Si noti che se le u considerate sono nella classe delle funzioni $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, se per una data u la disuguaglianza (2.1.2) non vale anche solo per un valore x_0, per continuità non vale in un intorno di x_0 (e dunque in un misurabile non trascurabile). Dunque, lavorando con le funzioni di classe $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, per ottenere che un calibratore sia stretto basta che, per ogni u che non sia u_0, la disuguaglianza in (2.1.2) non valga per almeno un valore $x_0 \in [a, b]$.

Nota 2.1.3. La definizione di *calibratore* segue quella data nel testo di Buttazzo, Giaquinta e Hildebrandt ([7, pag.26]). E' doveroso notare che, di solito, la proprietà di invarianza (2.1.3) segue dall'essere una lagrangiana nulla. Una discussione su tale argomento può essere trovata nel testo di Giaquinta-Hildebrandt ([15, pagg.51 e seguenti]). Si assume, in quel testo, come definizione di lagrangiana nulla, il fatto che valga $L_M(u) = 0$ per ogni $u \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^N)$ ([15, pag.51]), dove l'operatore $L_M(\cdot)$ è definito poco prima della proposizione 1.5.4. Da questa definizione, gli autori facilmente deducono che vale l'invarianza di $\mathcal{M}(u)$ nella classe delle funzioni $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$. In tale testo viene data la forma generale di una lagrangiana nulla e si dimostra, fra le altre cose, che nel caso unidimensionale, che trattiamo in questa tesi, una lagrangiana nulla è sempre della forma divergenza, ovvero $M(x, z, p) = S_x(x, z) + p \cdot S_z(x, z)$.

E' molto semplice a questo punto dedurre la seguente proposizione con i ragionamenti fatti all'inizio del capitolo:

Proposizione 2.1.4. *Se una lagrangiana $M(x, z, p)$, funge da* calibratore *per la terna $\{F, u_0, \mathcal{G}\}$, allora vale*

$$\int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \geq \int_a^b F(x, u_0(x), u_0'(x))dx \quad \forall u \in \mathcal{G}. \tag{2.1.4}$$

Se inoltre $M(x, z, p)$ funge da calibratore stretto, *allora nella* (2.1.4) *l'uguale vale se e solo se $u(x) = u_0(x)$ per quasi ogni $x \in (a, b)$.*

Una classe speciale di funzioni con le quali poter calibrare sono le cosiddette lagrangiane nulle, che possiamo assumere in virtù della nota 2.1.3, della forma

$$M(x, z, p) = S_x(x, z) + S_z(x, z) \cdot p \tag{2.1.5}$$

essendo $S \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^N)$. Infatti è immediato notare che, per ogni $u \in \mathcal{C}$, risulta $M(x, u(x), u'(x)) = \dfrac{d}{dx} S(x, u(x))$ quasi ovunque per $x \in (a, b)$ (è possibile derivare per i risultati sulle funzioni assolutamente continue della sezione 1.2) e quindi

$$\int_a^b M(x, u(x), u'(x))dx = S(b, u(b)) - S(a, u(a)) = S(b, \beta) - S(a, \alpha) \qquad (2.1.6)$$

da cui si nota che la proprietà (2.1.3) risulta sempre verificata se calibriamo con una lagrangiana nulla nella classe delle funzioni assolutamente continue con dati al bordo fissi. Sviluppiamo ora degli strumenti un po' più avanzati che ci permetteranno di costruire delle calibrazioni *ad hoc*: i campi di estremali.

2.2 Campi di Mayer e di Weierstrass

Diamo subito la definizione di *campo* e di *slope function*.

Definizione 2.2.1. Sia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \supseteq \Gamma = \{(x, c) : c \in C, x \in I(c)\}$ (dove si intende che C è un insieme di parametri in $\mathbb{R}^N$ e $I(c)$ è un intervallo che dipende da c). Allora un *campo* è un C^1-diffeomorfismo $f : \Gamma \to G$, dove G è un semplicemente connesso di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, della forma $f(x, c) = (x, \phi(x, c))$. Si richiede, inoltre, che $\phi'(x, c)$ sia $C^1(\Gamma; \mathbb{R}^N)$.

Si definisce *slope function* del *campo* f, la funzione $\rho : G \to \mathbb{R}^N$ tale che $\rho(x, z) = \phi'(x, a(x, z))$, dove $a(x, z)$ è la proiezione sulle ultime n coordinate di $f^{-1}(x, z)$. Sia inoltre $\mathcal{P} : G \to G \times \mathbb{R}^N$ definita come $\mathcal{P}(x, z) = (x, z, \rho(x, z))$: tale funzione è detta *slope field* del *campo*.

Nota 2.2.2. Si noti che, dalla definizione, essendo f diffeomorfismo C^1, risulta già a priori che $\phi(\cdot, c)$ è $C^1(I(c))$. Dunque, fissato c, esiste $\phi'(x, c)$, derivata di ϕ rispetto a x, ed è continua rispetto a x. Dalla ulteriore richiesta che $\phi'(x, c)$ sia $C^1(\Gamma; \mathbb{R}^N)$ segue quindi che, per ogni $c \in C$, $\phi(\cdot, c)$ è $C^2(I(c); \mathbb{R}^N)$. Inoltre è immediato notare, per come è stata data la definizione, che ρ è una funzione $C^1(G; \mathbb{R}^N)$. E' evidente, infine, che $\rho(x, \phi(x, c)) = \phi'(x, c)$.

E' molto utile studiare i campi, così come definiti in 2.2.1, per riuscire a trovare minimi al problema (1.0.1). Per capire come ciò sia possibile, diamo le seguenti definizioni (tutte queste sono date in relazione alla lagrangiana $F(x, z, p)$, che si suppone sempre almeno di classe $C^2([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$):

Definizione 2.2.3. Sia $f : \Gamma \to G$ un campo come in 2.2.1. Esso si dice:

- *Campo di Mayer* per F se esiste una funzione $S \in C^2(G)$ detta *eikonale* tale che

$$S_z(x, z) = (F_p \circ \mathcal{P})(x, z) \quad \forall (x, z) \in G \qquad (2.2.1)$$

$$S_x(x, z) = (F \circ \mathcal{P})(x, z) - \rho(x, z) \cdot (F_p \circ \mathcal{P})(x, z) \quad \forall (x, z) \in G \qquad (2.2.2)$$

Per non appesantire troppo la notazione si ometterà, a volte, la dipendenza da (x, z). Le equazioni in (2.2.1) e (2.2.2) sono dette *equazioni di Carathéodory*. Si ricordi che con F_p si intende sempre il vettore delle coordinate parziali rispetto alle componenti *velocità*.

- *Campo di estremali* per F se per ogni $c \in C$, $L_F(\phi(\cdot, c)) = 0$, essendo L_F l'operatore definito poco prima della proposizione 1.5.4.
- *Campo ottimale* per F se esiste una funzione $S \in C^2(G)$ detta *eikonale* tale che

$$F^\star(x,z,p) = F(x,z,p) - S_x(x,z) - S_z(x,z)\cdot p \geq 0 \quad \forall (x,z) \in G \quad \forall p \in \mathbb{R}^N, \tag{2.2.3}$$

$$(F^\star \circ \mathcal{P})(x,z) = 0 \quad \forall (x,z) \in G. \tag{2.2.4}$$

- *Campo di Weierstrass* per F se è ottimale ma nella (2.2.3), per ogni $(x,z) \in G$ vale la disuguaglianza stretta tranne che, ovviamente, nel caso $p = \rho(x,z)$.

Nota 2.2.4. Si noti che se il campo è a valori in G, perché le definizioni in 2.2.3 abbiano senso è sufficiente che F sia definita in (un aperto che contiene) $G \times \mathbb{R}^N$.

Andiamo ora ad indagare meglio le relazioni fra tali *campi*. E' interessante notare che, considerando la 1-forma differenziale su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (basta averla definita su $G \times \mathbb{R}^N$)

$$\gamma = (F(x,z,p) - p \cdot F_p(x,z,p))dx + \sum_{i=1}^{N} F_{p^i}(x,z)dz^i \tag{2.2.5}$$

detta *Forma di Beltrami* relativa a F, essa è tale che il suo *pull-back* mediante lo *slope field* è proprio il differenziale dell'eikonale S, nel momento in cui il campo considerato sia di Mayer. Vale cioè che la 1-forma $\mathcal{P}^*\gamma$, definita su G, è esattamente dS. Ciò significa che la 1-forma $\mathcal{P}^*\gamma$ definita su G è esatta e ciò è equivalente al fatto che sia chiusa essendo G semplicemente connesso. Infatti, si ricordi che, in $\mathbb{R}^N$, vale che una 1-forma chiusa (i.e. che possiede localmente una primitiva) a coefficienti continui su un aperto semplicemente connesso possiede una primitiva globale. Per la dimostrazione si può consultare [9, pagg.56 e seguenti], in cui viene discussa la dimostrazione in 2 dimensioni che può essere estesa a più dimensioni. Dunque

Proposizione 2.2.5. *Un campo $f : \Gamma \to G$ è un campo di Mayer se e solo se la 1-forma su G, $\mathcal{P}^*\gamma$, è chiusa, cioè $d(\mathcal{P}^*\gamma) = 0$.*

E' semplice notare, inoltre, che le condizioni (2.2.4) e (2.2.3) implicano che per ogni $(x,z) \in G$ si ha che $F^\star(x,z,\cdot)$ è una funzione che ha minimo in $\rho(x,z)$ e quindi il suo gradiente in $\rho(x,z)$ deve essere necessariamente 0. Questo, insieme alla (2.2.4), ci porta a concludere che valgono le equazioni di Carathéodory e dunque un campo ottimale (o di Weirestrass) è un campo di Mayer con lo stesso eikonale.

Proposizione 2.2.6. *Un campo ottimale (o di Weirestrass) è un campo di Mayer con eikonale S.*

Prima di cercare di capire sotto quali ipotesi la proposizione 2.2.6 si può invertire, è importante notare che è possibile caratterizzare in maniera più semplice quei campi che risultano essere di Mayer. Prima di enunciare il risultato, però, è necessario dare le ultime tre definizioni.

Definizione 2.2.7. Dato un campo $f : \Gamma \to G$ con $f(x,c) = (x, \phi(x,c))$, si dice *flusso di fase* la funzione $e : \Gamma \to G \times \mathbb{R}^N$ tale che $e(x,c) = (x, \phi(x,c), \phi'(x,c))$.

Si definisce $\eta(x,c) := (F_{p^i}(e(x,c)))$ il vettore dei *momenti canonici.* Si nota che $\eta : \Gamma \to \mathbb{R}^N$.

Si denotano con $[c^\alpha, c^\beta]$, al variare di α e β in $\{1, \dots, N\}$, le *parentesi di Lagrange* del campo f, definite come

$$[c^\alpha, c^\beta] = \frac{\partial \eta}{\partial c^\alpha} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial c^\beta} - \frac{\partial \eta}{\partial c^\beta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial c^\alpha} \tag{2.2.6}$$

Adesso possiamo enunciare una delle proposizioni fondamentali di questo capitolo, che fornisce una condizione equivalente all'essere campo di Mayer. Ci sarà utile sapere come si comportano le forme differenziali rispetto al *pull-back* e al *differenziale esterno.* I risultati che useremo si trovano riassunti in [1, Pag. 209, Pag. 222].

Proposizione 2.2.8. *Sia $f : \Gamma \to G$ un campo. Allora f è un campo di Mayer se e solo se è un campo di estremali con parentesi di Lagrange nulle.*

Dimostrazione. In virtù della proposizione 2.2.5, è sufficiente mostrare che la 1-forma su G definita da $\mathcal{P}^*\gamma$ è chiusa, ovvero che il differenziale esterno $d(\mathcal{P}^*\gamma)$ sia uguale a 0. Essendo f un diffeomorfismo, ciò equivale a mostrare che la forma differenziale su Γ definita da $f^*d(\mathcal{P}^*\gamma) = 0$ Ma per le proprietà del *pull-back* [1] è semplice notare, dal momento che $f^*\mathcal{P} = e$, che

$$f^*d(\mathcal{P}^*\gamma) = d(f^*(\mathcal{P}^*\gamma)) = d((f^*\mathcal{P})^*\gamma) = d(e^*\gamma) \tag{2.2.7}$$

Dunque la tesi è equivalente al fatto che $d(e^*\gamma) = 0$. A questo punto, consideriamo le 1-forme su $G \times \mathbb{R}^N$ date da $\theta^i = dz^i - p^i dx$ e $\nu_i = F_{z^i}dx - dF_{p^i}$ (non è scritto, ma essendo in $G \times \mathbb{R}^N$ la dipendenza è da (x, z, p)).

Un semplice calcolo mostra che il differenziale della forma di Beltrami $d\gamma$ è uguale a $\sum_{i=1}^N \theta^i \wedge \nu_i$ (il calcolo è riportato in [15, Pag. 324]). Allora dal momento che il prodotto *wedge* commuta con il *pull-back*, si ha che

$$e^*(d\gamma) = \sum_{i=1}^N (e^*\theta^i) \wedge (e^*\nu_i) \tag{2.2.8}$$

Con un semplice calcolo, possiamo scrivere in coordinate le due 1-forme sollevate su Γ:

$$e^*\theta^i = \sum_{\alpha=1}^N \phi^i_{c^\alpha} dc^\alpha \tag{2.2.9}$$

$$e^*\nu_i = ((F_{z^i} \circ e) - \frac{\partial}{\partial x}(F_{p^i} \circ e))dx - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \eta_i}{\partial c^\alpha} dc^\alpha \tag{2.2.10}$$

in cui è omessa la dipendenza da $(x,c) \in \Gamma$ per non appesantire la notazione e in cui gli indici bassi indicano le derivate e quelli alti le componenti. Si noti che la prima parte della (2.2.10) è la i-esima componente di $L_F(\phi(\cdot, c))$, dove L_F è l'operatore definito in 1.5. Svolgendo il prodotto wedge nella (2.2.8) risulta facilmente

$$e^*(d\gamma) = d(e^*\gamma) = \sum_{\alpha=1}^{N} L_F(\phi) \cdot \phi_{c^\alpha} dc^\alpha \wedge x + \sum_{1 \le \alpha < \beta \le n} [c^\alpha, c^\beta] dc^\alpha \wedge dc^\beta \tag{2.2.11}$$

dove ancora una volta è omessa la dipendenza da $(x, c) \in \Gamma$. Quest'uguaglianza, di per sé molto importante, ci dice che un campo di estremali con parentesi di Lagrange nulle è un campo di Mayer, poiché vale $d(e^*\gamma) = 0$ che abbiamo mostrato essere equivalente all'essere di Mayer. Viceversa se un campo è di Mayer, allora vale $d(e^*\gamma) = 0$ e dunque le sue parentesi di Lagrange sono nulle. Il fatto che sia un campo di estremali segue da un calcolo molto semplice: basta scrivere le derivate miste dell'eikonale (vedi la definizione 2.2.3), uguagliarle e poi valutare in $z = \phi(x, c)$: l'uguaglianza che ne discende è equivalente a $L_F(\phi(\cdot, c)) = 0$. Si omettono i conti noiosi che si possono estrapolare comunque da in [15, pagg. 316-319] (Attenzione: la trattazione fatta su quel libro, per quanto riguarda le definizioni di campi, è *leggermente* diversa). □

Nota 2.2.9. Una volta mostrata la 2.2.5, è semplice notare che in una dimensione ($N = 1$) i concetti di campo di Mayer e di campo di estremali coincidono. In dimensione più alta la classe dei campi di estremali è più ampia di quella dei campi di Mayer: in ogni caso siccome la derivazione era del tutto generale, per i campi di estremali vale la (2.2.11), in cui il primo termine si annulla

$$d(e^*\gamma) = \sum_{1 \le \alpha < \beta \le n} [c^\alpha, c^\beta] dc^\alpha \wedge dc^\beta. \tag{2.2.12}$$

E' interessante notare che per un campo di estremali le parentesi di Lagrange sono costanti su ogni orbita $\phi(\cdot, c)$. Infatti, essendo il campo un campo di estremali

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_p \circ e)(x, c) = (F_z \circ e)(x, c). \tag{2.2.13}$$

Dunque essendo $e : \Gamma \to G \times \mathbb{R}^N$ una funzione di classe C^1, così come F_z, anche $\frac{\partial}{\partial x}(F_p \circ e)(x, c)$ è una funzione di classe C^1 su Γ a valori in $\mathbb{R}^N$, dunque è derivabile nelle componenti c^α con continuità. Siccome sono verificate le ipotesi deboli del teorema di Schwarz (vedi ad esempio [17, Pag.238]), si ha che $\frac{\partial(F_p \circ e)}{\partial x \partial c^\alpha} = \frac{\partial(F_p \circ e)}{\partial c^\alpha \partial x} = \frac{\partial(F_z \circ e)}{\partial c^\alpha}$. Allo stesso modo si ha $\frac{\partial \phi}{\partial x \partial c^\alpha} = \frac{\partial \phi'}{\partial c^\alpha}$. Questo poiché s'era richiesto che $\phi' : \Gamma \to \mathbb{R}^N$ fosse una funzione di classe C^1, nella definizione di campo. Allora adottando la convenzione che gli indici ripetuti si sommano e tralasciando di scrivere per semplicità la dipendenza da $(x, c) \in \Gamma$,

$$\frac{\partial}{\partial x}[c^\alpha, c^\beta] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial c^\alpha}\frac{\partial \phi_i}{\partial c^\beta} - \frac{\partial \eta_i}{\partial c^\beta}\frac{\partial \phi_i}{\partial c^\alpha}\right) = \tag{2.2.14}$$

$$= \frac{\partial(F_{z^i} \circ e)}{\partial c^\alpha}\frac{\partial \phi_i}{\partial c^\beta} + \frac{\partial(F_{p^i} \circ e)}{\partial c^\alpha}\frac{\partial \phi_i'}{\partial c^\beta} - \frac{\partial(F_{z^i} \circ e)}{\partial c^\beta}\frac{\partial \phi_i}{\partial c^\alpha} - \frac{\partial(F_{p^i} \circ e)}{\partial c^\beta}\frac{\partial \phi_i'}{\partial c^\alpha} = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è vera facendo il calcolo, derivando più volte con la chain-rule.

Nota 2.2.10. Notare che, in virtù della proposizione 2.2.8 e della 2.2.6, un campo ottimale (o di Weierstrass) è un campo di estremali con parentesi di Lagrange nulle.

A questo punto ci chiediamo come invertire il risultato della proposizione 2.2.6. Per farlo ci tornerà utile il seguente:

Lemma 2.2.11. *Sia definito* $\mathcal{E}_F(x,z,p,q) = F(x,z,q) - F(x,z,p) - (q-p)\cdot F_p(x,z,p)$ l'Eccesso di Weierstrass *(si noti* $\mathcal{E}_F : G \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*). Se* $f : \Gamma \to G$ *è un campo di Mayer con* slope function ρ*, allora se considero*

$$F^\star(x,z,p) := F(x,z,p) - S_x(x,z) - p \cdot S_z(x,z) \tag{2.2.15}$$

la lagrangiana modificata si ha

$$F^\star(x,z,p) = \mathcal{E}_F(x,z,\rho(x,z),p) \quad \forall (x,z,p) \in G \times \mathbb{R}^N. \tag{2.2.16}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è molto semplice: in virtù della definizione 2.2.3, esiste una funzione $S \in C^2(G)$ tale che $S_z = (F_p \circ \mathcal{P})$ e $S_x = (F \circ \mathcal{P}) - \rho \cdot (F_p \circ \mathcal{P})$, dove $\mathcal{P}$ è lo slope field del campo ed è stata omessa la dipendenza di tutto da (x,z). Allora sostituendo nella $F^\star$ si ottiene, omettendo la dipendenza di ρ da (x,z),

$$\begin{aligned} F^\star(x,z,p) &= F(x,z,p) - (F \circ \mathcal{P})(x,z) + \rho \cdot (F_p \circ \mathcal{P})(x,z) - p \cdot ((F_p \circ \mathcal{P})(x,z)) = \\ &= F(x,z,p) - F(x,z,\rho) + \rho \cdot F_p(x,z,\rho) - p \cdot F_p(x,z,\rho) = \\ &= \mathcal{E}_F(x,z,\rho,p) \end{aligned}$$

□

Nota 2.2.12. Si noti che se la lagrangiana fosse convessa, $\mathcal{E}_F$, l'eccesso di Weierstrass, sarebbe maggiore o uguale di 0. Se invece richiediamo la *condizione di ellitticità* per ogni $(x,z) \in G$ (gli indici ripetuti si intendono sommati)

$$F_{p^i p^j}(x,z,p)\alpha_i\alpha_j \geq m|\alpha|^2 \tag{2.2.17}$$

per una certa costante $m > 0$, e per ogni $\alpha, p \in \mathbb{R}^N$, allora l'hessiana della F è definita positiva e dunque, siccome stiamo ragionando sempre con una lagrangiana almeno di classe $C^2([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\mathcal{E}_F$ è strettamente positiva eccetto, ovviamente, che per $p = \rho(x,z)$.

E' semplice, a questo punto, dedurre la seguente proposizione usando il lemma 2.2.11 e l'osservazione precedente:

Proposizione 2.2.13. *Sia dato un campo di Mayer* $f : \Gamma \to G$ *riferito a una certa lagrangiana* F*. Se* F*, definita almeno in un intorno di* $G \times \mathbb{R}^N$*, è convessa, allora* f *è un campo ottimale con lo stesso eikonale. Se* F *soddisfa la* condizione di ellitticità *di cui alla nota 2.2.12, allora* f *è un campo di Weierstrass.*

2.3 Calibrazione con campi ottimali

Dopo aver studiato le varie relazioni fra i campi come definiti in 2.2.3, indaghiamo perché avere un campo ottimale (o di Weierstrass) è così importante. Innanzitutto per la nota 2.2.10 un campo ottimale (o di Weierstrass) è un campo di estremali. L'idea è la seguente: se valgono le condizioni richieste nella definizione di campo ottimale (o di Weierstrass) è possibile riuscire a calibrare con l'eikonale, e concludere che se un certo $u_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è immerso in tale campo di estremali allora, almeno per tutte le u che hanno il grafico in G, la porzione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ che viene ricoperta dal campo, e dati al bordo come u_0, allora u_0 è un minimo del funzionale $\mathcal{F}$ associato alla lagrangiana F. Questa sezione sarà dedicata a dimostrare quest'osservazione che, come si vedrà, discende dai risultati precedenti.

Proposizione 2.3.1. *Supponiamo che $f : \Gamma \to G$ sia un campo ottimale con lagrangiana relativa $F(x,z,p)$. Data $\mathcal{C}$ la classe fondamentale definita in (1.0.2), sia*

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \{u : [a,b] \to \mathbb{R}^N \mid (x,u(x)) \in G \quad \forall x \in [a,b]\}. \tag{2.3.1}$$

Se $u_0 \in \mathcal{C}'$ e in più $u_0'(x) = \rho(x,u_0(x))$ quasi ovunque per $x \in (a,b)$. dove ρ è la slope function *di f, allora*

$$\int_a^b F(x,u(x),u'(x))dx \geq \int_a^b F(x,u_0(x),u_0'(x))dx \quad \forall u \in \mathcal{C}'. \tag{2.3.2}$$

In più l'integrale a destra nella (2.3.2) vale esattamente $S(a,\alpha) - S(b,\beta)$.

Se il campo fosse di Weierstrass, allora la (2.3.2) diviene stretta ogniqualvolta esiste un sottoinsieme di $[a,b]$, di misura non nulla, in cui $u'(x) \neq \rho(x,u(x))$.

Dimostrazione. Per la definizione di campo ottimale (2.2.3) esiste una $S \in C^2(G)$ tale che $F^\star(x,z,p) = F(x,z,p) - S_x(x,z) - p \cdot S_z(x,z) \geq 0$ ogniqualvolta $(x,z,p) \in G \times \mathbb{R}^N$, e vale l'uguaglianza sostituendo $p = \rho(x,z)$. Allora data $M(x,z,p) = S_x(x,z) + p \cdot S_z(x,z)$, si ha che M funge da calibratore per la terna $\{F, u_0, \mathcal{C}'\}$ perché soddisfa entrambe le richieste della definizione 2.1.1. La disuguaglianza $M(x,u(x),u'(x)) \leq F(x,u(x),u'(x))$ quasi ovunque discende dalla definizione di campo ottimale, e l'uguaglianza se $u \equiv u_0$ dipende dal fatto che che $u_0'(x) = \rho(x,u_0(x))$ quasi ovunque per $x \in (a,b)$. Infatti è semplice notare che, avendo tale uguaglianza, si ha che

$$F^\star(x,u_0,u_0') = F(x,u_0,\rho(x,u_0)) - S_x(x,u_0) - S_z(x,u_0) \cdot \rho(x,u_0) = 0 \tag{2.3.3}$$

poiché f è un campo ottimale (basta valutare la seconda definizione di campo ottimale (2.2.3) in $z = u_0(x)$). Inoltre $M(x,z,p)$ essendo una lagrangiana nulla è invariante. Dunque vale la proposizione 2.1.4 da cui segue la prima parte della tesi.

Per sapere quanto vale l'integrale a destra nella (2.3.2), integrando fra a e b la (2.3.3), si deduce

$$\int_a^b F(x,u_0(x),u_0'(x))dx = \int_a^b S_x(x,u_0(x)) + S_z(x,u_0(x)) \cdot u_0'(x) = S(a,\alpha) - S(b,\beta) \tag{2.3.4}$$

che è cio che si voleva.

Se il campo fosse di Weierstrass, si nota che $M(x,z,p)$ funge da calibratore stretto per F e u_0, nella sottoclasse di $\mathcal{C}'$ costituita dalle funzioni per cui esiste un sottoinsieme di (a,b) di misura non nulla in cui $u'(x) \neq \rho(x,u(x))$. Dunque ancora dalla proposizione 2.1.4 segue l'ultima parte della tesi.

$\square$

Nota 2.3.2. Si noti che la potenza della proposizione precedente si può apprezzare nella capacità di dedurre che un estremale (i.e. una soluzione di classe $C^2([a,b];\mathbb{R}^N)$ all'equazione di Eulero-Lagrange (1.5.8)) che può essere immerso in un campo ottimale è anche un minimo del problema (1.0.1) (stretto se il campo è di Weierstrass). Data una certa $u_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, con $u_0(a) = \alpha$ e $u_0(b) = \beta$ soluzione classica dell'equazione di Eulero-Lagrange, immergerla in un campo ottimale significa trovare $f : \Gamma \to G$ ottimale tale che, per un certo $c_0 \in C$, valga $\phi(\cdot, c_0) \equiv u$. Si noti che in questo caso Γ e G hanno prima coordinata $a \leq x \leq b$. Si noti, altresì, che vale $\phi'(x,c_0) = \rho(x,\phi(x,c_0))$, essendo ρ la *slope function* del campo. Se per assurdo considero una u che non coincide identicamente con u_0, $u : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ di classe $AC([a,b];\mathbb{R}^N)$ con $u(a) = \phi(a,c_0)$ e $u(b) = \phi(b,c_0)$ che soddisfa $u'(x) = \rho(x,u(x))$ quasi ovunque, allora, essendo ρ una funzione $C^1(G;\mathbb{R}^N)$, ottengo immediatamente che u è una funzione $C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$. Allora ottengo una contraddizione perché il problema di Cauchy $u'(x) = \rho(x,u(x))$ avrebbe soluzioni distinte con lo stesso dato iniziale. Allora qualsiasi funzione $u \in AC$ con dati al bordo identici a quelli di u_0, è tale che $u'(x) \neq \rho(x,u(x))$ su un insieme di misura non nulla.

Più precisamente, con i risultati sui campi mostrati nella precedente sezione, in particolare le proposizioni 2.2.8 e 2.2.13, e in virtù dell'osservazione precedente 2.3.2 si può desumere la seguente proposizione:

Proposizione 2.3.3. *Assegnata una lagrangiana $F(x,z,p)$ definita almeno su $G \times \mathbb{R}^N$, e $u_0(x) : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, con $u_0(a) = \alpha$ e $u_0(b) = \beta$ una soluzione classica dell'equazione di Eulero-Lagrange (1.5.8) riferita al problema di lagrange con lagrangiana F, allora*

- *Se $u(x)$ può essere immersa in un campo di estremali $f : \Gamma \to G$ con parentesi di Lagrange nulle e $F(x,z,\cdot)$ è convessa per ogni $(x,z) \in G$, allora*

$$\int_a^b F(x,u_0(x),u_0'(x))dx \leq \int_a^b F(x,u(x),u'(x))dx \quad \forall u \in \mathcal{C}' \tag{2.3.5}$$

dove $\mathcal{C}'$ è definito come nella proposizione 2.3.1.

- *Se nelle stesse ipotesi di prima invece della convessità si richiede la condizione di ellitticità (2.2.12), o la stretta convessità di $F(x,z,p)$ in p per ogni $(x,z) \in G$, allora*

$$\int_a^b F(x,u_0(x),u_0'(x))dx < \int_a^b F(x,u(x),u'(x))dx \quad \forall u \in \mathcal{C}' \quad u \neq u_0. \tag{2.3.6}$$

Dimostrazione.

- Un campo di estremali con parentesi di Lagrange nulle è un campo di Mayer, vista la proposizione 2.2.8. In più se la lagrangiana è convessa in p per ogni $(x, z) \in G$, allora F è un campo ottimale per la proposizione 2.2.13. Allora usando la proposizione 2.3.1 si conclude quanto voluto.

- Come prima il campo è di Mayer, ma avendo la condizione di ellitticità (o stretta convessità), il campo risulta di Weierstrass per la proposizione 2.2.13. Sfruttando la nota 2.3.2 e la proposizione 2.3.1, otteniamo che la disuguaglianza può essere rafforzata.

□

CAPITOLO 3

Esistenza e regolarità delle soluzioni

3.1 Il metodo diretto nel calcolo delle variazioni

Fino ad ora abbiamo trascurato la questione dell'esistenza di un minimo al problema (1.0.1) nella classe (1.0.2). L'idea fondamentale, per le questioni di esistenza, è utilizzare il seguente teorema di Weierstrass, di cui si omette la facile dimostrazione:

Teorema 3.1.1. *Sia $F : X \to \mathbb{R}$ un funzionale definito su uno spazio topologico X dotato di una certa nozione di convergenza sequenziale. Se esiste una costante M per cui $\{x \in X \mid F(x) \leq M\}$ è non vuoto e sequenzialmente compatto secondo la nozione di convergenza adottata e in più il funzionale F è sequenzialmente semicontinuo inferiormente, i.e.*

$$\text{se} \quad x_n \to x \quad \text{vale} \quad F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \tag{3.1.1}$$

allora il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$ ammette un minimo globale.

Il funzionale a cui si vuole applicare il precedente teorema è

$$\mathcal{F}(u) := \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{3.1.2}$$

nella classe delle funzioni

$$\mathcal{C} = \{u \in AC([a, b]; \mathbb{R}^N) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}. \tag{3.1.3}$$

La nozione di convergenza da utilizzare è suggerita dal risultato di compattezza di cui alla proposizione 1.3.8 che abbiamo mostrato nel primo capitolo. Dunque deve intendersi che, date $u_n, u \in AC([a, b]; \mathbb{R}^N)$, allora $u_n \to u$ se $u_n \to u$ uniformemente e $u'_n \to u'$ debolmente, componente per componente, in $L^1((a, b), \lambda)$.

In questo capitolo, se non diversamente specificato, $F(x,z,p)$ è una lagrangiana definita su $(a,b) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Occasionalmente (a,b) potrebbe essere chiamato I e $(a,b)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ potrebbe essere chiamato Ω. Prima di andare avanti vale la pena notare che il funzionale $\mathcal{F}(u)$ (3.1.2) è ben definito nella classe delle funzioni assolutamente continue (potendo ammettere, eventualmente valori infiniti), ammettendo anche solo che la lagrangiana $F(x,z,p)$ sia limitata dal basso e che sia una funzione di Carathéodory, i.e. misurabile in x per ogni scelta di $(z,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ e continua in (z,p) per quasi ogni $x \in (a,b)$. Sostanzialmente ciò segue dal fatto che, nel caso di lagrangiane di Carathéodory, la funzione $F(x,u(x),u'(x))$ è misurabile. La dimostrazione di questo fatto è molto semplice e discende dalla seguente proposizione:

Proposizione 3.1.2. *Se $f(x,y) : (a,b) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ è una funzione di Carathéodory e $u : (a,b) \to \mathbb{R}^k$ è una funzione misurabile, allora $f(x,u(x))$ è una funzione misurabile.*

Dimostrazione. E' sufficiente mostrarlo per u funzioni semplici e poi passare al limite grazie alla continuità nella seconda variabile. Una dimostrazione può essere trovata, ad esempio, in [7, Pag.103]. □

A questo punto basta notare che $x \to (u(x),u'(x))$ è una funzione misurabile: è sufficiente ricordare che una funzione assolutamente continua ha derivata misurabile perché limite quasi ovunque dei rapporti incrementali, secondo il teorema 1.2.6. Allora assumendo che $F(x,z,p)$ sia di Charatéodory, ne segue che $F(x,u(x),u'(x))$ è misurabile. La richiesta che $F(x,z,p)$ sia limitata dal basso (da una costante o anche da una certa funzione $g(x) \in L^1((a,b)))$ è importante affinché sia ben definito $\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x,u(x),u'(x))dx$. Si noti che, dal momento che non si ha alcuna ipotesi sulla sommabilità, tale integrale a priori può valere anche $+\infty$.

3.2 Teoremi di semicontinuità

Assumendo $F(x,z,p)$ continua su $(a,b) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, una condizione necessaria affinché secondo tale nozione di convergenza il funzionale risulti semicontinuo inferiormente è la convessità di $F(x,z,p)$ in p per ogni (x,z) fissati. In effetti si mostra che se vale la semicontinuità inferiore del funzionale anche solo sulle funzioni equi-lipschitziane che convergono uniformemente, allora $F(x,z,p)$ è convessa in p per ogni $(x,z) \in (a,b)\times\mathbb{R}^N$ fissati. Per la dimostrazione di questa proprietà si legga, ad esempio [7, pagg.105-107]. Si mostra che, in un certo senso, per la semicontinuità inferiore, tale condizione è anche sufficiente. Infatti vale il seguente teorema dovuto a Tonelli:

Teorema 3.2.1 (Teorema di semicontinuità di Tonelli)**.** *Sia $F(x,z,p)$ una lagrangiana definita su $\Omega := (a,b) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, limitata dal basso da una funzione $g(x) \in L^1((a,b))$. Allora, se per ogni (x,z) fissati $F(x,z,\cdot)$ è convessa e inoltre $F(x,z,p)$ e $F_p(x,z,p)$ sono continue su Ω, il funzionale $\mathcal{F} : AC([a,b];\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è semicontinuo inferiormente secondo la nozione di convergenza uniforme sulle funzioni e debole L^1 sulle derivate.*

Dimostrazione. Svolgiamo prima la dimostrazione per il caso $F(x,z,p) \geq 0$. Consideriamo delle funzioni assolutamente continue $u_n \to u$ uniformemente e $u_n' \to u'$ debolmente componente per componente. Dal momento che $F(x,u(x),u'(x))$ risulta misurabile per la proposizione 3.1.2, e $F(x,u(x),u'(x)) \geq 0$, sono possibili solo due casi: $\mathcal{F}(u) = +\infty$ oppure $\mathcal{F}(u) = c$, ove $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. In ogni caso $\mu(A) = \int_A F(x,u(x),u'(x))dx$ definisce una misura positiva sui misurabili $A \subseteq (a,b)$ e in più tale misura è assolutamente continua rispetto a quella di Lebsegue: dunque, nel caso in cui $\mathcal{F}(u)$ sia finito, essendo tale misura μ finita, per ogni ϵ esiste δ tale che

$$\lambda(A) < \delta \Rightarrow \int_A F(x,u(x),u'(x))dx \leq \epsilon. \tag{3.2.1}$$

Per il teorema di Lusin mostrato in 1.1.6, esiste un certo compatto $K \subset (a,b)$ con $\lambda((a,b) \setminus K) < \delta$ tale per cui la restrizione di u' a K sia continua. Per tale K, vista la proprietà di assoluta continuità (3.2.1), vale

$$\int_K F(x,u(x),u'(x))dx \geq \int_I F(x,u(x),u'(x))dx - \epsilon. \tag{3.2.2}$$

A questo punto vale la seguente stima, dove si omette l'argomento delle u_n e delle u per non appesantire la notazione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u_n) &\geq \int_K F(x,u_n,u_n')dx \geq \qquad\qquad (3.2.3)\\
&\geq \int_K F(x,u_n,u')dx + \int_K F_p(x,u_n,u') \cdot (u_n' - u')dx = \\
&= \int_K F(x,u_n,u')dx + \int_K F_p(x,u,u') \cdot (u_n' - u')dx + \\
&+ \int_K (F_p(x,u_n,u') - F_p(x,u,u')) \cdot (u_n' - u')dx
\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio usiamo la positività di $F(x,z,p)$, nel secondo la convessità. Ora, essendo u' ristretta a K continua, u' è sicuramente limitata ed essendo $F_p(x,z,p)$ continua, tutto il termine $F_p(x,u(x),u'(x))$ è limitato su K. Dal momento che $u_n' \to u'$ debolmente, allora il secondo termine nell'uguaglianza finale (3.2.3) converge a zero quando $n \to +\infty$.

Inoltre, siccome $u_n' \to u'$ debolmente, per il criterio di Dunford-Pettis mostrato nella proposizione 1.3.6, le u_n' sono equi-integrabili e dunque equilimitate perché definite su uno spazio di misura finita. Allora esiste una certa $M > 0$ per cui $\|u_n' - u'\|_{L^1} \leq M$. Visto che $u_n \to u$ uniformemente, e poiché u' ristretta a K è continua e dunque limitata, esiste un compatto $K' := K \times [-A,A] \times [-B,B]$ tale che $(x,u_n(x),u'(x))$ e $(x,u(x),u'(x))$ stanno in K' definitivamente. Allora essendo F_p uniformemente continua su K' e convergendo le u_n uniformemente a u, $F_p(x,u_n(x),u'(x)) - F_p(x,u(x),u'(x))$ converge uniformemente a 0. Dunque visto che $\|u_n' - u'\|_{L^1} \leq M$, anche il terzo termine converge a 0. Prendendo il liminf nella (3.2.3) e usando il lemma di Fatou [2, pag.35] risulta

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\mathcal{F}(u_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty}\int_K F(x,u_n(x),u'(x))dx \geq \\ &\geq \int_K F(x,u(x),u'(x))dx \geq \int_I F(x,u(x),u'(x))dx - \epsilon\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

dove, dopo aver portato il liminf dentro per Fatou nel secondo passaggio, si è usato che $F(x,u_n(x),u'(x)) \to F(x,u(x),u'(x))$ puntualmente, che si dimostra esattamente come s'è mostrato $F_p(x,u_n(x),u'(x)) \to F_p(x,u(x),u'(x))$ prima. Da ciò si ottiene la semicontinuità inferiore data l'arbitrarietà di ϵ.

Se $\mathcal{F}(u) = +\infty$, basta notare che per ogni ϵ deve esistere un compatto K, su cui u' è continua, e tale che $\int_K F(x,u(x),u'(x)) \geq \frac{1}{\epsilon}$ e la dimostrazione è analoga a prima se non per il fatto che la conclusione diviene

$$\liminf_{n\to+\infty}\mathcal{F}(u_n) \geq \frac{1}{\epsilon} \tag{3.2.5}$$

da cui si deduce, vista l'arbitrarietà di ϵ, che $\liminf_{n\to+\infty}\mathcal{F}(u_n) = +\infty$ e dunque vale ancora la semicontinuità.

Infine è semplice notare che basta la limitazione dal basso da una funzione $g(x) \in L^1((a,b))$. Basta, infatti, applicare il precedente ragionamento a $F(x,z,p) - g(x) \geq 0$. □

Nota 3.2.2. Si noti che, in realtà, la convergenza uniforme delle u_n poteva anche non essere richiesta. Bastava anche un'ipotesi di convergenza forte delle u_n a u in $L^1((a,b))$: infatti, a meno di estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque, il compatto K poteva essere scelto in modo tale da avere su di esso anche la convergenza uniforme delle u_n a u, con una semplice applicazione del teorema di Egorov 1.1.4.

Il teorema di semicontinuità, in effetti, vale sotto ipotesi molto più deboli e in un contesto generale: dato uno spazio di misura $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, essendo μ una misura positiva e finita (in effetti basterebbe σ-finita), e una lagrangiana $F(x,z,p) : \Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ misurabile, vale la seguente proposizione:

Proposizione 3.2.3. *Supponiamo che $F(x,z,p)$ sia limitata dal basso da una $g(x) \in L^1(\Omega)$. Se $F(x,\cdot,\cdot)$, è semicontinua inferiore per μ-quasi ogni x e $F(x,z,\cdot)$ è convessa per μ-quasi ogni x e per ogni $z \in \mathbb{R}^n$, allora se $u_n \to u$ in $L^1_\mu(\Omega;\mathbb{R}^n)$ e $v_n \to v$ debolmente in $L^1_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)$, vale*

$$\int_\Omega F(x,u(x),v(x))dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n(x),v_n(x))dx \tag{3.2.6}$$

Dimostrazione. La dimostrazione, abbastanza tecnica, che fa uso del lemma di Mazur e del teorema di Carathéodory sugli inviluppi convessi, può essere trovata in [7, Pag.108 e seguenti]. □

3.3 Esistenza delle soluzioni

A questo punto è possibile mostrare l'esistenza nel caso di una dominazione della lagrangiana dal basso da una funzione a crescita superlineare. Enunciamo, dunque, il teorema di esistenza:

Proposizione 3.3.1 (Teorema di Esistenza di Tonelli)**.** *Si supponga che $F(x,z,p)$ sia una lagrangiana definita su $\Omega := (a,b)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$. Se $F(x,z,p)$ e $F_p(x,z,p)$ sono funzioni continue su Ω, $F(x,z,p)$ è convessa in p per ogni scelta di $(x,z) \in (a,b)\times\mathbb{R}^N$ e se esiste una funzione misurabile e limitata dal basso $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di crescita superlineare (i.e. per cui vale $\lim\limits_{|p|\to+\infty} \frac{\theta(p)}{|p|} = +\infty$) tale che $F(x,z,p) \geq \theta(p)$, allora il problema fondamentale* (1.0.1) *ammette un minimo nella classe delle funzioni assolutamente continue ad estremi fissati* (1.0.2)*.*

Dimostrazione. A questo punto la dimostrazione è molto semplice. Il funzionale $\mathcal{F}(u)$ è ben definito nella classe delle funzioni assolutamente continue per quanto mostrato nella proposizione 3.1.2. Inoltre, valendo tutte le ipotesi del teorema di semicontinuità come lo abbiamo mostrato in 3.2.1, si ha che il funzionale $\mathcal{F}(u)$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla nozione di convergenza uniforme sulle funzioni e debole sulle derivate. La limitazione dall'alto, necessaria nelle ipotesi del teorema di semicontinuità, si ottiene semplicemente notando che $F(x,z,p) \geq \theta(p) \geq c$, dove $c \in \mathbb{R}$ è la costante che limita dal basso θ.

Sia $M := \mathcal{F}(u_0)$, dove u_0 è la retta che congiunge i punti (a,α) e (b,β). Sicuramente l'insieme

$$X := \{u \in \mathcal{C} \mid \mathcal{F}(u) \leq M\} \tag{3.3.1}$$

è non vuoto. D'altra parte, vista la maggiorazione, per ogni $u \in X$ si ha che $\int_a^b \theta(u') \leq M$ e allora per il criterio di Dunford-Pettis mostrato in 1.3.6, la cui dimostrazione si adatta perfettamente a questo caso, si ha che le u' in X sono equi-integrabili.

Data una successione $\{u_n\}$ con $u_n \in X$, le u'_n sono equi-integrabili per quanto osservato, e valendo α in a, sono anche equilimitate in un punto. Esse, dunque, soddisfano entrambe le ipotesi del criterio di compattezza mostrato nel primo capitolo nella proposizione 1.3.8. Allora esiste una certa u assolutamente continua e una sottosuccessione (u_{n_k}) tale che $u_{n_k} \to u$ uniformemente e $u'_{n_k} \to u'$ debolmente. Rinominando $n_k = n$, otteniamo che, siccome le $u_n \in \mathcal{C}$, anche il loro limite uniforme lo è e dunque $u \in \mathcal{C}$. Inoltre per il teorema di semicontinuità $\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) \leq M$ e dunque $u \in X$. Dunque X è sequenzialmente compatto rispetto alla nozione di convergenza uniforme sulle funzioni e debole sulle derivate.

Avendo verificato le ipotesi del teorema di Weierstrass di cui in 3.1.1 si conclude che esiste un minimo nella classe $\mathcal{C}$. □

Nota 3.3.2. In realtà quanto fatto nella dimostrazione del teorema 3.3.1 garantisce che tutti i sottolivelli non vuoti X sono sequenzialmente compatti. In tal caso si dice che il funzionale è *coercivo* rispetto alla nozione di convergenza adottata.

Nota 3.3.3. Chiaramente la dimostrazione funziona perfettamente anche nel caso in cui $F(x,z,p) \geq \theta(p) + g(x)$ con $g(x) \in L^1((a,b))$ e $\theta(p)$ a crescita superlineare limitata dal basso da una costante reale c. La semicontinuità segue dal teorema 3.2.1 ma questa volta $F(x,z,p)$ è dominata da $c + g(x)$. La compattenza sequenziale si ottiene identicamente a quanto fatto nel teorema di esistenza 3.3.1.

Nota 3.3.4. Di solito si ha a che fare con lagrangiane con crescita almeno polinomiale, ovvero lagrangiane per cui vale $F(x,z,p) \geq \alpha|p|^m + g(x)$, con $m > 1$, α costante positiva e $g(x) \in L^1((a,b))$. Chiaramente questo caso è contemplato dalla dimostrazione del teorema, però va notato che, in tale situazione, è possibile semplificare notevolmente la dimostrazione.

Nella fattispecie non diventa più essenziale passare per il criterio di Dunford-Pettis. La nozione di convergenza adottata è la stessa e pertanto il teorema di semicontinuità 3.2.1 continua a valere perfettamente.

La compattezza è garantita dal fatto che, se $u \in X$ come definito in (3.3.1) allora $\int_a^b (\alpha|u'(x)|^m + g(x))dx \leq \mathcal{F}(u) \leq M$, e dunque le norme L^m delle u' sono equilimitate. Applicando il criterio di compattezza nella forma debole, mostrato nella nota 1.3.9, si deduce che è possibile, da ogni successione u_n in X, estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente ad una certa u e le cui derivate convergono debolmente ad u' in $L^1((a,b))$. La convergenza uniforme delle funzioni e il teorema di semicontinuità grantiscono il fatto che il limite sia ancora in X e dunque si conclude applicando il teorema di Weierstrass di cui in 3.1.1.

In tale caso è evidente che il minimo nella classe delle funzioni assolutamente continue con dati al bordo fissi è tale che $\int_a^b |u'(x)|^m dx < +\infty$ e dunque, per la proposizione 1.2.9, la funzione è $\left(1 - \frac{1}{m}\right)$-holderiana. Dunque, si noti che il minimo nella classe $\mathcal{C}$ è lo stesso che nella seguente classe di funzioni

$$X' := \{u \in W^{1,m}((a,b);\mathbb{R}^N) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}. \tag{3.3.2}$$

Nota 3.3.5. Il teorema di esistenza in $W^{1,m}((a,b);\mathbb{R}^N)$ vale anche per controlli leggermente più generali, del tipo

$$F(x,z,p) \geq \alpha|p|^m - \beta|z|^s + g(x) \tag{3.3.3}$$

dove α, β sono costanti reali positive, $g(x) \in L^1((a,b))$ e $m > s \geq 1$. La semicontinuità è semplice da ottenere: basta notare che definita $\overline{F}(x,z,p) := F(x,z,p) + \beta|z|^s - g(x) \geq \alpha|p|^m \geq 0$, se $F(x,z,p)$ soddisfa le ipotesi del teorema di semicontinuità 3.2.1 (o della sua versione più forte 3.2.3), allora anche $\overline{F}(x,z,p)$ continua a soddisfarle. Allora applicando il teorema di semicontinuità al funzionale relativo a $\overline{F}(x,z,p)$, notando che se $u_n \to u$ uniformemente allora $\int_a^b (\beta|u_n|^s - g(x))dx \to \int_a^b (\beta|u|^s - g(x))dx$, segue la semicontinuità inferiore del funzionale relativo a $F(x,z,p)$.

La compattezza sequenziale, invece, è leggermente più delicata ma è sufficiente fare le stime in maniera accurata usando una disuguaglianza del tipo Poincaré (si veda ad esempio [12, pagg.105 e seguenti]).

Nota 3.3.6. Similmente a quanto detto nella nota 3.3.5, il teorema di esistenza vale anche per controlli del tipo $F(x,z,p) \geq \theta(p) - \alpha|z| + g(x)$, dove θ è una funzione misurabile di crescita superlineare limitata dal basso da una costante reale c, $\alpha > 0$ e $g(x) \in L^1((a,b))$. La semicontinuità si mostra identicamente a come fatto nella nota 3.3.5. Per la compattezza si consideri la classe, a M fissato,

$$X = \{u \in \mathcal{C} \mid \mathcal{F}(u) \leq M\}. \tag{3.3.4}$$

Dal momento che $u \in \mathcal{C}$ e dunque $u(a)$ è fisso, si ha che, per ogni $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq |u(x) - u(a)| + |u(a)| \leq \int_a^b |u'(x)|dx + |u(a)| \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b |u(x)|dx \leq (b-a)\int_a^b |u'(x)|dx + (b-a)|u(a)|. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Dunque, non appena $u \in \mathcal{C}$, in virtù della (3.3.5), vale

$$\int_a^b \big(\theta(u'(x)) - \alpha|u(x)|\big)\,dx \geq \int_a^b \big(\theta(u'(x)) - \alpha(b-a)|u'(x)| - \alpha|u(a)|\big)\,dx. \tag{3.3.6}$$

Definita $\theta'(p) := \theta(p) - \alpha(b-a)|p| - \alpha|u(a)|$, si ha che se $u \in X$, allora $\int_a^b \theta'(u'(x))dx \leq M$. D'altra parte la funzione θ' eredita le ipotesi della θ necessarie per poter applicare il criterio di Dunford-Pettis e dunque la classe X risulta costituita di funzioni equi-integrabili. La dimostrazione, allora, procede come nel teorema di esistenza 3.3.1.

Nota 3.3.7. Per controlli più generali con funzioni convesse, che non sono riconducibili agli spazi $L^m((a,b))$, ad esempio $\theta(p) = |p|\log|p|$, il linguaggio più naturale in cui porre la questione è quello degli spazio di Orlicz, ovvero una generalizzazione degli spazi L^m. (Si veda [16, Capitolo 3]) Con questo linguaggio si può mostrare diversamente l'equi-integrabilità di cui si aveva bisogno nel criterio di compattezza 1.3.8 per usare Ascoli-Arzelà, usando una versione della disuguaglianza di Holder per funzioni in spazi di Orlicz [16, pag.58].

Nota 3.3.8. E' molto semplice notare che la dimostrazione del teorema 3.3.1, sotto le medesime ipotesi, non solo fornisce l'esistenza di un minimo nella classe

$$\mathcal{C} = \{u \in AC([a,b];\mathbb{R}^N) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \tag{3.3.7}$$

ma anche l'esistenza in qualsiasi classe di funziononi assolutamente continue in cui i vincoli sono mantenuti per la nozione di convergenza adottata e in più tali vincoli sono tali da fornire l'equilimitatezza di cui si ha bisogno per il criterio di compattezza di cui in 1.3.8. Ciò dimostra, dunque, come il minimo continua ad esistere, nei casi analizzati, anche solo se assegniamo un valore (o nessuno) al bordo.

Nota 3.3.9. Abbiamo notato che, in virtù della proposizione 3.2.3, il teorema di semicontinuità continua a valere anche solo assumendo che $F(x,z,p)$ sia misurabile e limitata dal basso da $g(x) \in L^1((a,b))$, $F(x,\cdot,\cdot)$ semicontinua inferiormente su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ per quasi ogni $x \in (a,b)$ e $F(x,z,\cdot)$ convessa su $\mathbb{R}^N$ per quasi ogni $x \in (a,b)$ e ogni $z \in \mathbb{R}^N$. Dal momento che le ipotesi di convessità di $F(x,z,p)$ nella terza variabile e di continuità di $F(x,z,p)$ e $F_p(x,z,p)$ come date nell'enunciato sono servite solo per mostrare la semicontinuità, esse possono essere indebolite con le precedenti non cambiando la conclusione del teorema.

Ci si può chiedere, a questo punto, se effettivamente le ipotesi di convessità nella terza variabile e di crescita superlineare siano veramente essenziali per avere l'esistenza nello spazio delle funzioni assolutamente continue. La risposta è sì e i successivi esempi lo dimostrano.

3.3.1 Necessità della convessità e della crescita superlineare

Si osservino i seguenti casi in cui valgono tutte le ipotesi del teorema di esistenza di cui in 3.3.1 (o nella versione generale enunciata nella nota 3.3.9), fuorché una e il minimo non esiste.

1. Prendendo $N = 1$, se $F(x,z,p) = \sqrt{z^2+p^2}$ è semplice notare che sono verificate le ipotesi sulla lagrangiana richieste dal teorema di esistenza con le ipotesi più deboli discusso nella nota 3.3.9, ma la crescita è lineare. Si nota che nello spazio

$$X := \{u \in AC([0,1]) \mid u(0) = 0, u(1) = 1\} \tag{3.3.8}$$

   l'inf di $\int_0^1 F(x,u(x),u'(x))dx$ è 1. Infatti sicuramente

$$\int_0^1 \sqrt{u(x)^2 + u'(x)^2} \geq \int_0^1 u'(x) = 1 \tag{3.3.9}$$

   e scegliendo $u_h(x) = 0$ su $[0, 1-\frac{1}{h}]$ e $u_h(x) = 1 + h(x-1)$ su $[1-\frac{1}{h}, 1]$ si vede che $\mathcal{F}(u_h) \to 1$. D'altra parte si mostra facilmente che se $\mathcal{F}(u_0) = 1$ allora $u_0 = 0$ quasi ovunque in $(0,1)$, e dunque per continuità ovunque. Ciò è assurdo considerato i dati al bordo del problema.

2. Prendendo $N = 1$, se $F(x,z,p) = (1-p^2)^2+z^2$ è semplice notare che sono verificate tutte le ipotesi sulla lagrangiana del teorema di esistenza (nella versione *smooth* in 3.3.1) tranne la convessità. L'inf nella classe

$$X := \{u \in AC([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\} \tag{3.3.10}$$

   di $\int_0^1 F(x,u(x),u'(x))dx$ è 0. Data $\phi(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ su $[0,1]$ ed estesa periodicamente su $\mathbb{R}$, basta infatti prendere $u_h(x) := \frac{1}{h}\phi(hx)$, con $h \in \mathbb{N}$, su $[0,1]$. Si nota che $\mathcal{F}(u_h) \to 0$. D'altra parte se esistesse una u_0 con $\mathcal{F}(u_0) = 0$, allora $\int_0^1 u_0(x)^2dx = 0$ da cui $u_0 = 0$ quasi ovunque e dunque ovunque per continuità: ciò è assurdo poiché in tal caso sarebbe $\mathcal{F}(u_0) = 1$.

E' doveroso notare che la conclusione raggiunta dal teorema di esistenza 3.3.1, anche nella sua forma forte enunciata nella nota 3.3.9, non è *ottimale* nel senso che, in alcuni casi, anche importanti, è possibile che il minimo esista ma sia violata un ipotesi. E' questo il caso tipico dei problemi classici del calcolo delle variazioni, come ad esempio il problema delle geodetiche nel piano, che molto spesso hanno lagrangiane a crescita lineare, e dunque il metodo diretto non riesce a funzionare. Il problema delle geodetiche consiste nel minimizzare nella classe $\mathcal{C}$ il funzionale $L(u) := \int_a^b |u'(s)|ds$. E' immediato notare che le ipotesi del teorema di esistenza 3.3.1, anche nella forma forte, sono verificate fuorché l'ipotesi di crescita superlinare. Il problema, in questo caso, ha un minimo nella classe $\mathcal{C}$, dato dalla retta che congiunge i due punti, se affrontato nel piano, mentre se a valori in una qualsiasi superficie la soluzione è la geodetica fra i due punti: l'esistenza del minimo va dunque guadagnata in altri modi. In questo caso, ad esempio, si dimostra, in generale anche a valori in una superficie, che un qualsiasi minimo di $F(u) := \int_a^b |u'(s)|^2 ds$ è un minimo di $L(u)$ e in più $|u'(s)| = k$ quasi ovunque, per una certa costante $k > 0$. Dunque, essendo sufficiente lo studio del funzionale relativo a F, ci si è ricondotti a un caso in cui la crescita è quadratica e si possono applicare i classici risultati sull'esistenza.

Per altri esempi di questo tipo si può consultare [12, pagg.122-125] oppure [7, pagg.115-118].

3.4 Regolarità dei minimi

Dopo aver dimostrato che nelle ipotesi del teorema di esistenza 3.3.1, 3.3.9 un minimo del problema fondamentale esiste nella classe delle funzioni assolutamente continue con dati al bordo fissi, in questa sezione ci proponiamo di discutere la regolarità di tali minimi.

Noteremo come, nel caso in cui le lagrangiane sono a crescita polinomiale, può essere detto molto sulla regolarità delle soluzioni sotto certe ipotesi aggiuntive sulla crescita delle derivate.

Supponiamo, dunque, di lavorare con lagrangiane come nella nota 3.3.5, ovvero

$$F(x, z, p) \geq \alpha|p|^m - \beta|z|^s + g(x) \tag{3.4.1}$$

con $m > s \geq 1$, α, β costanti positive e $g(x) \in L^1((a, b))$. S'è mostrato che, in tal caso, anche solo assumendo sulla lagrangiana $F(x, z, p)$ le ipotesi della proposizione 3.2.3, il problema ammette una soluzione $u \in \mathcal{C}$ e in più $u' \in L^m((a, b); \mathbb{R}^N)$ (e dunque u appartiene a $W^{1,m}((a, b); \mathbb{R}^N)$).

In analogia a quanto fatto nel primo capitolo, quando abbiamo calcolato la variazione prima, vogliamo capire se questi minimi soddisfano o no l'equazione di Eulero-Lagrange. Da ora in poi, dunque, la lagrangiana $F(x, z, p)$ sarà pensata di classe $C^1((a, b) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Sotto l'ipotesi di crescita (3.4.1), detto u un minimo del funzionale $\mathcal{F}$ nella classe $W^{1,m}((a, b); \mathbb{R}^N)$, si prenda una certa $v \in C_c^\infty((a, b); \mathbb{R}^N)$. Si noti che per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale $u + tv \in \mathcal{C}$. Detta

$$\phi_v(t) := \mathcal{F}(u + tv) = \int_a^b F(x, u(x) + tv(x), u'(x) + tv'(x))dx \tag{3.4.2}$$

per garantire l'integrabilità di $F(x, u+tv, u'+tv')$, e dunque la buona definizione di $\phi_v(t)$, è sufficiente una stima dall'alto sulla crescita della lagrangiana $F(x, z, p)$: ad esempio basta che per ogni $(x, z, p) \in (a, b) \times \overline{B}_R(0) \times \mathbb{R}^N$ esista una costante $\gamma(R) > 0$ tale che

$$|F(x, z, p)| \leq \gamma(R)(1 + |p|^m) \tag{3.4.3}$$

dove $\overline{B}_R(0)$ è la palla chiusa di raggio R centrata in 0 in $\mathbb{R}^N$.

Sotto tale ipotesi di crescita $\phi_v(t) = \mathcal{F}(u + tv)$ è ben definita in realtà su tutto $\mathbb{R}$. Sapendo che u è il minimo, se potessimo differenziare $\phi_v(\cdot)$ in 0, si potrebbe dedurre che la variazione prima di $\mathcal{F}$ in u lungo v è 0. Un'ipotesi sufficiente per avere la differenziabilità di $\phi_v(\cdot)$ in zero e poter portare la derivata sotto il segno di integrale [14, pag.56] è la dominazione dall'alto

$$|F_z(x, u + tv, u' + tv') \cdot v + F_p(x, u + tv, u' + tv') \cdot v'| \leq h(x) \tag{3.4.4}$$

con una certa $h(x) \in L^1((a, b))$, per ogni t in un certo intorno di 0 e per quasi ogni $x \in (a, b)$. Tipicamente (ad es. [12, pag.144]) tale condizione si può ottenere richiedendo che, per ogni $(x, z, p) \in (a, b) \times \overline{B}_R(0) \times \mathbb{R}^N$, esista una certa costante $\gamma(R)$ tale che

$$|F_z(x, z, p)|, |F_p(x, z, p)| \leq \gamma(R)(1 + |p|^m). \tag{3.4.5}$$

Queste limitazioni bastano perché, siccome u è (a meno di rappresentanti) continua, esiste un certo M tale che $\|u\|_\infty \leq M$ e allora, preso $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, si ottiene $\|u + tv\|_\infty \leq M + 1$ e dalla (3.4.5) si deduce

$$|F_z(x, u + tv, u' + tv')|, |F_p(x, u + tv, u' + tv')| \leq \gamma(M + 1)(1 + (|u'| + \epsilon|v'|)^m). \tag{3.4.6}$$

La funzione $\gamma(M+1)(1+(|u'(x)|+\epsilon|v'(x)|)^m)$ è evidentemente in $L^1((a, b))$ dal momento che $u'(x) \in L^m((a, b); \mathbb{R}^N)$ e $v \in C_c^\infty((a, b); \mathbb{R}^N)$. La condizione in (3.4.4) segue vista la limitatezza di $\|v\|_\infty$ e $\|v'\|_\infty$. Dunque è possibile derivare sotto il segno di integrale e ottenere, come nella sezione 1.5 del primo capitolo, che

$$\int_a^b (F_z(x, u, u') \cdot v + F_p(x, u, u') \cdot v')dx = 0 \tag{3.4.7}$$

per ogni $v \in C_c^\infty((a, b); \mathbb{R}^N)$. E' evidente che date le condizioni (3.4.5), in realta $F_z(x, u, u')$ e $F_p(x, u, u')$ sono in $L^1((a, b))$. Allora è possibile integrare per parti il primo addendo nella (3.4.7) e applicare il lemma di Du boys-Reymond come fatto nel primo capitolo per ottenere che esiste una costante $c \in \mathbb{R}^N$ per cui quasi ovunque in (a, b) vale l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale

$$F_p(x, u, u') = c + \int_a^b F_z(x, u, u')dx. \tag{3.4.8}$$

Dunque $F_p(x, u, u')$ ammette un rappresentante assolutamente continuo la cui derivata quasi ovunque coincide con $F_z(x, u, u')$, visti i risultati sulle funzioni assolutamente continue di cui al Capitolo 1 (1.2.5 e 1.2.6).

Enunciamo dunque il seguente risultato:

Proposizione 3.4.1. *Data una lagrangiana $F(x,z,p)$ di classe $C^1((a,b)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, convessa in p per ogni scelta $(x,z)\in(a,b)\times\mathbb{R}^N$, che soddisfa la condizione di crescita (3.4.1), e le limitazioni di cui in (3.4.3) e (3.4.5) allora il minimo nella classe $\mathcal{C}$ esiste, appartiene a $W^{1,m}((a,b);\mathbb{R}^N)$, e soddisfa quasi ovunque in (a,b) l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale (3.4.8). Dunque $F_p(x,u,u')$ ammette un rappresentante assolutamente continuo la cui derivata coincide quasi ovunque con $F_z(x,u,u')$. Inoltre se vale la (3.4.9) invece della (3.4.1) il minimo è lipschitziano.*

La prima parte della proposizione segue dalla nota 3.3.9 e da quanto osservato poco sopra. Supponiamo dunque che

$$F(x,z,p)\geq\alpha|p|^m-\beta|z|^s-c \tag{3.4.9}$$

dove $m>s\geq1$ e α,β,c sono costanti positive. Allora chiaramente (3.4.9)$\Rightarrow$(3.4.1) e valgono tutte le osservazione fatte prima di enunicare la proposizione.

Giungendo all'equazione di Eulero-Lagrange integrale (3.4.8) si è mostrato che $F_p(x,u,u')$ ammette un rappresentante assolutamente continuo su $[a,b]$. Dunque esiste un certo $k>0$ tale per cui $|F_p(x,u,u')|\leq k$ per quasi ogni $x\in(a,b)$. Sfruttando la convessità si ha che

$$F(x,z,0)\geq F(x,z,p)-p\cdot F_p(x,z,p)\Rightarrow p\cdot F_p(x,z,p)\geq F(x,z,p)-F(x,z,0). \tag{3.4.10}$$

Vista la condizione di crescita (3.4.9), in virtù della (3.4.10) si ha

$$u'\cdot F_p(x,u,u')\geq\alpha|u'|^m-\beta|u|^s-c-F(x,u,0)\geq\alpha|u'|^m-k_1 \tag{3.4.11}$$

dove k_1 è una certa costante reale, e la stima è possibile vista la (3.4.3). Viste le limitazioni in (3.4.11), si ha quasi ovunque in (a,b) che

$$\alpha|u'|^m-k_1\leq u'\cdot F_p(x,u,u')\leq|u'||F_p(x,u,u')|\leq k|u'|. \tag{3.4.12}$$

Quest'ultima disuguaglianza, essendo $m>1$, fornisce una limitazione di $|u'|$ dall'alto quasi ovunque in (a,b) e dunque, per i discorsi fatti sulle immersioni Holder nel primo capitolo (si veda 1.2.1) si ha che u in realtà è una funzione lipschitziana.

Nota 3.4.2. Il discorso sulle condizioni di crescita sufficienti per garantire la formulazione integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange si può generalizzare per lagrangiane $F(x,z,p)$ definite su $\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{n\cdot N}$, essendo Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una discussione completa può essere trovata nel libro di Dacorogna: il risultato a cui si fa qui riferimento è quello in in [12, pagg.111-112, pag.125]

Nota 3.4.3. I risultati fin qui ottenuti possono essere migliorati sotto diversi aspetti. Sempre supponendo la continuità su $(a,b)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ di F, F_z e F_p, ad esempio, affinché un minimo locale debole soddisifi l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale (1.5.6), basterebbe richiedere che esista una funzione $g(x)\in L^1((a,b))$ e una costante $\gamma(R)$ tale che $|F_z(x,z,p)|+|F_p(x,z,p)|\leq\gamma(R)(|p|+|F(x,z,p)|)+g(x)$ per ogni $(x,z,p)\in(a,b)\times\overline{B}_R(0)\times\mathbb{R}^N$ ([10, pag.327]). Se in aggiunta a questo controllo si richiede che la lagrangiana $F(x,z,p)$ è convessa in p e inoltre limitata dal basso da una funzione misurabile di p di crescita superlineare (come nelle ipotesi del teorema di esistenza 3.3.1), allora qualsiasi minimo locale debole è automaticamente lipschitziano [10, pag.329].

E' stato osservato nel primo capitolo che, nel momento in cui si avesse che $F_p(x, z, p)$ è una funzione di classe $C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e in più $F_{pp}(x, z, p) > 0$ per ogni $(x, z, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (hessiana definita positiva), allora qualsiasi u di Lipschitz, anche solo minimo locale direzionale, sarebbe immediatamente di classe $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ (a posteriori vedremo che è di classe $C^2([a, b]; \mathbb{R}^N)$). Per la dimostrazione, non eccessivamente complicata, si rimanda a [7, pag.135].

In ultima analisi è importante notare che, una volta ottenuta la regolarità almeno C^1 di un minimo locale direzionale, allora la regolarità della lagrangiana si "trasmette" al minimo. Vale cioè la seguente proposizione:

Proposizione 3.4.4. *Sia $k \geq 1$ e sia $u \in C^k([a, b]; \mathbb{R}^N)$ un minimo locale direzionale. Si supponga $F(x, z, p)$ di classe $C^{k+1}([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ in un certo intorno (in norma C^1) di u. Allora se $F_{pp}(x, u(x), u'(x))$ è invertibile per ogni $x \in [a, b]$, il minimo locale direzionale è di classe $C^{k+1}([a, b]; \mathbb{R}^N)$*

Dimostrazione. Per i risultati della sezione 1.5 del primo Capitolo, un minimo locale direzionale regolare che sia almeno $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ soddisfa ovunque l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale. Dunque esiste una costante $c \in \mathbb{R}^N$ tale che, per ogni $x \in [a, b]$, valga

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_z(x, u(x), u'(x))dx \tag{3.4.13}$$

Vista la regolarità data per ipotesi, è immediato notare che $c+\int_a^x F_z(x, u(x), u'(x))dx$ è di classe $C^k([a, b]; \mathbb{R}^N)$. Dunque definita

$$G(x, p) = F_p(x, u(x), p) - F_p(x, u(x), u'(x)) \tag{3.4.14}$$

essa è di classe $C^k([a, b] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, dal momento che lo sono sia $F_p(x, u(x), p)$ che $F_p(x, u(x), u'(x))$. Siccome $G_p(x, p) = F_{pp}(x, u(x), p)$, si ha che $G_p(x, u'(x))$ è invertibile per ogni $x \in [a, b]$. Allora, dal momento che $G(x, u'(x)) = 0$, $u'(x)$ è una funzione di classe $C^k([a, b]; \mathbb{R}^N)$ per il teorema della funzione implicita. Dunque $u \in C^{k+1}([a, b]; \mathbb{R}^N)$. □

3.5 Controesempi alla regolarità

L'obiettivo di questa sezione è quello di mostrare come, scegliendo opportunamente la lagrangiana, si ha l'esistenza di un minimo al problema fondamentale in una determinata classe di funzioni (ad esempio le funzioni lipschitziane) ma questo non appartiene ad una classe di funzioni più regolari. Contestualmente ricapitoleremo anche ciò che mostrato nella sezione precedente. Indaghiamo, anche in questo caso, solo lagrangiane con crescita più che polinomiale (nel senso inteso in 3.3.5 ad esempio). Gli esempi vengono forniti nel caso $N = 1$.

1. $W^{1,m}((a, b)) \to Lip([a, b])$. Questo è il passaggio più delicato. Ricordando la proposizione 3.4.1, è possibile ottenerlo, ad esempio, controllando dall'alto la crescita di $|F(x, z, p)|$, $|F_z(x, z, p)|$ e $|F_p(x, z, p)|$ con un polinomio di grado m in $|p|$

(vedi (3.4.5)). Produrre un esempio di lagrangiana il cui minimo è raggiunto in $W^{1,m}((a,b))$ e questo non appartiene a $Lip([a,b])$ è relativamente semplice: nel prossimo capitolo faremo anche vedere che a patto di scegliere in maniera molto accurata la lagrangiana, avviene il cosiddetto *fenomeno di Lavrentiev*. In realtà tale fenomeno riguarda un ulteriore aspetto: non solo può accadere che il minimo in $W^{1,m}((a,b))$ non sia in $W^{1,\infty}((a,b))$ ma addirittura succede che l'inf su quest'ultima classe è strettamente maggiore dell'inf su $W^{1,m}((a,b))$. (Vedi la sezione 4.2)

2. $Lip([a,b]) \to C^1([a,b])$. In questo passaggio, stando a quanto scritto poco dopo la nota 3.4.3, al di là della regolarità C^1 di F_p, serve che $F_{pp}(x,z,p) > 0$. Per produrre un esempio in cui il minimo esista nella classe delle funzioni lipschitziane ma questo non sia di classe $C^1([a,b])$, basta considerare

$$\int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 \tag{3.5.1}$$

da minimizzare nella classe

$$\mathcal{C}^\star = \{u \in AC([0,1]) \mid u(0) = 0, u(1) = 0\} \tag{3.5.2}$$

E' semplice notare che qualsiasi funzione "dente di sega" per cui $u'(x)$ valga a tratti $+1$ e -1 realizza il minimo, ovvero 0. E' chiaro, inoltre, che una funzione del genere non è di classe $C^1([0,1])$. Inoltre se esistesse una funzione di classe $C^1([0,1])$ che realizza il minimo, allora dovrebbe essere $u'(x) = 1$ oppure $u'(x) = -1$ per ogni $x \in [a,b]$ che è chiaramente incompatibile con i dati al bordo.

In effetti in tal caso $F_{pp}(x,z,p) = 12p^2 - 4$ non è sempre strettamente maggiore di 0, e dunque l'incremento di regolarità notato in questa ipotesi non può essere ottenuto. Si noti che, non essendo $F(x,z,p)$ convessa nella terza variabile, non sono applicabili i risultati di esistenza come dimostrati in questo capitolo.

3. $C^1([a,b]) \to C^2([a,b])$. Per questo passaggio (si veda la proposizione 3.4.4) abbiamo usato come ipotesi che che $F_{pp}(x,z,p)$ fosse sempre invertibile. Se consideriamo, ad esempio, il problema

$$\int_{-1}^1 u^2(2x - u')^2 dx \tag{3.5.3}$$

da minimizzare in

$$\mathcal{C}^\star = \{u \in AC([-1,1]) \mid u(-1) = 0, u(1) = 1\} \tag{3.5.4}$$

Si nota che la funzione $h(x) = 0$ se $x \in [-1,0]$ e $h(x) = x^2$ se $x \in [0,1]$ risolve il problema di minimo, ma è solo $C^{1,1}([-1,1])$. In tal caso, infatti, $F_{pp}(x,z,p) = 2z^2$ può essere uguale a 0.

3.6 Unicità dei minimi

Tendenzialmente, mostrata in un modo o nell'altro l'esistenza di minimi al problema di Lagrange, l'unicità segue da argomenti di convessità. Notare che la formulazione che segue non ammette alcuna ipotesi di regolarità di F, se non ovviamente almeno il fatto che essa sia una funzione di Carathéodory su $(a, b) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ limitata dal basso (un'ipotesi sufficiente per dare un senso all'integrale $\int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx$ nella classe $\mathcal{C}$ definita in (1.0.2)).

Proposizione 3.6.1. *Supponiamo che esista una soluzione al problema fondamentale* (1.0.1) *nella classe* $\mathcal{C}$ *definita in* (1.0.2). *Ammesso che la lagrangiana* $F(x, z, p)$ *sia di Carathéodory e limitata dal basso, posto che per quasi ogni* $x \in (a, b)$ *la lagrangiana* $F(x, z, p)$ *sia convessa nella coppia* (z, p), *e ammesso che la convessità sia stretta rispetto ad almeno una delle due variabili, allora il minimo è unico.*

Dimostrazione. Siano u e v due minimi nella classe $\mathcal{C}$. Sia $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v) = m$. Allora

$$m \leq \mathcal{F}\left(\frac{u+v}{2}\right) = \int_a^b F\left(x, \frac{u+v}{2}, \frac{u'+v'}{2}\right) dx \leq \tag{3.6.1}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_a^b F(x, u, u')dx + \frac{1}{2}\int_a^b F(x, v, v')dx = m \tag{3.6.2}$$

dove la prima disuguaglianza è vera poiché anche $\frac{u+v}{2} \in \mathcal{C}$ ed m è il minimo in tale classe; e l'ultima è vera per convessità. Dunque vale

$$\int_a^b \left(F\left(x, \frac{u+v}{2}, \frac{u'+v'}{2}\right) - \frac{1}{2}F(x, u, u') - \frac{1}{2}F(x, v, v')\right) dx = 0 \tag{3.6.3}$$

Essendo, però, l'integrando sempre minore o uguale a zero per convessità, per fare 0 deve essere che quasi ovunque in (a, b) valga

$$\left(F\left(x, \frac{u+v}{2}, \frac{u'+v'}{2}\right) - \frac{1}{2}F(x, u, u') - \frac{1}{2}F(x, v, v')\right) = 0. \tag{3.6.4}$$

Ma se vale la stretta convessità rispetto alla variabile z, allora $u = v$ quasi ovunque e quindi per continuità ovunque. Altrimenti se vale la stretta convessità rispetto alla variabile p, allora $u' = v'$ quasi ovunque e quindi $u - v = c$ quasi ovunque per una certa c costante reale e dunque $u - v = c$ ovunque per continuità. Allora $c = 0$ poiché u e v appartengono a $\mathcal{C}$ e ancora una volta abbiamo ottenuto ciò che volevamo.

E' appena il caso di notare che la convessità gioca un ruolo fondamentale anche nell'esistenza dei minimi tramite il cosiddetto metodo indiretto: per fare un esempio, si consideri quanto detto nella nota 1.5.8. Abbiamo, fra l'altro, citato il fatto che se una lagrangiana di classe $C^1([a,b]\times\mathbb{R})$ è della forma $F(x,p)$ allora un qualsiasi minimo locale debole nella classe $\mathcal{C}$ deve soddisfare l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale (1.5.6), che in questo caso degenera a

$$F_p(x,u'(x)) = c \quad \text{quasi ovunque per} \quad x\in(a,b) \tag{3.6.5}$$

per una certa costante c. Un'eventuale ipotesi di convessità in p mostra che vale anche il viceversa: se per una certa $u\in\mathcal{C}$ valesse (3.6.5), allora tale $u(x)$ sarebbe un minimo per il solito funzionale $\mathcal{F}(u)$ nella classe $\mathcal{C}$. In più sarebbe l'unico minimo se $F(x,p)$ fosse strettamente convessa in p. Questo perché preso qualsiasi altro competitore $v(x)\in\mathcal{C}$ si ha quasi ovunque in (a,b) che

$$F(x,v'(x)) - F(x,u'(x)) \geq (v'(x)-u'(x))F_p(x,u'(x)) \geq (v'(x)-u'(x))c \tag{3.6.6}$$

e dunque integrando $\mathcal{F}(v)-\mathcal{F}(u)\geq 0$ e la disuguaglianza è stretta se la convessità è stretta e $v\neq u$.

L'importanza di quest'ultimo esempio è la seguente: nel caso di lagrangiane $F(x,p)$ di classe $C^1([a,b]\times\mathbb{R})$ con ipotesi di convessità in p, effettivamente il problema di minimo è equivalente alla risoluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange integrale $F_p(x,u') = c$ per qualche costante c. In generale ci si può chiedere sotto quali ipotesi di regolarità sulla lagrangiana e sulla funzione quest'equivalenza continua a valere e, ovviamente, la risposta varia a seconda della struttura della lagrangiana.

Nei casi in cui si abbiano, però, buone ipotesi di crescita sulla lagrangiana $F(x,z,p)$ e sulle derivate $F_z(x,z,p)$, $F_p(x,z,p)$ e inoltre ipotesi di convessità nella coppia (z,p), l'equivalenza vale. Senza scendere troppo nei dettagli, ancora una volta si faccia riferimento a [12, pagg.111-112,pag.125].

$\square$

CAPITOLO 4

Teorema di Tonelli e fenomeno di Lavrentiev

4.1 Teorema di regolarità parziale di Tonelli

Un risultato molto interessante e sorprendente riguarda la regolarità dei minimi del problema fondamentale del calcolo delle variazioni (1.0.1) nella classe $\mathcal{C}$ (1.0.2). Il risultato che enunciamo e dimostriamo era conosciuto già da Tonelli, ma la dimostrazione proposta ricalca quella di Ball e Mizel [8, pagg.334-337]. Il problema viene posto nel contesto unidimensionale con una dimensione in arrivo, come nell'articolo (i.e. con lagrangiane definite su $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Un risultato di regolarità con N dimensioni in arrivo è conosciuto e l'enunciato e la dimostrazione per lagrangiane *non smooth* sono dovuti a Clarke e Vinter [11, pag.76].

Teorema 4.1.1 (Teorema di regolarità Parziale di Tonelli)**.** *Sia $F(x,z,p)$ una lagrangiana di classe $C^\infty([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tale che $F_{pp}(x,z,p) > 0$ ovunque e si supponga che $u \in AC([a,b])$ sia un minimo locale forte (1.5.1) del funzionale $\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x,u(x),u'(x))dx$ nella classe $\mathcal{C}$ (1.0.2). Allora $u(x)$ ha derivata (in senso classico) definita ovunque a valori possibilmente infiniti $[u'(x)] : [a,b] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. In più l'insieme*

$$E := \{x \in [a,b] : [u'(x)] = \pm\infty\} \tag{4.1.1}$$

è un chiuso di misura nulla e $u(x) \in C^\infty([a,b] \setminus E)$. Infine, in qualsiasi intervallo di $[a,b] \setminus E$ vale l'equazione di Eulero-Lagrange in qualsiasi forma: (1.5.7), (1.5.8) e (1.5.11).

Dimostrazione. La dimostrazione sarà divisa in tre parti. Nella prima viene mostrato un lemma secondo cui assegnata una limitazione sul dato iniziale, sulla pendenza e sull'altezza del rettangolo nel quale può stare la funzione, allora è possibile trovare una quantità $\epsilon > 0$ tale per cui in ogni intervallino (x_0, x_1) di ampiezza minore ϵ in $[a,b]$ è possibile trovare una soluzione $\bar{u}(x)$ dell'equazione di Eulero-Lagrange (1.5.8) in modo tale che essa sia anche un minimo per il funzionale $\mathcal{F}(u)$, nelle funzioni in $\mathcal{C}$ il cui grafico è contenuto in un rettangolo la cui altezza è fissata a priori. Facendo uso di questa prima parte, nella seconda si mostra il risultato centrale: nei punti x_0 in cui i rapporti incrementali di $u(x)$ rimangono limitati in un intorno (in un senso che sarà esplicitato dopo), il minimo locale forte, in realtà, è di classe $C^2([a,b])$ (e quindi $C^\infty([a,b])$) in un opportuno intorno di x_0. Questo si farà sostituendo localmente il minimo con una soluzione di Eulero-Lagrange di classe C^2 e vedendo che il funzionale cala strettamente. Vale la pena di notare che nel caso in cui $x_0 \in (a,b)$ la regolarità si avrà in un intorno pieno di x_0, mentre se $x_0 \in \{a,b\}$ la regolarità si avrà solo in un intorno destro o sinistro.

Nell'ultima parte mostreremo la continuità di $[u'(x)]$ in tutti i punti di $[a,b]$.

Prima parte. Dimostriamo il seguente enunciato:

Lemma 4.1.2. *Siano m, ρ, M_1 tre costanti positive assegnate. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che valga la seguente proprietà:*

"Ogni volta che sono dati $(x_0, x_1) \subset [a,b]$ con $x_1 - x_0 < \epsilon$, u_0 e u_1 numeri reali tali che $|u_0| \leq m$ e $\left|\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0}\right| \leq M$, allora esiste un'unica soluzione $\bar{u} \in C^2([x_0,x_1])$ all'equazione di Eulero-Lagrange (1.5.8) con $\bar{u}(x_0) = u_0$, $\bar{u}(x_1) = u_1$ e $\sup_{x\in[x_0,x_1]} |\bar{u}(x) - u_0| < \rho$ tale che essa sia anche l'unico minimo per il funzionale $\mathcal{F}(u)$ nella classe delle funzioni u assolutamente continue su $[x_0,x_1]$ con $u(x_0) = u_0$, $u(x_1) = u_1$ e $\sup_{x\in[x_0,x_1]} |u(x) - u_0| < \rho$."

Dimostrazione. Sia $\sigma := m + \rho$ e sia $A := (a,b) \times (-\sigma, \sigma)$. Sia inoltre M una qualsiasi costante positiva e sia $A' := (a,b) \times [-\sigma - M, \sigma + M] \times [-M, M]$. La lagrangiana, essendo $C^\infty([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, ammette un'estensione $C^\infty((a-\nu, b+\nu) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Sia $A'_\nu := [a - \frac{\nu}{2}, b + \frac{\nu}{2}] \times [-\sigma - M, \sigma + M] \times [-M, M]$: applicando il teorema di esistenza di cui in [4, pag.157] (scegliendo $R_1 = A'_\nu$), opportunamente modificato, si ottiene l'esisteza di un $\epsilon > 0$ tale che l'equazione

$$-\frac{d}{dx}F_p(x,u,u') = F_z(x,u,u') \Rightarrow u''(x) = \frac{-u'F_{pz}(x,u,u') - F_{px}(x,u,u') + F_z(x,u,u')}{F_{pp}(x,u,u')} \tag{4.1.2}$$

ha una soluzione che esiste sempre almeno per $|x - x_0| < \epsilon$, qualsiasi sia il dato iniziale $x_0 \in (a,b)$ in cui si fissino le condizioni al bordo $(u(x_0), u'(x_0)) \in \times[-\sigma - M, \sigma + M] \times [-M, M]$.

Dunque, se $(x_0, u_0) \in A$, $|\alpha| \leq M$ e $|\beta| \leq M$, allora l'equazione (4.1.2) con condizioni al bordo $u(x_0) = u_0 + \alpha$ e $u'(x_0) = \beta$ ammette soluzione per tutti gli x tali che $|x - x_0| < \epsilon$, e in più la dipendenza dai dati iniziali è C^1, visto che la lagrangiana è di classe C^∞. La soluzione con i dati iniziali di cui sopra, verrà indicata come $u(x;\alpha,\beta)$: per cui $u(x_0;\alpha,\beta) = u_0 + \alpha$ e $u'(x_0;\alpha,\beta) = \beta$. Allora, raffinando quanto detto, si può eventualmente diminuire l'ϵ trovato precedentemente per ottenere che, fissato un $\delta > 0$ a priori, su tutti gli insiemi

$$S_{x_0} := \{(x,\alpha,\beta) : |x - x_0| < \epsilon, |\alpha| \leq M, |\beta| \leq M\} \tag{4.1.3}$$

con $x_0 \in (a,b)$ si abbia

$$|u'(x;\alpha,\beta)-\beta| < \delta; \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha}(x;\alpha,\beta) > 0; \quad \operatorname{sgn}\frac{\partial u}{\partial \beta}(x;\alpha,\beta) = \operatorname{sgn}(x-x_0). \tag{4.1.4}$$

A questo punto si scelgano $M > \max(M_1, 2\rho)$ e $\delta < M - M_1$. Allora si consideri l'ϵ che garantisce l'esistenza della soluzione $u(x;\alpha,\beta)$, definita come sopra, almeno per gli $|x-x_0| < \epsilon$, ogni volta che $(x_0,u_0) \in A$. In più lo si scelga dimodoché $\epsilon < \frac{\rho}{3M}$ e valgano le condizioni in (4.1.4) in ogni S_{x_0} definito in (4.1.3).

Dato $(x_0,x_1) \subset [a,b]$, con $x_1 - x_0 < \epsilon$, esiste la soluzione $\bar{u}$ dell'equazione di Eulero-Lagrange (4.1.2) con dato iniziale $\bar{u}(x_0) = u_0$ e in più essa è definita almeno fino a x_1 poiché $|u_0| \leq m$ e dunque $(x_0,u_0) \in (a,b) \times (-\sigma,\sigma) = A$. La condizione in (4.1.4), integrata fra x_0 e x, fornisce, per ogni $x \in (x_0,x_1]$ e $|\alpha| \leq M$, $|\beta| \leq M$ che

$$\begin{aligned} -\delta < u'(x;\alpha,\beta) - \beta < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow (-\delta+\beta)(x-x_0) + u_0 + \alpha < u(x;\alpha,\beta) < (\delta+\beta)(x-x_0) + u_0 + \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow |u(x;\alpha,\beta) - u_0 - \alpha - \beta(x-x_0)| < \delta(x-x_0). \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Valutando la (4.1.5) in $x = x_1, \alpha = 0, \beta = M$ si ottiene che

$$u(x_1;0,M) > u_0 + (M-\delta)(x_1-x_0) > u_1. \tag{4.1.6}$$

Quest'ultima disuguaglianza è vera dal momento che, per ipotesi, essendo $\left|\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0}\right| \leq M_1$ si ha che $u_1 \leq u_0 + M_1(x_1-x_0)$ e quindi

$$u_0 + (M-\delta)(x_1-x_0) = u_0 + M_1(x_1-x_0) + (M - M_1 - \delta)(x_1-x_0) > u_1 \tag{4.1.7}$$

dal momento che $M - M_1 - \delta > 0$ per come è stato scelto δ. Analogamente si ottiene $u(x_1;0,-M) < u_1$ usando la (4.1.5) e l'ipotesi. Allora

$$u(x_1;0,M) > u_1; \qquad u(x_1;0,-M) < u_1. \tag{4.1.8}$$

In virtù di come s'era scelto ϵ, vista la continuità dai dati iniziali, vale $\operatorname{sgn}\frac{\partial u}{\partial \beta} = \operatorname{sgn}(x-x_0)$ e dunque $\frac{\partial u}{\partial \beta}(x_1;0,\beta) > 0$, da cui si deduce, in virtù della (4.1.8), l'esistenza di un unico β_0 tale che $u(x_1;0,\beta_0) = u_1$. Allora si definisca

$$\bar{u}(x) = u(x;0,\beta_0). \tag{4.1.9}$$

A questo punto valutando la (4.1.5) in $x = x_1, \alpha = 0, \beta = \beta_0$ si ottiene

$$|u_1 - u_0 - \beta_0(x_1-x_0)| < \delta(x_1-x_0) \tag{4.1.10}$$

e quindi usando l'ipotesi $\left|\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0}\right| \leq M_1$ dalla (4.1.10) si ricava $|\beta_0| < \delta + M_1$. Ancora valutando la (4.1.5) in $x \in (x_0,x_1]$, $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$ e applicando la disuguaglianza triangolare

$$|\bar{u}(x) - u_0| \leq |\bar{u}(x) - u_0 - \beta_0(x-x_0)| + |\beta_0(x-x_0)| < (\delta + |\beta_0|)(x-x_0) < \rho \tag{4.1.11}$$

poiché $(\delta+|\beta_0|)(x-x_0) < (2\delta+M_1)\epsilon < 3M\epsilon < \rho$ per come sono state scelte le costanti. Dunque $\bar{u}(x)$ soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange con i dati al bordo richiesti e la limitazione $\sup_{x\in[x_0,x_1]}|\bar{u}(x)-u_0| < \rho$ di cui nelle ipotesi. Per vedere che è l'unica si supponga per assurdo che esista una certa $v(x)$ non coincidente con $\bar{u}(x)$ su $[x_0,x_1]$, soluzione di (4.1.2), tale che $v(x_0)=u_0$, $v(x_1)=u_1$ e in più $\sup_{x\in[x_0,x_1]}|v(x)-u_0| < \rho$. Allora per il teorema di Lagrange esiste un certo $\bar{x}\in[x_0,x_1]$ tale che $v'(\bar{x}) = \frac{u_1-u_0}{x_1-x_0}$. Si noti che $(\bar{x}, v(\bar{x}))\in A$ poichè $|v(\bar{x})| \le |v(x_0)| + |v(\bar{x})-v(x_0)| < |u_0|+\rho < m+\rho$. Allora in $S_{\bar{x}}$ vale la (4.1.4). Siccome $|v'(\bar{x})|\le M$, scegliendo $\alpha=0$, $\beta=v'(\bar{x})$ in (4.1.4), risulta che per $x\in[x_0,x_1]$ vale

$$\left|v'(x)-\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0}\right| < \delta \tag{4.1.12}$$

da cui $|v'(x_0)| < \delta+M_1 < M$ per la disuguaglianza triangolare congiuntamente alla (4.1.12), e per come è stato scelto δ. Ma dal momento che $u(x;0,v'(x_0)) = v(x)$, si ha che $u(x_1;0,v'(x_0)) = v(x_1) = u_1$ e d'altra parte $|v'(x_0)| < M$. Dunque, per l'unicità di β_0, deve essere necessariamente $\beta_0 = v'(x_0)$ e allora $v(x) = u(x;0,\beta_0) = \bar{u}(x)$ da cui l'assurdo.

Per concludere l'ultima parte del lemma si consideri la famiglia di soluzioni, indicizzata da α, $\{u(\cdot,\alpha,\beta_0) : |\alpha|\le M\}$ su $[x_0,x_1]$. Allora, siccome s'era mostrato che $|\beta_0| < \delta+M_1$, semplicemente applicando la (4.1.5) con $\alpha=\pm M$, si ottiene che, per ogni $x\in(x_0,x_1]$ (ricordando che $M>2\rho$, $\delta < M-M_1$ e $3M\epsilon<\rho$)

$$u(x;M,\beta_0)-u_0 > M+(\beta_0-\delta)(x-x_0) > M-(2\delta+M_1)\epsilon > \rho \tag{4.1.13}$$

$$u(x;-M,\beta_0)-u_0 < -M+(\beta_0+\delta)(x-x_0) < -M+(2\delta+M_1)\epsilon < \rho. \tag{4.1.14}$$

Nel caso in cui $x=x_0$ la stima risulta evidente.

Dunque la famiglia $u(\cdot;\alpha,\beta_0)$ ricopre la regione $G := [x_0,x_1]\times[u_0-\rho, u_0+\rho]$ e in tale famiglia è immersa la $\bar{u}(x) = u(x;0,\beta_0)$. Allora per la proposizione 2.3.3, avendo la condizione $F_{pp}(x,z,p) > 0$, se ne deduce immediatamente che $\mathcal{F}(u) > \mathcal{F}(\bar{u})$ per ogni $u(x)$ assolutamente continua in $[x_0,x_1]$, con $u(x_0)=u_0$, $u(x_1)=u_1$ e $\{(x,u(x)) : x\in[x_0,x_1]\}\in G$ e quindi, in particolare, per tutte le u con dati al bordo fissi e $\sup_{x\in[x_0,x_1]}|u(x)-u_0| < \rho$, per come è fatto G.

□

Seconda parte. Adesso mostriamo il risultato di regolarità. Sia dato $u(x)$ un minimo locale forte (1.5.1) per il problema fondamentale nella classe delle funzioni assolutamente continue con dati al bordo fissi: dunque esiste un certo δ tale che se $v\in\mathcal{C}$ e $\sup_{x\in[a,b]}|u(x)-v(x)|\le\delta$, allora $\mathcal{F}(u)\le\mathcal{F}(v)$. Sia $\bar{x}$ un punto in cui vale la seguente:

$$M(\bar{x}) := \liminf_{x\to\bar{x}, x\in[a,b]}\left|\frac{u(x)-u(\bar{x})}{x-\bar{x}}\right| < +\infty. \tag{4.1.15}$$

Si supponga per il momento che $\bar{x}\notin\{a,b\}$. Allora per continuità esiste un $b > \bar{x}_1 > \bar{x}$ tale che $\sup_{x\in[\bar{x},\bar{x}_1]}|u(x)-u(\bar{x})| < \frac{\delta}{2}$. Applichiamo il lemma precedente, 4.1.2, con $\rho = \frac{\delta}{2}$,

$M = M(\bar{x}) + 1$ e $m = u(\bar{x})$. Dato l'ϵ la cui esistenza è garantita dal lemma, si scelga $\bar{x}_1 > x_1 > \bar{x}$ tale che $x_1 - \bar{x} < \epsilon$ e in più $\left|\frac{u(x_1)-u(\bar{x})}{x_1-\bar{x}}\right| < M(\bar{x})$ (si può fare vista la 4.1.15). Allora scelto $(\bar{x}, x_1) \subset [a,b]$ e $u_0 = u(\bar{x})$, $u_1 = u(x_1)$, le ipotesi del lemma sono soddisfatte e dunque esiste una certa $\bar{u}(x)$ con $\bar{u}(\bar{x}) = u(\bar{x})$, $\bar{u}(x_1) = u(x_1)$ tale che $\sup_{x\in[\bar{x},x_1]} |\bar{u}(x) - u(\bar{x})| < \frac{\delta}{2}$ e in più $\bar{u}(x) \in C^2([\bar{x}, x_1])$ è l'unica soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange (4.1.2), in $[x_0, x_1]$, con dati al bordo fissi e distanza uniforme da u_0 limitata da $\frac{\delta}{2}$. In più, $\bar{u}(x)$ è l'unica soluzione al problema di minimo nella classe delle funzioni assolutamente continue con estremi fissi e distanza uniforme da u_0 limitata da $\frac{\delta}{2}$.

E' semplice notare che, per ogni $x \in [\bar{x}, x_1]$, si ha $|\bar{u}(x) - u(x)| \leq |\bar{u}(x) - u(\bar{x})| + |u(\bar{x}) - u(x)| < \delta$ per come era stato scelto l'intervallo $[\bar{x}, \bar{x}_1]$ e la ρ del lemma 4.1.2. Allora definendo $\hat{u}(x)$ identicamente uguale a $\bar{u}(x)$ su $[\bar{x}, x_1]$ e identicamente uguale a $u(x)$ in $[a,b] \setminus [\bar{x}, x_1]$ si deduce, in virtù di quanto osservato prima, che $\sup_{x\in[a,b]} |\hat{u}(x) - u(x)| < \delta$. Essendo $\hat{u}(x)$ chiaramente ancora un elemento di $\mathcal{C}$, si deduce che $\mathcal{F}(\hat{u}) \geq \mathcal{F}(u)$ poiché $u(x)$ era un minimo locale forte. Per come è fatta $\hat{u}$, risulta allora $\mathcal{F}_{[\bar{x},x_1]}(\bar{u}) \geq \mathcal{F}_{[\bar{x},x_1]}(u)$. D'altra parte u ha gli stessi dati al bordo di $\bar{u}$ in $[\bar{x}, x_1]$ e in più $\sup_{x\in[\bar{x},x_1]} |u(x) - u(\bar{x})| < \frac{\delta}{2}$: allora dovendo essere $\bar{u}$ l'unico minimo stretto in virtù del lemma 4.1.2, si ha che su $[\bar{x}, x_1]$ vale $u \equiv \bar{u}$ e dunque $u \in C^2([\bar{x}, x_1])$.

Con lievissime modifiche, siccome $\bar{x} \notin \{a, b\}$, il discorso può essere ripetuto in un intorno sinstro di $\bar{x}$. Dunque esiste un $a < x_2 < \bar{x}$ tale che $u \in C^2([x_2, \bar{x}])$ e quindi $u \in C^2([x_2, x_1])$ e in effetti in tal caso la regolarità si ottiene in un intorno pieno di $\bar{x}$. Con lo stesso argomento, si mostra che se $\bar{x} \in \{a, b\}$ la regolarità è ottenuta rispettivamente in un intorno destro o sinistro del punto.

Dunque, ad esempio poiché vale la proposizione 3.4.4, per ogni $\bar{x}$ per cui vale $M(\bar{x}) < +\infty$ esiste un intorno in cui il minimo è di classe C^∞. Dunque, poiché una funzione assolutamente continua è derivabile quasi ovunque, esiste un insieme complementare di un trascurabile (ovvero $\Omega_0 := \{x \in [a,b] : M(x) < +\infty\}$) che è aperto e su cui la funzione è di classe C^∞.

Terza parte. Mostriamo, adesso, che la derivata in senso classo $[u'(x)]$ esiste ovunque a valori eventualmente infiniti e per di più è continua. Si potrà allora concludere la dimostrazione del teorema come enunciato. La continuità nei punti di Ω_0 discende da quanto detto prima, quindi non rimane che verificare la continuità nei punti $x_0 \in [a,b] \setminus \Omega_0$. La dimostrazione è svolta nel caso $x_0 \in (a,b) \setminus \Omega_0$, e nel caso in cui $x_0 \in \{a, b\}$ è del tutto analoga (basta lavorare in un intorno destro in a, o sinistro in b).

Dal momento che $x_0 \in (a,b) \setminus \Omega_0$, dove Ω_0 è definito alla fine della *Seconda parte*, si ha che esiste una successione $y_j \to x_0$ tale che

$$\left|\frac{u(y_j) - u(x_0)}{y_j - x_0}\right| \to +\infty. \tag{4.1.16}$$

Possiamo assumere senza perdita di generalità di passare a una sottosuccessione e lavorare nel caso in cui esiste una successione di numeri $y_j \to x_0$ con $y_j < x_0$ tali che (i casi da trattare, per simmetria, sarebbero altri tre, a seconda del segno di ∞ e a seconda che si stia in un intervallo destro o sinistro: tutti sono del tutto analoghi a quello che segue)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u(x_0) - u(y_j)}{x_0 - y_j} = +\infty. \tag{4.1.17}$$

L'esistenza della derivata in senso classico in x_0, il fatto che valga $+\infty$ e la continuità desiderata seguono una volta mostrato che, preso x_0 come prima, ogni volta che $x_j \to x_0$, $z_j \to x_0$ e $x_j \geq z_j$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u(x_j) - u(z_j)}{x_j - z_j} = +\infty. \tag{4.1.18}$$

Infatti l'esistenza è chiara (prendendo $x_j \equiv x_0$ e $z_j \equiv x_0$ si avrebbe che esistono derivata sinistra e destra e sono entrambe $+\infty$). Se non fosse vera la continuità, esisterebbe una successione $t_j \to x_0$ con $u'(t_j)$ limitata dall'alto e dunque esisterebbe per ogni t_j un certo $s_j > t_j$, vicino a t_j, tale che $\frac{u(s_j)-u(t_j)}{s_j-t_j}$ è limitato dall'alto. Dal momento che $t_j \to x_0$ e si può scegliere s_j in modo che $s_j \to x_0$, in virtù della proprietà in (4.1.18) si avrebbe che $\frac{u(s_j)-u(t_j)}{s_j-t_j} \to +\infty$, che è in contraddizione col fatto che sia limitato dall'alto. Allora, una volta vera la (4.1.18), la tesi è mostrata.

Mostriamo allora la (4.1.18). Siano M e δ costanti positive con $M-\delta > 0$. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che vale quanto enunciato nella *Prima parte* applicato a $(x_0, u(x_0))$: ovvero la soluzione $u(x;\alpha,\beta)$ dell'equazione (4.1.2) con dati al bordo $u(x_0;\alpha,\beta) = u(x_0) + \alpha$ e $u'(x_0;\alpha,\beta) = \beta$ esiste almeno per gli $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq [a,b]$ e per tutti gli α e β con $|\alpha| \leq M$ e $|\beta| \leq M$. Inoltre sull'insieme S_{x_0} di cui in (4.1.3) valgono le limitazioni di cui in (4.1.4) e dunque (4.1.5). Date queste ultime, in particolare la seconda di (4.1.5), si ha che $u(x;M,M) > u(x_0) + M + (M-\delta)(x-x_0) \geq u(x_0) + M$ e $u(x;-M,M) < u(x_0) - M + (M+\delta)(x-x_0)$ per tutti gli $x \in [x_0, x_0+\epsilon)$. Siccome facilmente la seconda di (4.1.5) vale con i segni scambiati se $x \in (x_0-\epsilon, x_0)$, si ha che in $(x_0-\epsilon, x_0)$ vale $u(x;M,M) > u(x_0) + M - (M+\delta)(x_0-x)$ e $u(x;-M,M) < u(x_0) - M - (M-\delta)(x_0-x) < u(x_0) - M$.

Scegliendo $\epsilon > 0$ piccolo a sufficienza, e dunque supponendo di lavorare in un intervallo sufficientemente piccolo di x_0 contenuto in $[a,b]$, si può ottenere, viste le stime precedenti, che per ogni $x \in (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ vale $u(x;-M,M) < u(x_0) - \frac{M}{2}$, $u(x;M,M) > u(x_0) + \frac{M}{2}$ e $\sup_{\{x:|x-x_0|<\epsilon\}} |u(x) - u(x_0)| < \frac{M}{4}$ per continuità di u. In tal modo, visto le stime, la famiglia di soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange $\{u(\cdot;\alpha,M) \mid |\alpha| \leq M\}$ sicuramente ricopre una zona in cui è contenuto il grafico di $u(x)$ ed essendo $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$ (4.1.4) allora per ogni x con $|x-x_0| < \epsilon$ esiste un unico numero, che chiameremo $\alpha(x)$, tale che

$$u(x) = u(x;\alpha(x),M). \tag{4.1.19}$$

Si noti che, per come è stata definita $\alpha(x)$, essa è una funzione continua in $I_\epsilon := (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$. Mostriamo che $\alpha(x)$ è monotona in un opportuno intorno di x_0 contenuto in I_ϵ. Se così non fosse, infatti, avremmo che esistono tre sequenze di numeri $a_j < b_j < c_j$ che tendono tutte e tre a x_0 ma tali per cui $\alpha(a_j) = \alpha(c_j) \neq \alpha(b_j)$. Si consideri

$v_j(x) := u(x;\alpha(a_j), M)$ nell'intervallo $[a_j, c_j]$. Si ha che $v_j(a_j) = u(a_j)$ e $v_j(c_j) = u(c_j)$. D'altra parte $v_j(b_j) = u(b_j;\alpha(a_j), M) \neq u(b_j)$, altrimenti $\alpha(a_j) = \alpha(b_j)$.

Inoltre, α è una funzione continua e dunque $\alpha(a_j) \to \alpha(x_0) = 0$ e vale ovviamente $u(x) \equiv u(x; 0, M)$. Usando ancora una volta le stime (4.1.4), e il fatto che $\alpha(a_j) \to 0$ si ha facilmente che, fissato qualunque $\delta_1 > 0$, definitivamente in j vale

$$\sup_{x\in[a_j,c_j]} |u(x) - v_j(x)| \leq \delta_1 \tag{4.1.20}$$

e scegliendo δ_1 quello assicurato dal fatto che $u(x)$ è un minimo locale forte (è il δ della *Seconda parte*), si ha agevolmente un assurdo: infatti sostituendo $u(x)$ con $v_j(x)$ nell'intervallo $[a_j, c_j]$, si avrebbe

$$\int_{a_j}^{c_j} F(x, u, u')dx > \int_{a_j}^{c_j} F(x, v_j, v_j')dx \tag{4.1.21}$$

dal momento che $v_j(x)$ è immersa in un campo di estremali e $u(x)$ ha i suoi stessi dati al bordo e $F_{pp} > 0$ (vale cioè la seconda parte della proposizione 2.3.3). D'altra parte $v_j(b_j) \neq u(b_j)$ e dunque la v_j e la u non coincidono: ne seguirebbe che la u non potrebbe essere un minimo locale forte come s'era supposto, e dunque un assurdo.

Dunque deve essere che $\alpha(x)$ è monotona in un certo intorno di x_0 contenuto in I_ϵ. Mostriamo che è monotona non decrescente. Se per assurdo fosse monotona non crescente in un certo intorno sinistro di x_0 contenuto in I_ϵ, in tale intorno si dovrebbe avere $\alpha(x) \geq 0$, dal momento che $\alpha(x_0) = 0$.

Integrando la (4.1.5) fra x in un tale intorno sinistro e x_0 si ottiene

$$(\beta - \delta)(x_0 - x) < u(x_0; \alpha, \beta) - u(x; \alpha, \beta) < (\beta + \delta)(x_0 - x) \tag{4.1.22}$$

e valutando in $\beta = M$, $\alpha = \alpha(y_j)$ e $x = y_j$ si ottiene, considerando solo la seconda disuguaglianza,

$$u(x_0) + \alpha(y_j) - u(y_j) < (M + \delta)(x_0 - y_j) \tag{4.1.23}$$

e dividendo

$$\frac{\alpha(y_j)}{x_0 - y_j} < \delta + M - \frac{u(x_0) - u(y_j)}{x_0 - y_j}. \tag{4.1.24}$$

Dal momento che vale (4.1.17), essendo δ e M fissati, definitivamente deve aversi $\alpha(y_j) < 0$ e dunque non potrebbe essere $\alpha(x) \geq 0$ in un certo intorno sinistro di x_0. Dunque $\alpha(x)$ è inevitabilmente monotona non decrescente.

Per conludere la dimostrazione, siano allora x_j e z_j come in (4.1.18). Per come è stata definita $\alpha(x)$, per la monotonia e poiché $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$ in S_{x_0} (4.1.3), si ha che definitivamente in j vale

$$\frac{u(x_j) - u(z_j)}{x_j - z_j} = \frac{u(x_j;\alpha(x_j), M) - u(z_j;\alpha(z_j), M)}{x_j - z_j} \geq \frac{u(x_j;\alpha(z_j), M) - u(z_j;\alpha(z_j), M)}{x_j - z_j}. \tag{4.1.25}$$

Per Lagrange applicato a $u(\cdot;\alpha(z_j),M)$ esiste w_j tale che $\frac{u(x_j;\alpha(z_j),M)-u(z_j;\alpha(z_j),M)}{x_j-z_j} = u'(w_j;\alpha(z_j),M)$. In virtù della (4.1.4) vale $u'(w_j;\alpha(z_j),M) > M-\delta$. Dunque per la (4.1.25)

$$\frac{u(x_j)-u(z_j)}{x_j-z_j} > M-\delta. \tag{4.1.26}$$

Vista l'arbitrarietà di $M-\delta$, e visto che definitivamente vale la (4.1.26), vale infine la (4.1.18) che ci eravamo proposti di mostrare, e dunque la dimostrazione è conclusa. □

E' notevole che, nel caso in cui $F_x(x,u(x),u'(x))$ o $F_z(x,u(x),u'(x))$ appartengano a $L^1((a,b))$, nel caso la lagrangiana fosse a crescita superlineare nella derivata, allora immediatamente se ne deduce che $E=\emptyset$. Questo risultato, avendo il teorema di regolarità parziale 4.1.1, diventa molto semplice: si tratta di vedere che in un intervallo massimale di $[a,b]\setminus E$, $u'(x)$ deve rimanere limitata (usando il fatto che soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange (1.5.7) o di Du Boys-Reymond 1.5.8). Per una dimostrazione si può leggere [5, pagg.337-339].

4.2 Fenomeno di Lavrentiev

In questa sezione mostreremo che, in effetti, scegliendo adeguatamente la lagrangiana, è possibile che il problema di minimo (1.0.1) abbia soluzione nella classe delle funzioni assolutamente continue con dati al bordo fissi ($\mathcal{C}$), ma che ci sia un *gap* fra l'inf raggiunto nella classe $\mathcal{C}\cap C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ e l'inf raggiunto nella classe $\mathcal{C}$. Storicamente fu Lavrentiev ad accorgersi di questo fenomeno, da cui appunto il nome di *fenomeno di Lavrentiev*. Uno dei primi controesempi fu fornito da Manià, scegliendo la lagrangiana $F(x,z,p)=(z^3-x)^2p^6$ (vedi A) e risolvendo il corrispondente problema di minimo fra le funzioni $u\in AC([0,1])$ con $u(0)=0$, $u(0)=1$. In questa sezione dimostriamo che è possibile costruire la lagrangiana in maniera tale che, non solo si presenti il fenomeno di Lavrentiev, ma valga anche che, fissato un certo E chiuso di misura nulla in $[a,b]$, un punto di minimo del problema (1.0.1), scegliendo opportunamente il funzionale $\mathcal{F}(u)$, ha come singolarità esattamente i punti di E. Ciò dimostra anche che il risultato della sezione precedente, il teorema di regolarità parziale di Tonelli 4.1.1, è in un certo senso ottimale. La dimostrazione segue quella dell'articolo di Davie in bibliografia. [13]

Proposizione 4.2.1 (Davie, 1988)**.** *Sia*

$$\mathcal{C}(0,1) := \{u\in AC([a,b]) : u(a)=0, u(b)=1\}. \tag{4.2.1}$$

Dato E un sottoinsieme chiuso di $[a,b]$ esistono tre funzioni $v\in\mathcal{C}(0,1)$, $\phi,\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che $\psi\geq 0$, $\psi''\geq 0$ e $\phi\circ v\in C^\infty([0,1])$ ed esiste un numero ϵ tale che il problema di minimo riferito alla lagrangiana

$$F(x,z,p) := (\phi(z)-\phi(v(x)))^2\psi(p)+\epsilon p^2 \tag{4.2.2}$$

nella clase $\mathcal{C}(0,1)$ *ha soluzione. In più ogni soluzione di tale problema di minimo ammette singolarità esattamente su* E *e vale il* fenomendo di Lavrentiev*, i.e.*

$$\min_{\mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F} < \inf_{\mathcal{C}(0,1)\cap C^1([0,1])} \mathcal{F}. \tag{4.2.3}$$

Dimostrazione. Considerazioni Eurisitiche. Essendo la dimostrazione parecchio tecnica, cerchiamo di dare qualche considerazione euristica sulla struttura del funzionale. Noi vorremmo un funzionale il cui minimo abbia singolarità esattamente su E. Un'idea per fare ciò è la seguente: cercare una lagrangianza $F(x,z,p)$ (per avere l'ottimalità del teorema di regolarità parziale 4.1.1 bisognerà costruirla di classe C^∞) tale che il funzionale $\mathcal{F}$ è "piccolo" su una certa funzione $v \in \mathcal{C}(0,1)$, mentre su tutte le funzioni $u \in \mathcal{C}(0,1)$ tali che per almeno un punto $t \in E$ si abbia $u'(t)$ finito, è più grande di una certa quantità fissata. In questo modo avremmo che le singolarità di un qualunque minimo sono *almeno* su E: si vedrà che, effettivamente, la struttura del funzionale garantisce che siano *esattamente* su E.

Un primo tentativo potrebbe essere il seguente: scegliere una $v \in \mathcal{C}(0,1)$ con $v' \in L^m((0,1))$, $m > 1$ e prendere come funzionale $F(x,z,p) = (z - v(x))^2 + \epsilon p^m$. Si vede che prendendo ϵ piccolo, si può rendere $\mathcal{F}(v)$ piccolo a piacere. Scegliendo, ad esempio, $m = 2$, si nota che sono soddisfatte le ipotesi di crescita superlineare e di convessita del teorema di esistenza 3.3.1, per cui il funzionale $\mathcal{F}$ ammette minimo, diciamo in u. Una delle prime difficoltà tecniche è, in effetti, far vedere che la lagrangiana $F(x,z,p)$ si può scegliere di classe C^∞: per non alterare le considerazioni fatte fino ad ora si potrebbe far vedere che, in effetti, è possibile scegliere ϕ di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ tale che anche $\phi \circ v \in C^\infty(\mathbb{R})$ e scegliere come lagrangiana $F(x,z,p) = (\phi(z) - \phi(v(x)))^2 + \epsilon p^2$. Si noti che le considerazioni precedenti non sono alterate se si moltiplica il primo quadrato per una funzione $\psi(p) \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $\psi(p) \geq 0$ (per preservare la crescita superlineare) e $\psi''(p) \geq 0$ (per preservare la convessità).

La parte più complessa è adesso la seguente: scegliere le funzioni v, ϕ e ψ tali che per ogni $u \in \mathcal{C}(0,1)$ con almeno un valore $u'(t)$ finito con $t \in E$, si abbia

$$\int_0^1 (\phi(u(x)) - \phi(v(x)))^2 \psi(u'(x)) dx \geq k \tag{4.2.4}$$

con $k > 0$ fissato in partenza. Lo scopo delle complicate costruzioni seguenti è proprio questo.

Prima parte. Costruiamo $v(x)$. E' noto che la funzione distanza da un chiuso $d(x,E) = \inf_{y\in E} |x - y|$ è una funzione continua che vale 0 se e solo se x appartiene ad E. Allora, scegliendo opprtuni $a_k \downarrow 0$, gli aperti della forma $U_k := \{x \mid d(x,E) < a_k\}$ soddisfano

$$\cap_{k=1}^{+\infty} U_k = E; \quad \overline{U_{k+1}} \subseteq U_k; \quad \cup_{k=1}^{+\infty} U_k \supseteq [a,b]; \quad \text{definitivamente} \quad \lambda(U_k) < 2^{-k} \tag{4.2.5}$$

Adesso, è possibile scegliere delle g_k che siano $C^\infty(\mathbb{R})$, a valori in $[0,1]$, tali che $g_k(x) = 1$ su $\overline{U_{k+1}}$ e $g_k(x) = 0$ su $\mathbb{R} \setminus U_k$ (Si veda ad esempio [1, pag.104]). Allora, definendo

$g(x) := 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ si nota che g vale $+\infty$ solo sui punti di E, cioè su un insieme di misura nulla. Inoltre $g(x)$ è chiaramente misurabile e positiva e vale che

$$\int_{U_k} g(x)^2 dx = \sum_{i=k}^{+\infty} \int_{U_i \setminus U_{i+1}} g(x)^2 dx. \tag{4.2.6}$$

Per come è stata costruita, $g(x)^2 \leq (1+i)^2$ su $U_i \setminus U_{i+1}$ e inoltre si ha che, essendo $\lambda(U_i \setminus U_{i+1}) \leq \lambda(U_i) < 2^{-i}$ definitivamente in i, vale $\int_{U_k} g(x)^2 dx \leq \sum_{i=k}^{+\infty} 2^{-i}(1+i)^2 < +\infty$ definitivamente in k, il che basta, in virtù della (4.2.6), per dire che g è in $L^2((a,b))$. Allora g è anche in $L^1((a,b))$ e sia $\alpha := \int_a^b g(x)dx$. Definiamo

$$v(t) = \alpha^{-1} \int_a^t g(x)dx. \tag{4.2.7}$$

Questa funzione così definita è sicuramente assolutamente continua, poiché g è $L^1((a,b))$ (si veda 1.2.5) e soddisfa $v(a) = 0$ e $v(b) = 1$. Inoltre per come è stata costruita, $g(x) \in C^\infty([a,b] \setminus E)$ (in effetti è localmente la somma di una costante e una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$), e allora, facendo delle semplici stime, ricapitolando, abbiamo queste proprieta per $v(x)$:

$$v \in \mathcal{C}(0,1); \quad v' \in L^2((a,b)); \quad v \in C^\infty([a,b] \setminus E) \tag{4.2.8}$$

$$v' \geq \alpha^{-1} \quad \text{in} \quad [a,b]; \quad v' \geq k\alpha^{-1} \quad \text{in} \quad U_{k+1}; \quad v(t) \in [0,1]; \quad t > t' \Rightarrow v(t) > v(t'). \tag{4.2.9}$$

Costruzione di $\phi(x)$. Sia $F = v(E)$. Dal momento che E è compatto, allora anche F lo è. Dunque $V := (0,1) \setminus F$ è un insieme aperto di cui esiste un esaustione in compatti. In questo caso (in generale su uno spazio metrico localmente compatto e secondo-numerabile) l'esaustione in compatti può essere fornita *quantitativamente*: essendo $K_n = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : d(x, \mathbb{R} \setminus V) < \frac{1}{n}\}$ si ha infatti che $K_n \subseteq K_{n+1}^o$ e $\cup_{n=1}^{+\infty} K_n = V$. Sempre per [1, pag.104], esistono delle $h_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ a valori in $[0,1]$ tali che $h_n = 1$ su K_n e $h_n = 0$ su $\mathbb{R} \setminus K_{n+1}^o$. Allora definendo $\phi_n(t) := \int_0^t h_n(x)dx$ in $[0,1]$, si ha sicuramente che $\phi_n \in C^\infty([0,1])$. Inoltre, in questa maniera, $\phi_n \circ v \in C^\infty([a,b])$: infatti, sicuramente $\phi_n \circ v \in C^\infty([a,b] \setminus E)$ perché composizione di funzioni di classe C^∞ in virtù delle proprietà di $v(x)$ di cui in (4.2.8). D'altra parte se $t \in E$, allora esiste un certo intorno $T_\epsilon := [t-\epsilon, t+\epsilon]$ di t in $[a,b]$, tale per cui $|v(t') - v(t)| < \frac{1}{n+1}$ per ogni $t' \in T_\epsilon$, semplicemente per continuità di $v(x)$ (se t dovesse essere un estremo di $[a,b]$ basta considerare un intorno destro o sinistro, a seconda dei casi). D'altra parte $v(t) \in F$ e per come sono stati costruiti i K_n si ha che per ogni $t' \in T_\epsilon$, $v(t') \notin K_{n+1}$ e quindi $v(t') \in \mathbb{R} \setminus K_{n+1}^o$. Dunque $h_n(x)$ è costantemente 0 in $[v(t-\epsilon), v(t+\epsilon)]$ (ha senso scrivere ciò per la stretta crescenza di $v(t)$ (4.2.9)), da cui $\phi_n(v(t))$ è costante in un certo intorno di t ogniqualvolta $t \in E$. Se ne deduce immediatamente che $\phi_n(v(t)) \in C^\infty([a,b])$.

Scegliendo $\delta_n > 0$ sufficientemente piccoli, ad esempio tali che per ogni $k = 0, \ldots, n$

$$\delta_n |D^k \phi_n(t)| \leq 2^{-n}; \quad \delta_n |D^k(\phi_n \circ v)(t)| \leq 2^{-n} \quad \forall t \in [a, b] \tag{4.2.10}$$

si ha che $\phi := \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \phi_n$ converge uniformemente, con tutte le sue derivate, su $[0, 1]$. Per come sono stati scelti i δ_n vale anche che $\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n(\phi_n \circ v)$ converge uniformemente con tutte le sue derivate su $[0, 1]$ e dunque non può che convergere a $\phi \circ v \in C^\infty([0, 1])$. Inoltre ϕ è strettamente crescente $[0, 1]$: infatti per come sono state definite le h_n sicuramente $\phi' = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n h_n \geq 0$ su $[0, 1]$ e dunque ϕ è crescente. Se per assurdo ϕ fosse solo debolmente crescente, allora su un certo intervallo $(x, y) \subseteq [0, 1]$ varrebbe $\phi' = 0$ e dunque $h_n = 0$ su tale intervallo per ogni n. Ma per come sono state scelte le h_n, ciò vorrebbe dire che $(x, y) \subseteq \cap_{k=1}^{+\infty}(\mathbb{R} \setminus K_{n+1}^o) = \mathbb{R} \setminus V$. D'altra parte $(\mathbb{R} \setminus V) \cap [0, 1] = F \cup \{0, 1\}$ che sicuramente non può contenere alcun intervallo poiché essendo $F = v(E)$ ed essendo E di misura nulla, F ha parte interna non vuota.

Costruzione di $\psi(x)$. Per ogni $t \in [0, 2\alpha]$ definiamo

$$\eta(t) := \inf \left\{ |\phi(x) - \phi(y)|^2 : x, y \in [0, 1], |x - y| \geq \frac{t}{2\alpha} \right\}. \tag{4.2.11}$$

La continuità e la stretta crescenza di ϕ in $[0, 1]$ producono immediatamente la continuità e la crescenza di $\eta(t)$ in $[0, 2\alpha]$. Chiaramente inoltre $\eta(0) = 0$ ed $\eta(t) > 0$ in $(0, 2\alpha]$. Per ogni k naturale si definisca, adesso, $d_k = \min_{x \in E} d(x, \mathbb{R} \setminus U_k)$ (il minimo esiste perché E è compatto) dove gli U_k sono stati definiti per la costruzione di ϕ. Sicuramente $d_k \neq 0$ e per come sono stati costruiti gli U_k, $d_k = a_k \downarrow 0$. Allora è possibile definire una funzione decrescente ρ sui d_k con $k \geq 3$ come

$$\rho(d_k) = \frac{(k-2)\alpha^{-1}}{8} \tag{4.2.12}$$

estenderla costantemente su $[d_3, +\infty)$ e raccordarla linearmente su $[d_k, d_{k+1}]$ per ogni $k \geq 3$. Visto che $d_k = a_k \downarrow 0$ allora $\rho(t)$ risulta essere definita su $(0, +\infty)$ e in più è decrescente e continua e ha limite $+\infty$ per $t \to 0^+$.

Se prendo $t \in [a, b] \setminus E$, siccome gli U_k ricoprono $[a, b]$ e $t \notin E$, l'insieme $\{s \in \mathbb{N} : t \in U_s\}$ è non vuoto e non è tutto $\mathbb{N}$. Poiché gli U_k sono una catena decrescente di insiemi, si vede che tale insieme deve avere massimo (altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{N}$) e dunque esiste s tale che $t \in U_s$ ma $t \notin U_{s+1}$. Siccome $t \notin U_{s+1}$, allora $d(t, E) \geq a_{s+1} = d_{s+1}$ per come erano definiti gli U_k e dunque per la decrescenza di ρ si ha che $\rho(d(t, E)) \leq \rho(d_{s+1}) = \frac{(s-1)\alpha^{-1}}{8}$. Per le proprietà di $v(x)$ di cui in 4.2.9, si ha che, siccome $t \in U_s$, $v'(t) \geq (s - 1)\alpha^{-1}$ e dunque si conclude che $v'(t) \geq 8\rho(d(t, E))$ per ogni $t \in [a, b] \setminus E$. (Si noti che le stime non sono esattamente queste se $s = 1$, ma si aggiustano in maniera molto simile ottenendo il medesimo risultato).

Dal momento che, per come è stata definita, ρ è invertibile su $(0, d_3]$ (con inversa ρ^{-1} di dominio in $[\frac{\alpha^{-1}}{8}, +\infty)$) definiamo a questo punto la funzione

$$h(t) := \frac{t}{\rho^{-1}(t)\eta(\rho^{-1}(t))} \tag{4.2.13}$$

che risulta essere positiva, crescente e continua su $[\frac{\alpha^{-1}}{8}, +\infty)$ (poiché sia ρ^{-1} che $\eta \circ \rho^{-1}$ sono decrescenti dal momento che ρ è decrescente e η è crescente). La si estenda ad una funzione positiva crescente e continua su $[0, +\infty)$ richiedendo inoltre $h = 0$ su un certo intorno $[0, \beta]$ di 0 con $\beta < \frac{\alpha^{-1}}{8}$. Si definisca dunque

$$\psi(t) := h(1) \left(\frac{t}{\beta}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} h(n+1) \left(\frac{t}{n}\right)^{k_n} \tag{4.2.14}$$

dove k_n sono interi pari scelti dimodoché il raggio di convergenza della serie di potenze sia infinito. Dunque $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi, \psi'' \geq 0$, e in più $\psi(t) \geq h(t)$ per ogni $t \geq 0$. (Infatti in $[n, n+1]$, con $n \geq 1$, $\psi(t) \geq h(n+1)$ per definizione di ψ e $h(n+1) \geq h(t)$ poiché h è crescente; in $[0, 1]$ è chiaro se $\beta \geq 1$, altrimenti in $[0, \beta]$ è ovvio e in $[\beta, 1]$ si ha $\psi(t) \geq h(1) \geq h(t)$).

Seconda parte. Questa seconda parte si basa su un risultato intermedio che enunciamo immediatamente:

Se $u \in \mathcal{C}(0, 1)$ e $u'(t_0)$ esiste ed è finita con $t_0 \in E$, allora

$$\mathcal{F}_{\prime}(u) := \int_a^b (\phi(u(x)) - \phi(v(x)))^2 \psi(u'(x)) dx \geq \frac{\alpha^{-1}}{8}. \tag{4.2.15}$$

Per come è stata definita $v(x)$, si nota che essa è derivabile in senso classico anche nei punti $t_0 \in E$, dove $v'(t_0) = +\infty$ (basta raffinare leggermente il calcolo fatto in (4.2.6)). Allora esistono due casi possibili

$$u(t_0) \leq v(t_0), \quad t_0 < b; \qquad u(t_0) \geq v(t_0), \quad t_0 > a \tag{4.2.16}$$

trattiamo il primo essendo il secondo, come si ha modo di notare ripercorrendo i passaggi, praticamente identico. Dal momento che $v'(t_0) = +\infty$ e $u'(t_0) < +\infty$, esiste un intorno $(t_0, r]$ in cui per ogni $t \in (t_0, r]$ si ha $\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} \leq \frac{v(t)-v(t_0)}{4(t-t_0)}$. Usando $u(t_0) \leq v(t_0)$ ne segue che $u(t) - v(t_0) \leq \frac{1}{4}(v(t) - v(t_0))$ per $t \in (t_0, r]$. Dal momento che $u(b) = v(b) = 1$, e $v(x)$ è strettamente crescente (4.2.9), in $x = b$ la funzione continua $u(x) - v(t_0) - \frac{1}{2}(v(x) - v(t_0))$ è strettamente maggiore di 0, mentre per la stima precedente in $x = r$ è strettamente minore di 0. Allora per continuità esiste un certo $b > s > r$ tale per cui

$$u(t) - v(t_0) < \frac{1}{2}(v(t) - v(t_0)) \quad \forall t \in [r, s); \quad u(s) - v(t_0) = \frac{1}{2}(v(s) - v(t_0)). \tag{4.2.17}$$

Allora per ogni $t \in [r, s]$, usando la (4.2.17), vale

$$v(t) - u(t) \geq \frac{1}{2}(v(t) - v(t_0)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v'(x) dx \geq \frac{t - t_0}{2\alpha} \tag{4.2.18}$$

poiché $v' \geq \alpha^{-1}$ su $[a, b]$ per le proprietà di cui in (4.2.9). Allora per la definizione di $\eta(t)$ (si veda la costruzione di $\psi(t)$), si ha che $(\phi(u(t)) - \phi(v(t)))^2 \geq \eta(t - t_0)$ per ogni $t \in [r, s]$.

Adesso il nostro obiettivo è stimare $u(s) - u(r)$ in due modi per ottenere una limitazione dal basso su $\mathcal{F}_{\prime}(u)$. Dal momento che $u(r) - v(t_0) \leq \frac{1}{4}(v(r) - v(t_0))$ e $u(s) - v(t_0) = \frac{1}{2}(v(s) - v(t_0))$ (4.2.17), considerando che $v(s) > v(r)$ poiché $v(x)$ è strettamente crescente (4.2.9),

$$u(s) - u(r) \geq \frac{1}{4}(v(s) - v(t_0)) = \frac{1}{4}\int_{t_0}^{s} v'(x)dx \geq 2\int_{0}^{s-t_0} \rho(d(x+t_0, E))dx \tag{4.2.19}$$

dove è stata usata la stima $v'(t) \geq 8\rho(d(t,E))$, che vale per ogni $t \in [a,b] \setminus E$ ottenuta durante la costruzione di $\psi(t)$. Si noti che $\rho(d(\cdot + t_0, E))$, essendo composizione di funzioni continue è misurabile. In più è chiaramente positiva per cui ha senso l'integrale in (4.2.19).

D'altra parte

$$u(s) - u(r) = \int_{r}^{s} u'(x)dx = \int_{G} u'(x)dx + \int_{H} u'(x)dx \tag{4.2.20}$$

essendo $G := \{x \in (r,s) : u'(x) \leq \rho(d(x,E))\}$ e $H := (r,s) \setminus G$.

Per il primo termine

$$\int_{G} u'(x)dx \leq \int_{r}^{s} \rho(d(x,E))dx \leq \int_{t_0}^{s} \rho(d(x,E))dx = \int_{0}^{s-t_0} \rho(d(x+t_0,E))dx. \tag{4.2.21}$$

Per il secondo termine sfrutto le seguenti stime, che sono da intendersi quasi ovunque su (r,s) (o su H). Se $x \in H$, allora $u'(x) > \rho(d(x,E))$. Poiché $\psi(x) \geq h(x)$ ogniqualvolta $x \geq 0$ (si veda la costruzione di ψ) allora $\psi(u'(x)) \geq h(u'(x)) \geq \frac{u'(x)}{d(x,E)\eta(d(x,E))}$ per come era stata definita $h(x)$, considerata la sua crescenza (4.2.13). Si noti che il denominatore è diverso da zero quasi ovunque, dunque la stima ha perfettamente senso. Allora, dal momento che se $x \in (r,s)$, vale $d(x,E) \leq (x - t_0)$ poiché $t_0 \in E$, considerando anche la crescenza di η (vedi costruzione di $\psi(t)$) si ha

$$\begin{aligned}
\int_{H} u'(x)dx &\leq \int_{H} d(x,E)\eta(d(x,E))\psi(u'(x))dx \\
&\leq \int_{H} (x-t_0)\eta(x-t_0)\psi(u'(x))dx \\
&\leq \int_{H} (x-t_0)(\phi(u(x)) - \phi(v(x)))^2\psi(u'(x))dx \\
&\leq (s-t_0)\int_{H} (\phi(u(x)) - \phi(v(x)))^2\psi(u'(x))dx \leq (s-t_0)\mathcal{F}_{\prime}(u)
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

dove abbiamo usato che $\eta(x - t_0) \leq (\phi(u(x)) - \phi(v(x)))^2$ per $x \in [r,s]$, cosa che abbiamo mostrato all'inizio di questa *Seconda parte*, e in più abbiamo usato che $u'(x) \geq 0$ su H per ottenere la positività di $\psi(u'(x))$ e poter fare le stime. Allora unendo la precedente stima, e le (4.2.19), (4.2.20), (4.2.21), si ottiene

$$\int_{0}^{s-t_0} \rho(d(x+t_0,E))dx \leq (s-t_0)\mathcal{F}_{\prime}(u) \tag{4.2.23}$$

da cui siccome $\rho(t) \geq \frac{\alpha^{-1}}{8}$ per ogni t per cui era definita (vedi costruzione di $\psi(t)$), allora $\mathcal{F}_{\prime}(u) \geq \frac{\alpha^{-1}}{8}$.

Conclusione Per la conclusione si scelga ϵ tale che $8\alpha \int_a^b v'(x)^2 dx < \frac{1}{\epsilon}$: ciò è possibile poiché v' è $L^2((a,b))$ (4.2.8). Allora prendendo $\mathcal{F}$ il funzionale definito come nel testo della proposizione, $\mathcal{F}(v) = \epsilon \int_a^b v'(x)^2 dx < \frac{\alpha^{-1}}{8}$.

La lagrangiana $F(x,z,p) := (\phi(z) - \phi(v(x)))^2 \psi(p) + \epsilon p^2$ che definisce il funzionale è di classe $C^\infty([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ per come sono state scelte la v, la ϕ e la ψ e inoltre è tale che $F(x,z,p) \geq \epsilon p^2$, visto che $\psi(p) \geq 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}$ per come è stata costruita ψ. Inoltre $F_{pp}(x,z,p) = (\phi(z) - \phi(v(x)))^2 \psi''(p) + 2\epsilon > 0$ e da cui la lagrangiana è strettamente convessa in p ad ogni (x,z) fissati. Usando il teorema di esistenza 3.3.1 si nota che il problema di minimo con funzionale $\mathcal{F}$ relativo alla suddetta lagrangiana, ha soluzione $u \in \mathcal{C}(0,1)$. Per tale soluzione vale $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) < \frac{\alpha^{-1}}{8}$. Allora per il teorema di regolarità parziale di Tonelli 4.1.1, $u'(x)$ esiste dovunque, in senso classico, potendo valere anche $\pm\infty$. Per la proprietà mostrata in 4.2, indubbiamente $u'(t_0)$ non può mai esistere finito per nessun $t_0 \in E$, altrimenti si avrebbe $\mathcal{F}(u) \geq \mathcal{F}_{\prime}(u) \geq \frac{\alpha^{-1}}{8}$. Dunque l'insieme delle singolarità, diciamo E_0, di u contiene E. Si noti, inoltre, che per come è fatto il funzionale, un minimo in $\mathcal{C}(0,1)$ deve necessariamente essere crescente e dunque $[u'(x)] \geq 0$ in $[a,b]$.

Mostriamo che $E = E_0$. Se così non fosse sia $t \in E_0 \setminus E$. Sappiamo, per il teorema di regolarità parziale di Tonelli 4.1.1, che E_0 è un insieme chiuso di misura nulla. Allora per ogni intorno aperto sinistro $I_\delta := (t-\delta, t)$ di t contenuto in $[a,b]$ (se t coincide con l'estremo sinistro a, basta prendere un intorno della forma $[a, a+\delta)$ e la dimostrazione è quasi del tutto analoga) esiste un punto s in $[a,b] \setminus E_0$ e dunque, per i risultati di regolarità, esiste un intorno aperto destro J_δ di s in I_δ, in cui u è di classe C^∞ (prendiamo l'intorno destro di s massimale per cui vale tale proprietà) e in più vale l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx} F_p(x, u(x), u'(x)) = F_z(x, u(x), u'(x)) \qquad \text{in} \quad J_\delta. \tag{4.2.24}$$

Dal momento che s'è scelto J_δ massimale, J_δ è della forma (s, t'_δ) con t'_δ eventualmente coincidente con t. Sicuramente $t'_\delta \in E_0$ per massimalità.

D'altra parte $F_p(x,z,p) = (\phi(z) - \phi(v(x)))^2 \psi'(p) + 2\epsilon p$ e $F_z(x,z,p) = 2\phi'(z)(\phi(z) - \phi(v(x)))\psi(p)$. Siccome $t'_\delta \in E_0$, allora $[u'(s)] \to +\infty$ quando $s \to t'_\delta$ per la continuità della derivata che segue dal teorema di regolarità parziale 4.1.1. Dunque, dal momento che $\psi'(u'(x)) \geq 0$ quasi ovunque in (a,b) per come è definita ψ e considerato che $u'(x) \geq 0$ quasi ovunque in (a,b) perché crescente; si ha $F_p(s, u(s), u'(s)) \to +\infty$ per $s \to t'_\delta$. A questo punto ci sono due casi:

- $u(t) \neq v(t)$. Esiste una costante $k > 0$ tale che

$$\begin{aligned} |F_z(x,u,u')| - kF(x,u,u') &\leq \\ \leq |F_z(x,u,u')| - k|\phi(u) - \phi(v(x))|^2 \psi(u') &= \\ = \psi(u')\,|\phi(u) - \phi(v(x))|\,\big(2\phi'(u) - k|\phi(u) - \phi(v(x))|\big) \leq 0 \quad \text{su} \quad J_\delta& \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

se $\delta < \delta_0$ sufficientemente piccolo. Ciò è vero poiché $u(t) \neq v(t)$ e dunque $|\phi(u) - \phi(v(x))|$ rimane strettamente maggiore di una certa costante positiva in un intorno sinstro di t sufficientemente piccolo, mentre $\phi'(u)$ è limitato in un intorno sinistro di t per continuità. Dunque per $\delta < \delta_0$ sufficientemente piccolo, su J_δ vale $|F_z(x,u,u')| \leq kF(x,u,u')$ per una certa costante $k > 0$ e in più $F_p(x,u,u') \to +\infty$ sulla frontiera destra di J_δ e questo chiaramente produce un assurdo, visto che su J_δ dovrebbe valere l'equazione di Eulero-Lagrange (4.2.24).

- Se $u(t) = v(t)$, essendo $u'(t) = +\infty$ e $v'(t) < +\infty$, è possibile trovare un intorno sinistro di t, (s,t), in cui $u(x) < v(x)$ per ogni $x \in (s,t)$. Allora per come è fatta F_z e data la stretta monotonia di ϕ, si ha $F_z(x,u,u') < 0$ in (s,t) e chiaramente questo è assurdo perché direbbe che in ogni intervallo $J_\delta \subseteq (s,t)$ su cui la soluzione è regolare, allora $F_p(x,u,u')$ è decrescente, assurdo poiché $F_p(x,u,u') \to +\infty$ sulla frontiera destra di J_δ.

E' chiaro, infine, che valendo il risultato 4.2, allora

$$\min_{u \in \mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(u) < \frac{\alpha^{-1}}{8} \leq \inf_{u \in \mathcal{C}(0,1) \cap C^1(0,1)} \mathcal{F}(u). \tag{4.2.26}$$

$\square$

Nota 4.2.2. Per un'analisi del fenomeno di Lavrentiev tramite la nozione di *rilassamento*, molto utile nel calcolo delle variazioni, si può far riferimento a [8]. Nel riferimento bibliografico gli autori in particolare dimostrano che, detto $\overline{\mathcal{F}}(u)$ il rilassato del funzionale $\mathcal{F}(u)$ (si intende quello relativo alla lagrangiana $F(x,z,p)$ che vale $+\infty$ sulle funzioni non lipschitziane) secondo la topologia debole di $X := \{W^{1,1}((0,1)) \mid u(0) = 0\}$, si riesce ad esprimere in maniera sensatamente esplicita il funzionale gap $L(u) := \overline{\mathcal{F}}(u) - \mathcal{F}(u)$ sul sottospazio di X dato dalle funzioni che in aggiunta sono lipschitziane su $[\delta, 1]$ per ogni $\delta > 0$. La regolarità richiesta sulla lagrangiana $F(x,z,p)$, definita su $[0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, è che sia di Carathéodory, $F(x,z,0) = 0$ e $F(x,z,\cdot)$ convessa per ogni $(x,z) \in (0,1) \times \mathbb{R}$ e che sia possibile un controllo del tipo $0 \leq F(x,z,p) \leq \omega(x,|z|,|p|)$, essendo $\omega(x,\tau,t)$ sommabile in x e crescente in τ e t. L'enunciato e la dimostrazione sono in [8, pagg.438 e seguenti].

In particolare $L(u) = \liminf_{x \to 0} \bar{V}(x,u(x))$, dove $\bar{V}(x,s) = \liminf_{t \to s} V(x,t)$, essendo $V(x,t)$ la *value function* definita

$$V(x,t) = \inf \left\{ \int_0^x F(x,u,u')dx \mid u \in Lip([0,1]), u(0) = 0, u(x) = t \right\}. \tag{4.2.27}$$

Nello stesso articolo si può trovare qualche riferimento ad alcuni esempi di lagrangiane per cui avviene il fenomeno di Lavrentiev. [8, pagg.434-436].

APPENDICE A

Controesempio di Manià

In questa appendice mostriamo che dato il funzionale

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 ((u(x)^3 - x)^2 u'(x)^6 dx \tag{A.0.1}$$

e la classe

$$\mathcal{C}(0,1) := \{u \in AC([0,1]) \mid u(0) = 0, u(1) = 1\} \tag{A.0.2}$$

vale che $\inf_{u \in \mathcal{C}(0,1) \cap C^1([0,1])} \mathcal{F}(u) > \inf_{u \in \mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(u)$. Appare subito evidente che

$$\min_{u \in \mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(u) = 0 \tag{A.0.3}$$

dal momento che $\bar{u}(x) := x^{\frac{1}{3}}$ è nella classe $\mathcal{C}(0,1)$, vale $\mathcal{F}(\bar{u}) = 0$ e chiaramente $\mathcal{F}(u) \geq 0$ per tutte le $u \in \mathcal{C}(0,1)$.

Sia data ora una qualunque $v \in C^1([0,1]) \cap \mathcal{C}(0,1)$. Allora, dal momento che è ovvio che v è lipschitziana (con costante di lipschitz L), vale

$$-Lx \leq v(x) \leq Lx \quad \forall x \in [0,1]. \tag{A.0.4}$$

Siano $\bar{u}_1(x) := \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$ e $\bar{u}_2(x) := \frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}}$. Per la stima di cui in (A.0.4), si ha che in un certo intorno $[0,\epsilon]$ valgono $\bar{u}_1(x) > Lx \geq v(x)$ e $\bar{u}_2(x) > Lx \geq v(x)$. Per continuità, poiché $v(1) = 1 > \frac{1}{4} = \bar{u}_2(1)$ e $v(x) < \bar{u}_2(x)$ in $[0,\epsilon]$, esiste un $0 < \alpha < 1$ tale che

$$\bar{u}_2(\alpha) = v(\alpha), \quad \bar{u}_2(x) < v(x) \quad \forall x \in (\alpha, 1]. \tag{A.0.5}$$

Infine, poiché $\bar{u}_1(\alpha) > \bar{u}_2(\alpha) = v(\alpha)$ e $\bar{u}_1(1) = \frac{1}{2} < 1 = v(1)$ si ha, per continuità, l'esistenza di un $1 > \beta > \alpha$ tale che

$$\bar{u}_1(\beta) = v(\beta), \quad \bar{u}_1(x) > v(x) \quad \forall x \in [\alpha, \beta). \tag{A.0.6}$$

Per la (A.0.5) e la (A.0.6) si è praticamente ricavata l'esistenza di α e β con $0 < \alpha < \beta < 1$ tali che

$$v(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}}, \quad v(\beta) = \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} < v(x) < \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} \quad \forall x \in (\alpha, \beta). \tag{A.0.7}$$

Con delle stime semplici, ma tediose, [12, Pag.149] usando la (A.0.7) si ricava che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\int_\alpha^\beta (v^3 - x)^2 v'^6 dx \geq \frac{c}{\beta} > c \tag{A.0.8}$$

e dunque $\mathcal{F}(v) \geq \int_\alpha^\beta (v^3 - x)^2 v'^6 dx > c$. La (A.0.8) è valida non appena esistono degli α e β per cui valgono le condizioni in (A.0.7). Dal momento che questi esistono qualsiasi $v \in C^1([0,1]) \cap \mathcal{C}(0,1)$ si scelga, per quanto mostrato, se ne ricava immediatamente che

$$\inf_{u \in C^1([0,1]) \cap \mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(u) > c > 0 = \min_{u \in \mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(u) \tag{A.0.9}$$

e dunque ciò che volevamo.

E' semplice notare che la derivata di $x^{\frac{1}{3}}$ è definita quasi ovunque su $(0,1)$ e in più è in $L^\sigma((0,1))$ per ogni $1 < \sigma < \frac{3}{2}$. Ciò significa che fissato un tale σ, è possibile scegliere $\epsilon > 0$ tale che il funzionale

$$\mathcal{F}'(u) := \int_0^1 (u^3 - x)^2 u'^6 + \epsilon |u'|^\sigma dx \tag{A.0.10}$$

presenta ancora il fenomeno di Lavrentiev nella classe $\mathcal{C}(0,1)$. Basta, infatti, scegliere $\epsilon > 0$ dimodoché $\epsilon \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\prime\sigma} dx < c$, essendo $c > 0$ quello proveniente dalla stima in (A.0.8).

Ciò rende chiaro, anche in questo caso semplice, come il fenomeno di Lavrentiev non dipenda da problemi di superlinearità: infatti poteva sorgere il sospetto che, dal momento che la lagrangiana $F(x,z,p) = (z^3 - x)^2 p^6$ non soddisfa la superlinearità ad esempio in $(x,z) = (0,0)$, il fenomeno di Lavrentiev dipendesse dall'assenza di questa ipotesi. Questo è presto sconfessato: la lagrangiana $F'(x,z,p) = (z^3 - x)^2 p^6 + \epsilon|p|^\sigma$ con $\epsilon > 0$ e $1 < \sigma < \frac{3}{2}$ opportunamente scelti è superlineare in p e presenta il fenomeno di Lavrentiev per quanto precedentemente osservato.

Si noti, infine, che incidentalmente s'è mostrato che ogni $u_n \in \mathcal{C}([0,1]) \cap C^1([0,1])$ che convergano unifermemente a $x^{\frac{1}{3}}$ sono tali che $\mathcal{F}(u_n) \to +\infty$. Ciò è vero dal momento che, vista la convergenza uniforme, gli α_n e i β_n scelti in modo tale che valga la (A.0.7) devono necessariamente tendere a 0. Allora per la stima (A.0.8) si deduce che

$$\int_0^1 F(x, u_n, u_n') dx \geq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} (u_n^3 - x)^2 u_n'^6 dx \geq \frac{c}{\beta_n} \to +\infty \tag{A.0.11}$$

dal momento che $\beta_n \to 0$. E' semplice immaginare che è possibile, con il medesimo principio e modificando gli esponenti nel funzionale (A.0.1), formulare tutta una classe di problemi variazionali con lagrangiane tipo-Manià per cui vale il fenomeno di Lavrentiev.

Bibliografia

[1] M. Abate, F. Tovena: *Geometria Differenziale*, Springer-Verlag Italia, 2011

[2] L. Ambrosio, G. Da Prato, A. Mennucci: *Introduction to Measure Theory and Integration*, Edizioni della Normale, 2011

[3] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, 2000

[4] L. Ambrosio, C. Mantegazza: *Complementi di Matematica, Seminario Fisico-Matematico I anno*, http://dida.sns.it/dida2/cl/14-15/folde0/

[5] J. M. Ball, V. J. Mizel: *One-dimensional Variational Problems whose Minimizers do not Satisfy the Euler-Lagrange Equation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **90(4)**, 325-388, 1985

[6] H. Brezis: *Analisi funzionale: teoria e applicazioni*, Liguori Editore, 2006

[7] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *One-dimensional Variational Problems: An introduction*, Oxford University Press, 1998

[8] G. Buttazzo, V. J. Mizel: *Interpretation of the Lavrentiev Phenomenon by relaxation*, Journal of Functional Analysis **110**, 434-460, 1992

[9] H. Cartan: *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Dover Publications, 1995

[10] F. H. Clarke: *Functional Analysis, calculus of variations and optimal control*, Springer-Verlag London, 2013

[11] F. H. Clarke, R. B. Vinter: *Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations*, Transaction of the American Mathematical Society **289**, 73-98, 1985

[12] B. Dacorogna: *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer, 2008

[13] A. M. Davie: *Singular Minimisers in the Calculus of Variations in One Dimension*, Arch. Ration. Mech. Anal. **101(2)**, 161-177, 1988

[14] G. B. Folland: *Real Analysis: Modern Techniques and Their applications*, John Wiley and Sons, 1999

[15] M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *Calculus of Variations I*, Springer, 2004

[16] M. M. Rao, Z. D. Ren: *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, 1991

[17] W. Rudin: *Principi di analisi matematica*, McGraw-Hill Libri Italia, 1991

[18] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970