Esercizi per il corso "Ultrafiltri e Metodi Non-Standard"

Gioacchino Antonelli

June 11, 2015

Esercizio 1: *Determinare una 2-colorazione di $\mathbb{N}$ di modo che non esistano progressioni aritmetiche infinite monocromatiche.*

Dimostrazione: Con un procedimento diagonale è possibile numerare gli elementi di $\mathbb{N}^2$, ovvero le coppie ordinate di numeri naturali. In effetti, dato $i \in \mathbb{N}$, esiste certamente un $a \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a(a+1)}{2} = \sum_{j=1}^{a} j < i \leq \sum_{j=1}^{a+1} j = \frac{(a+2)(a+1)}{2}$$

La funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ tale che

$$s(i) := \left(i - \frac{a(a+1)}{2}, \frac{(a+2)(a+1)}{2} - i \right)$$

è chiaramente una bigezione per come è stata costruita. Si intenderà da ora in poi, con la scrittura $s(\cdot)_1$ e $s(\cdot)_2$, rispettivamente la prima e la seconda componente della coppia $s(\cdot)$. Definisco ricorsivamente, per $n \in \mathbb{N}$, (ponendo $k_1 = 1$)

$$x_1 = s(1)_1 + s(1)_2$$
$$y_1 = s(1)_1 + 2s(1)_2$$
$$k_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} | s(n+1)_1 + ks(n+1)_2 > y_n\}$$
$$x_{n+1} = s(n+1)_1 + k_{n+1}s(n+1)_2$$
$$y_{n+1} = s(n+1)_1 + (k_{n+1}+1)s(n+1)_2$$

Chiaramente $y_n > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per costruzione $x_{n+1} > y_n$. Sia $C := \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ e si consideri la 2-colorazione $\mathbb{N} = C \sqcup (\mathbb{N} \setminus C)$.

Considero una qualunque progressione aritmetica infinita $a + hb$, con a e b fissati e $h = 0, 1, \ldots$. Essendo s una funzione surgettiva esiste un certo j tale che $s(j) = (a, b)$. Il numero $a + k_j b$, che fa parte della progressione, è in C, essendo x_j. D'altra parte $a + (k_j + 1)b$ non è in C eppure appartiene alla progressione aritmetica: il risultato è che qualsiasi progressione aritmetica infinita si scelga, essa non può essere monocromatica.

Esercizio 2: *Sia $(A, \leq)$ un insieme infinito parzialmente ordinato. Mostrare che o esiste una catena infinita (i.e. un sottoinsieme infinito di A totalmente* *ordinato) o esiste una anticatena infinita (i.e. un sottoinsieme infinito di A con elementi a due a due non confrontabili).*

Dimostrazione: Essendo l'insieme A infinito, esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. $A_{\mathbb{N}} := f(\mathbb{N})$, dunque, è un sottoinsieme numerabile di A e pertanto $A_{\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Sia

$$C_1 := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | a_i \quad \text{e} \quad a_j \quad \text{sono confrontabili}\}$$

e sia

$$C_2 := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | a_i \quad \text{e} \quad a_j \quad \text{non sono confrontabili}\}$$

Chiaramente $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup C_2$ e dunque per la versione di Ramsey Infinita esiste H infinito tale che $[H]^2 \subseteq C_i$ per $i = 1$ o $i = 2$. Se $i = 1$, allora tutte le coppie di elementi di A i cui indici sono in H sono confrontabili, e dunque formano una catena. Altrimenti, formano un'anticatena e in entrambi i casi la cardinalità della catena o anticatena è infinita, essendo H infinito.

Essendo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ultrafiltri su I e J rispettivamente, resta definito in tal modo l'ultrafiltro prodotto su $I \times J$:

$$I \times J \supseteq A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i \in I | \{j \in J | (i,j) \in A\} \in V\} \in U$$

E' immediato verificare che questa è una buona definizione, ovvero $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è proprio un ultrafiltro. Dove necessario si indicherà $A_i = \{j \in J | (i,j) \in A\}$. In generale, spesso sottintenderò l'appartenenza degli indici al loro insieme, essendo chiaro che gli indici indicati con i apparterranno a un insieme I e gli indici indicat con j apparterranno a un insieme J (insiemi su cui sono definiti gli ultrafiltri).

Esercizio3 : *Valgono le seguenti proprietà sul prodotto di ultrafiltri:*

- *$\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è ultrafiltro principale se e solo se sia $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$ lo sono.*
- *Se $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ sono ultrafiltri su I, J, K rispettivamente, vale $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$.*
- *Se $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.*

Dimostrazione:

- ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale, esistono $a \in I$ e $b \in J$ tali che $A = \{(a,b)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Voglio mostrare che $\{b\} \in \mathcal{V}$ e $\{a\} \in \mathcal{U}$. Suppongo per assurdo che $\{b\} \notin \mathcal{V}$. Dalla definizione ho che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i | A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. D'altra parte $A_i = \emptyset \quad \forall i \in I$ poiché $\{b\} \notin \mathcal{V}$ e dunque, essendo anche $\emptyset \notin \mathcal{V}$ (infatti le possibili sezioni A_i possono essere solo $\{b\}$ o $\emptyset$), avrei $\emptyset \in \mathcal{U}$, che è assurdo. Ora, si ha che $\{i | A_i \in \mathcal{V}\} = \{a\}$ e dunque dalla definizione ho che $\{a\} \in \mathcal{U}$ come volevo mostrare. Dalla chiusura per insiemi superiori ottengo che sia $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$ sono ultrafiltri principali.

($\Leftarrow$) Se sia $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$ sono principali, esistono a e b tali che $\{a\} \in \mathcal{U}$ e $\{b\} \in \mathcal{V}$. Voglio mostrare che $A = \{(a,b)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. D'altra parte $A_i = \{b\}$ se $i = a$ ed è vuoto altrimenti. Dunque $\{i|A_i \in \mathcal{V}\} = \{a\} \in \mathcal{U}$ e ciò mostra, proprio per definizione, che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ e dunque quest'ultimo, vista la chiusura per insiemi superiori, è un filtro principale.

- Per comodità di notazione si sottintenderà che i, j e k appartengono a I, J e K. $A \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} \Leftrightarrow B = \{(i,j)|A_{(i,j)} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i|B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i|\{j|A_{(i,j)} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$.

  Inoltre $A \in \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) \Leftrightarrow \{i|A_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i|\{j|(A_i)_j \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$.

  A meno dell'identificazione $A_{(i,j)} = (A_i)_j$ che discende direttamente dal fatto che è possibile identificare le terne $((i,j),k)$ e $(i,(j,k))$, l'associatività è evidente perché le definizioni sono assolutamente equivalenti fra loro.

- Se $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ esiste $A \in \mathcal{U}$ con $A \notin \mathcal{V}$. Mostro che $I \times A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Infatti $\{i \in I|\{j \in I|(i,j) \in I \times A\} \in \mathcal{V}\} = \emptyset$ poiché $\forall i \in I$, $\{j \in I|(i,j) \in I \times A\} = A \notin \mathcal{V}$. Siccome $\emptyset \notin \mathcal{U}$, direttamente dalla definizione, $I \times A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. D'altra parte $I \times A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ poiché $\forall i$, $\{j \in I|(i,j) \in I \times A\} = A \in \mathcal{U}$ e dunque $\{i \in I|\{j \in I|(i,j) \in I \times A\} \in \mathcal{U}\} = I \in \mathcal{V}$ e dunque dalla definizione stessa $I \times A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$. Dunque $I \times A$ è in $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ ma non in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ che quindi non possono essere uguali.

E' semplice notare che su un campo ordinato $(\mathbb{F}, \mathbb{F}^+)$ ha senso definire un modulo: ovverosia $|x| = x$ se $x \in \mathbb{F}^+$ oppure $x = 0$ e $|x| = -x$ se $x \in \mathbb{F}^-$. In questo modo vale la disuguaglianza triangolare: infatti ovviamente $-|x| \leq x \leq |x| \, \forall x \in \mathbb{F}$ e dunque $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$ da cui $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Abbiamo notato a lezione, anche, che se $\alpha \in {}^\star\mathbb{R}$ è finito allora ammette un'unica parte standard: ovvero esiste uno ed un solo $r \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha \sim r$, ovvero $|\alpha - r|$ è un infinitesimo positivo. E' chiaro che è sufficiente mostrarlo per $\alpha \geq 0$. Prendo $r := \sup\{x \in \mathbb{R}|x < \alpha\}$. Sicuramente il sup esiste finito poiché α è limitato. Voglio inoltre mostrare che $|r - \alpha| < s$ per qualsiasi s reale positivo. Infatti se così non fosse avrei che esiste un $s^\star$ tale che $|r - \alpha| > s^\star$. Se $r - \alpha < -s^\star$ allora $r + s^\star < \alpha$ ed essendo $r + s^\star$ un reale strettamente maggiore di r avrei il sup non potrebbe essere r (perché la disuguaglianze sarebbe soddisfatta da un reale più grande). Dunque, dovendo essere $|r - \alpha| > s^\star$ e non potendo essere $r - \alpha < -s^\star$, ho che deve essere $r - \alpha > s^\star$. Per definizione di sup, inoltre,$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste un certo $r - \epsilon \leq \beta < r$ tale che $\beta < \alpha$. Allora scegliendo $\epsilon = s^\star$ esiste sicuramente un $r - s^\star \leq \beta < r$ tale che $\beta < \alpha$. Dunque $r - s^\star \leq \beta < \alpha$ da cui $r - \alpha < s^\star$. Dunque ciò è un assurdo.

Per dimostrare l'unicità suppongo che esistano due $r, s \in \mathbb{R}$ tali che $r \sim \alpha \sim s$. Allora $|r - \alpha| < x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e $|\alpha - s| < y$ per ogni $y \in \mathbb{R}^+$ da cui per la triangolare $|r - s| < x + y$ per ogni x, y in $\mathbb{R}^+$ che è palesemente assurdo.

Osservazione 1: *Le operazioni con le parti standard sono perfettamente conservate come ci si aspetterebbe: ad esempio se α e β sono numeri iperreali finiti, st(α)st(β)=st($\alpha\beta$)*

Dimostrazione: Sia st(α)=r e st(β)=s, essendo s e r numeri reali finiti. Allora per ogni ϵ, δ numeri reali positivi, $|\alpha - r| < \epsilon$ e $|\beta - s| < \delta$. Allora $|\alpha\beta - rs| = |\alpha\beta - \alpha s + \alpha s - rs| \leq |\alpha||\beta - s| + |s||\alpha - r|$, dove ho usato la disuguaglianza triangolare. Essendo α limitato esiste un certo r' reale tale che $|\alpha| < r'$. Dunque $|\alpha||\beta - s| + |s||\alpha - r| < r'\delta + |s|\epsilon$ che vale per ogni ϵ e δ reali positivi. Dunque $|\alpha\beta - rs| < r'\delta + |s|\epsilon$ per ogni ϵ e δ reali positivi e dunque, chiaramente $|\alpha\beta - rs| < \zeta$ per ogni ζ reale positivo, e ciò dimostra quanto volevo, vista l'unicità della parte standard.

Utilizzerò d'ora in poi la definizione ${}^\star A$ data a lezione, dove A è un qualunque sottoinsieme (per non banalizzare gli enunciati dei teoremi lo considererò sempre *non vuoto*) dei numeri reali. In particolare ${}^\star A := A^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, essendo $\mathcal{U}$ l'ultrafiltro usato per la costruzione degli iperreali.

Esercizio 4: *Mostrare i seguenti tre fatti:*

- *(*) Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, allora $[f] \in {}^\star A$ se e solo se $\{n | f(n) \in A\} \in \mathcal{U}$, essendo $\mathcal{U}$ l'ultrafiltro utilizzato per la costruzione del modello dei numeri iperreali.*
- ${}^\star(A \cap B) = {}^\star A \cap {}^\star B$.
- ${}^\star(A \setminus B) = {}^\star A \setminus {}^\star B$.

Dimostrazione:

- ($\Leftarrow$) Essendo A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto, chiamo $a \in A$ un suo elemento. Definisco $g : \mathbb{N} \to A$ in questo modo:

  $$g(n) = f(n) \text{ se } f(n) \in A \qquad g(n) = a \text{ se } f(n) \notin A$$

  Chiaramente $[g] = [f]$ poiché $\{n | g(n) = f(n)\} = \{n | f(n) \in A\} \in \mathcal{U}$ per ipotesi. Dunque $[f] \in {}^\star A$.

  ($\Rightarrow$). Se $[f] \in {}^\star A$, esiste $g : \mathbb{N} \to A$ tale che $[f] = [g]$, ovvero $X = \{n | f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Chiaramente $\{n | f(n) \in A\} \supseteq X$, poiché $g(n)$ è a valori in A. Ma data la chiusura per soprainsiemi degli ultrafiltri ho certamente $X \in \mathcal{U}$.

- ($\subseteq$) Chiara.

  ($\supseteq$) Ho $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Per quando mostrato prima, $[f] \in {}^\star A$ implica che $X = \{n | f(n) \in A\} \in \mathcal{U}$ e analogamente $[f] \in {}^\star B$ implica $Y = \{n | f(n) \in B\} \in \mathcal{U}$. Ovviamente $\{n | f(n) \in A \cap B\} = X \cap Y \in \mathcal{U}$ per una proprietà di ultrafiltro, e dunque per il punto precedente $[f] \in {}^\star(A \cap B)$.

- ($\subseteq$) Se $[f] \in {}^\star(A \setminus B)$, allora sicuramente $[f] \in {}^\star A$. Se per assurdo $[f] \in {}^\star B$, allora esisterebbe una certa $g : \mathbb{N} \to B$ tale che $\{n | f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Ma $\{n | f(n) = g(n)\} = \emptyset$ perché f non prende mai valori in B, mentre g sì. Dunque ho un assurdo.

  ($\supseteq$) Suppongo $A \setminus B \neq \emptyset$ altrimenti la tesi si dimostra facilmente, essendo A un sottoinsieme di B e non potendo dunque esistere $[f] \in {}^\star A$ che non siano anche in $^\star B$. Sia allora $a \in A \setminus B$ e sia $[f] \in {}^\star A \setminus {}^\star B$. Valendo questa appartenenza posso prenere $f : \mathbb{N} \to A$. Definisco f' nel modo seguente:

$$f'(n) = f(n) \text{ se } f(n) \in A \setminus B \qquad f'(n) = a \text{ se } f(n) \in B$$

Chiaramente $f' : \mathbb{N} \to A \setminus B$. Inoltre $\{n|f'(n) = f(n)\} = \{n|f'(n) \neq f(n)\}^c = \{n|f(n) \in B\}^c$. Siccome $[f] \notin {}^\star B$, per l'equivalenza mostrata nel primo punto, $\{n|f(n) \in B\} \notin \mathcal{U}$ e dunque $\{n|f(n) \in B\}^c \in \mathcal{U}$ per una proprietà di ultrafiltro. Allora, per definizione, $[f'] = [f]$ ma $[f'] \in {}^\star A \setminus B$, come volevasi mostrare.

Come detto a lezione, data $f : A \to B$, si definisce $^\star f : {}^\star A \to {}^\star B$ in tal modo:

$$\text{se } [v] \in {}^\star A; \qquad {}^\star f([v]) = [f \circ v]$$

Si verifica che questa è una buona definizione.

Esercizio 5: *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. f è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall {}^\star\mathbb{R} \ni \alpha \sim x_0$, allora ${}^\star f(\alpha) \sim f(x_0)$.*

Dimostrazione: Mostro che la continuità in senso classico implica quella non-standard.

Per ipotesi ho che $\forall \epsilon \exists \delta | \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Fisso $x_0 \sim \alpha \in {}^\star\mathbb{R}$. Ricordando il modello $\alpha = [v]$ dove $v : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$. Essendo $\alpha \sim x_0$ ho che $|\alpha - x_0| < \delta \ \forall \delta \in \mathbb{R}^+$. Ricordando che $\mathbb{R}$ si immerge in $^\star\mathbb{R}$ con le successioni costanti, ciò vuol dire che $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \quad X = \{n||v(n) - x_0| < \delta\} \in \mathcal{U}$. Fissato ϵ arbitrario considero il δ dato dalla formulazione della continuità. Vale chiaramente che $X = \{n||v(n) - x_0| < \delta\} \in \mathcal{U}$ e dunque $Y = \{n||f(v(n)) - f(x_0)| < \epsilon\} \supseteq X$ per continuità. Inoltre $Y \in \mathcal{U}$ vista la chiusura per soprainsieme e dunque, data l'arbitrarietà di ϵ, ciò significa, appunto per definizione, che $|{}^\star f(\alpha) - f(x_0)| < \epsilon$ per ogni ϵ reale positivo e dunque ${}^\star f(\alpha) \sim f(x_0)$.

Mostro per assurdo che la continuità non-standard implica quella classica. La negazione mi garantisce l'esistenza di un ϵ e di una successione $(x_n)_{n=1,2,..}$ tale che $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ essendo $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$. Considero $\alpha = [x_n]$. Ho che $\alpha \sim x_0$ poiché per ogni reale positivo r, $|\alpha - x_0| < r$. Infatti, passando nel modello, ciò è equivalente al fatto che $X = \{n||x_n - x_0| < r\} \in \mathcal{U}$ per ogni r reale positivo. Ma ciò è ovvio poiché $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e quindi X è cofinito e sta in $\mathcal{U}$ che è un ultrafiltro non principale. Dunque per ipotesi ${}^\star f(\alpha) \sim f(x_0)$ ovvero per ogni r reale positivo $Y = \{n||f(x_n) - f(x_0)| < r\} \in \mathcal{U}$. Ciò d'altra parte è assurdo scegliendo $r = \epsilon$: in tal caso $Y = \emptyset \notin \mathcal{U}$ e dunque ho ottenuto l'assurdo.

Esercizio 6: *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. f è uniformemente continua se e solo se $\forall \alpha \sim \beta$, con α e β in $^\star\mathbb{R}$, ${}^\star f(\alpha) \sim {}^\star f(\beta)$.*

Dimostrazione: Mostro che l'uniforme continuità in senso classico implica quella non-standard.

Per ipotesi ho $\forall\epsilon\exists\delta|\forall|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$. Se $\alpha\sim\beta$, allora, nel modello, $\alpha=[v]$ e $\beta=[w]$ per due $v:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ e $w:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. L'ipotesi si traduce nel fatto che per ogni δ reale positivo, $|\alpha-\beta|<\delta$, ovvero nel modello $X=\{n||v(n)-w(n)|<\delta\}\in\mathcal{U}$. Fisso un certo ϵ e scelgo il δ dell'uniforme continuità. Allora $Y=\{n|f(v(n))-f(w(n))|<\epsilon\}\supseteq X$, per l'uniforme continuità, e dunque $Y\in\mathcal{U}$. Valendo ciò per ogni ϵ, ciò significa che ${}^\star f(\alpha)\sim{}^\star f(\beta)$ che è ciò che si voleva.

Mostro che l'uniforme continuità non-standard implica quella in senso classico, per assurdo. La negazione mi garantisce l'esistenza di un ϵ tale che esistono due successioni $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ e $(y_n)_{n=1,2,\ldots}$ con $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ ma $|f(x_n)-f(y_n)|>\epsilon$. E' chiaro, con ragionamenti del tutto analoghi alla continuità che se $\alpha=[x_n]$ e $\beta=[y_n]$ allora $\alpha\sim\beta$ ma ${}^\star f(\alpha)$ non è equivalente a ${}^\star f(\beta)$ poiché $|f(x_n)-f(y_n)|>\epsilon$.

Mostrerò, come esercizio per le definizioni date il teorema di Weirestrass con l'analisi non-standard.

Teorema 1: *(Weierstrass) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Mostrare che f ammette massimo su $[a,b]$.*

Dimostrazione: Considero ${}^\star f:{}^\star[a,b]\to{}^\star\mathbb{R}$. E' semplice mostrare che ${}^\star X={}^\star\{f(x)|x\in[a,b]\}=\{{}^\star f(\alpha)|\alpha\in{}^\star[a,b]\}$. Mostro che esiste un β in ${}^\star X$ tale che st(β)=$\sup X$. Ciò è ovvio poiché mi basta considerare, per ogni $n\in\mathbb{N}$, un $x_n\in X$ tale che $|\sup X-x_n|<\frac{1}{n}$ (questo certamente esiste per la proprietà di sup). Allora sia $\beta=[x_n]$, usando il modello visto a lezione. Si ha che $|\beta-\sup X|<r$ per ogni r reale positivo poiché ciò equivale al fatto che $Y=\{n||\sup X-x_n|<r\}\in\mathcal{U}$ e ciò è vero essendo Y cofinito per ogni r per come è stata scelta la successione. Dunque effettivamente st(β)=$\sup X$. Inoltre, vista l'ugaglianza fra insiemi detta all'inizio, esiste un certo $\alpha\in{}^\star[a,b]$ tale che ${}^\star f(\alpha)=\beta$. Sia $s=$st(α). Certamente, visto che α appartiene a un iperintervallo chiuso, allora $s\in[a,b]$ (visto a lezione). Inoltre per continuità, ho che $\alpha\sim s\Rightarrow{}^\star f(\alpha)=\beta\sim f(s)$. Ma β, per come era stato costruito, aveva parte standard $\sup X$, dunque $\beta\sim\sup X$. Essendo la parte standard unica, allora $f(s)=\sup X$, ovvero ho mostrato che esiste un $s\in[a,b]$ tale che $f(s)=\sup\{f(x)|x\in[a,b]\}$ che è esattamente quanto volevo, ovvero l'esistenza di un massimo.

D'ora in poi, dato I un insieme di indici, tutte le funzioni che considererò saranno con dominio I a valori in I. Definisco $f\equiv_{\mathcal{U}} g\Leftrightarrow\{i\in I|f(i)=g(i)\}\in\mathcal{U}$. Inoltre, definisco $f_\star(\mathcal{U})$ l'ultrafiltro su I come segue: $A\in f_\star(\mathcal{U})\Leftrightarrow f^{-1}(A)\in\mathcal{U}$.

Esercizio 7: $f\equiv_{\mathcal{U}} g\Rightarrow f_\star(\mathcal{U})=g_\star(\mathcal{U})$

Dimostrazione: Mostro che $f_\star(\mathcal{U})\subseteq g_\star(\mathcal{U})$. In maniera del tutto analoga si mostrerà l'inclusione opposta e dunque la tesi.

Se $A\in f_\star(\mathcal{U})$ allora $f^{-1}(A)\in\mathcal{U}$. Per ipotesi $X=\{i\in I|f(i)=g(i)\}\in\mathcal{U}$. E' chiaro allora che $g^{-1}(A)=\{i\in I|g(i)\in A\}\supseteq X\cap f^{-1}(A)$. Siccome i due insieme intersecati stanno in $\mathcal{U}$ anche la loro intersezione è in $\mathcal{U}$ e dunque anche $g^{-1}(A)$ che ne è un soprainsieme.

Do per noto il seguente risultato mostrato a lezione (Teorema dei 3 colori): Sia $f : I \to I$ una funzione. Esiste una 3-colorazione di I tale che, per ogni i, se $f(i) \neq i$, allora la coppia $\{i, f(i)\}$ non è monocromatica.

Esercizio 8: $f_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \Leftrightarrow f \equiv_\mathcal{U} id$

La freccia $\Leftarrow$ è una conseguenza dell'Esercizio 1. Per fare l'altra freccia, userò il Teorema dei 3 colori ragionando per assurdo. Suppongo dunque che f non sia $\mathcal{U}$-equivalente all'identità. Allora $A = \{i|f(i) \neq i\} \in \mathcal{U}$. Noto innanzitutto che A è non vuoto poiché $A \in \mathcal{U}$. Poi $f^{-1}(A) \subseteq A$. Infatti suppongo per assurdo che esista $x \in f^{-1}(A)$ ma $x \notin A$. Dunque $f(x) \in A$ mentre $x \notin A$. Ciò vorrebbe dire che $x \neq f(x)$ e dunque $x \in A$ per la stessa definzione di A.

Considero, a questo punto, una 3-colorazione di I fornitami dal teorema dei 3 colori. Siccome la 3-colorazione su I ne induce una sua A e $A \in \mathcal{U}$, per una proprietà di ultrafiltro, esiste esattamente una componente di A monocromatica che è in $\mathcal{U}$. Sia X tale componente. Se $f^{-1}(X) = \emptyset$ allora chiaramente $f^{-1}(X) \notin \mathcal{U}$. Se invece $f^{-1}(X)$ fosse non vuoto, poiché $f^{-1}(A) \subseteq A$, avrei innanzitutto che $f^{-1}(X) \subseteq A$. Inoltre per come ho scelto la 3-colorazione, sicuramente $f^{-1}(X)$ avrebbe elementi che sono colorati diversamente da X. Difatti sia $x \in f^{-1}(X)$. Allora $f(x) \in X$ e $x \neq f(x)$ poiché $x \in A$ essendo $f^{-1}(X) \subseteq A$. Dunque $\{x, f(x)\}$ non è una coppia monocromatica e dunque x ha colore diverso da $f(x)$, che è in X. Dunque $f^{-1}(X) \notin \mathcal{U}$, perché è disgiunto da X (che invece è in $\mathcal{U}$) essendo colorato con colori diversi da quello usato nella componente monocromatica

Dunque $X \in \mathcal{U}$ e $f^{-1}(X) \notin \mathcal{U}$, ovvero $X \notin f_\star(\mathcal{U})$, e dunque $U \neq f_\star(\mathcal{U})$ che conduce a un assurdo.

Esercizio9: *Mostrare le tre seguenti equivalenze, ove a_n è una successione di numeri reali e l è un reale:*

- $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l \Leftrightarrow \exists \nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}, st(a_\nu) \geq l$
- $\limsup_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow l = \max\{st(a_\nu)|\nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}, a_\nu \sim l$

Dimostrazione: Utilizzerò nella dimostrazione la caratterizzazione del lim sup come massimo limite, ovvero il valore massimo del limite di una estratta convergente.

- ($\Leftarrow$) Sia $\nu = [\nu(i)]_{i\in\mathbb{N}}$ l'ipernaturale infinito dell'ipotesi e $l \leq r = \mathrm{st}(a_\nu)$. Per ipotesi, lavorando nel modello proposto, per ogni $\epsilon, X = \{i||a_{\nu(i)} - r| < \epsilon\} \in \mathcal{U}$. Essendo ν infinito, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Y = \{i|\nu(i) > n\} \in \mathcal{U}$. A questo punto costruisco una sottosuccessione convergente a r in questo modo: siano $X_j = \{i||a_{\nu(i)} - r| < \frac{1}{j}\} \in \mathcal{U}$ e $Y_n = \{i|\nu(i) > n\} \in \mathcal{U}$; siano $a_1 = \min(X_1)$, $a_2 = \min(X_2 \cap Y_{\nu(a_1)})$, $a_3 = \min(X_3 \cap Y_{\nu(a_2)})$ e così via. Posso sempre farlo poiché interseco due insieme dell'ultrafiltro e dunque l'intersezione non sarà mai vuota. Ora considero la sottosuccessione $a_{\nu(a_1)}, a_{\nu(a_2)}, \dots$. Essa converge chiaramente a r per costruzione e dunque il massimo limite è almeno r che è maggiore o uguale di l come si voleva.

($\Rightarrow$) Se $\limsup_{n\to\infty} a_n = r \geq l$, allora esiste una sottosuccessione $a_{n_i} \to r$. L'ipernaturale $\nu = [n_i]_{i\in\mathbb{N}}$ è chiaramente infinito poiché $n_i \to \infty$ e, inoltre, chiaramente $\mathrm{st}(a_\nu) = r$ poiché per convergenza, dato qualsiasi ϵ, $X = \{i||a_{n_i} - r| < \epsilon\} \in \mathcal{U}$, poiché X è cofinito e dunque sta nell'ultrafiltro non principale con cui abbiamo costruito il modello.

- ($\Rightarrow$). Nella seconda freccia del precedente punto abbiamo mostrato che se $\limsup_{n\to\infty} a_n = l$ allora esiste ν tale che $\mathrm{st}(a_\nu) = l$. Devo mostrare che questo l è il massimo delle parti standard. Infatti se così non fosse, esisterebbe un μ infinito tale che $\mathrm{st}(a_\mu) = r > l$. Ma allora per la prima freccia del precedente punto sarebbe possibile costruire una sottosuccessione di a_n che converge a r, assurdo per l'ipotesi di massimo limite.

  ($\Leftarrow$) Siccome esiste ν infinito tale che $l = \mathrm{st}(a_\nu)$ allora per la prima freccia del primo punto $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$. Se per assurdo $\limsup_{n\to\infty} a_n = r > l$, sarebbe possibile la costruzione di un ipernaturale infinito μ tale che $\mathrm{st}(a_\mu) = r > l$, come fatto nella seconda freccia del primo punto, in aperta contraddizione con l'ipotesi che l sia il massimo delle parti standard.

- In maniera del tutto analoga al secondo punto, usando la ovvia identità $-\sup -a_n = \inf a_n$ si dimostra che $\liminf_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow l = \min\{\mathrm{st}(a_\nu)|\nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$. A questo punto è chiaro che se a_n ha limite l, allora sia il lim sup che il lim inf fanno l e dunque, l è sia il massimo che il minimo delle parti standard di a_ν al variare di ν fra gli ipernaturali infiniti. Dunque chiaramente $\mathrm{st}(a_\nu) = l \ \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

  Viceversa se le parti standard di a_ν fanno sempre l, allora sia il lim sup che il lim inf fanno l, poiché l è sia il massimo che il minimo delle parti standard. Allora la successione converge per un noto teorema di analisi elementare, e converge a l.

Prima dei prossimi esercizi ricordo alcune definizioni. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Allora la densità asintotica di A resta definita così:

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n}$$

La densità di Banach di un insieme A (genericamente sottonisieme di $\mathbb{Z}$) è invece definita come segue:

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}$$

Abbiamo mostrato a lezione che detti $a_n = \max_{x\in\mathbb{Z}} |A \cap [x+1, x+n]|$, la successione $\frac{a_n}{n}$ ammette limite e questo coincide con $\inf\left(\frac{a_n}{n}\right)$.

Esercizio 10: *$A \subseteq \mathbb{Z}$ è spesso (i.e. ammette intervalli di ogni possibile lunghezza al suo interno) sse $BD(A) = 1$*

Dimostrazione: Se A è spesso, chiaramente $a_n = \max_{x \in \mathbb{Z}} |A \cap [x+1, x+n]| = n$ e dunque, per quanto visto a lezione, $BD(A) = \inf\left(\frac{a_n}{n}\right) = 1$.

Viceversa se $BD(A) = 1$, essendo gli a_n definiti come sopra, ho che $\inf\left(\frac{a_n}{n}\right) = 1$ e dunque $\frac{a_n}{n} \geq 1$ per ogni n, ovvero $a_n \geq n$. Ma per come sono stati definiti gli a_n, non potevano valere più di n. Dunque $a_n = n$ e pertanto esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $|A \cap [x+1, x+n]| = n$. Valendo questo per ogni n, è mostrato che A è spesso.

Esercizio 11: *Esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\bar{d}(A) = 0$ e $BD(A) = 1$*

Dimostrazione: Considero $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n^3 - n + 1, n^3]$. Sicuramente A è spesso, poiché essendo $n^3 < (n+1)^3 - (n+1) + 1$ per ogni $n \geq 1$, A è un'unione di intervalli disgiunti che possono essere arbitrariamente lunghi. Dunque per l'esercizio precedente, $BD(A) = 1$. Sia $a_m = |A \cap [1, m]|$ e $b_m = \frac{a_m}{m}$ per ogni m naturale. Per come è stato costruito A sicuramente, fissato n e con $0 \leq x < n$, $a_{n^3 - x} = (1 + 2 + \cdots + n) - x = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - x$. Dunque, $b_{n^3-x} = \dfrac{n^2 + n - 2x}{2(n^3 - x)}$. In questo caso, sfruttando la limitazione $0 \leq x < n$, $b_{n^3-x} < \dfrac{n^2+n}{2(n^3-n)} = \dfrac{n+1}{2(n^2-1)}$.

Se k non è della forma $n^3 - x$, con $0 \leq x < n$, allora, detto s il più grande intero tale che $k > s^3$, per come è stato costruito A, $a_k = a_{s^3} = \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}$ e $b_k = \frac{a_k}{k} = \frac{a_{s3}}{k} < \frac{a_{s3}}{s^3} = \frac{s^2+s}{2s^3} = \frac{s+1}{2s^2}$.

Dunque ricapitolando:

$$b_k < \frac{n+1}{2(n^2-1)} \quad \text{se esiste } n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } k = n^3 - x \text{ con } 0 \leq x < n$$

$$b_k < \frac{n+1}{2n^2} \quad \text{altrimenti, essendo } n \text{ è il piu grande naturale t.c. } k > n^3$$

E' evidente, dunque, che se $k \to \infty$, allora anche gli n delle condizioni vanno a infinito e in tal caso sia $\frac{n+1}{2(n^2-1)}$ che $\frac{n+1}{2n^2}$ vanno a 0, mostrando così che il $\limsup$ di b_k è 0.

Esercizio 12: *Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione crescente di naturali tali che $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \infty$, allora detto $A = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, $\bar{d}(A) = 0$*

Dimostrazione:

Lemma: Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie convergente decrescente. Allora $nx_n \to 0$ se $n \to \infty$.

Dimostrazione: Fisso m. Allora per la decrescenza $S = \sum_{n=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{m} x_n \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil x_m \geq \frac{1}{2} m x_m$. Se $m \to \infty$, allora $S \to 0$ per la proprietà di Cauchy, dal momento che l'intera serie converge. Dunque, essendo maggiorata da una quantità che va a 0, $m x_m \to 0$ se $m \to \infty$ come si voleva.

Applicando il lemma a $\{\frac{1}{a_n}\}$, successione che soddisfa le ipotesi, si ottiene che $\frac{n}{a_n} \to 0$ se $n \to \infty$. Sia a questo punto $c_n = |A \cap [1,n]|$ e $d_n = \frac{c_n}{n}$. Se $n = a_i$ per qualche i, allora $d_n = \frac{c_n}{n} = \frac{c_{a_i}}{a_i} = \frac{i}{a_i}$ notando che ovviamente, per come è definito A, $c_{a_i} = i$. Se n non è della forma a_i sia i il più grande indice per cui $n > a_i$. Allora $c_n = c_{a_i}$ e $d_n = \frac{c_n}{n} = \frac{c_{a_i}}{n} < \frac{c_{a_i}}{a_i} = \frac{i}{a_i}$. Dunque ricapitolando:

$$d_n = \frac{i}{a_i} \quad \text{se } n = a_i$$

$$d_n < \frac{i}{a_i} \quad \text{altrimenti, essendo } i \text{ il più grande indice tale che } n > a_i$$

Notando che se $n \to \infty$ allora anche gli $i \to \infty$ e ricordando che per il lemma $\frac{i}{a_i} \to 0$ se $i \to \infty$, il $\limsup_{n \to \infty} d_n = 0$, ovvero $\bar{d}(A) = 0$.

Esercizio 13: *(Caratterizzazione non-standard degli spessi) Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ Le seguenti sono equivalenti:*

1. *A è spesso.*
2. *$\exists I \subseteq {}^\star A$, tale che I è un intervallo infinito, ovvero, $I = [\nu, \mu]$ con $\mu - \nu$ infinito.*
3. *$\forall \nu \in {}^\star\mathbb{N} \exists I$ intervallo di lunghezza ν con $I \subseteq {}^\star A$.*
4. *$\exists \xi \in {}^\star\mathbb{N}$ t.c. $\xi + n \in {}^\star A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione:

- (1) $\Rightarrow$ (3). Sia $\nu = [\nu_i]_{i \in \mathbb{N}}$. Poiché A è spesso, esistono, per ogni i, $a_i < b_i$ in A e tali che $|b_i - a_i| = \nu_i$ e $[a_i, b_i] \subseteq A$. Sia $a = [a_i]_{i \in \mathbb{N}}$ e $b = [b_i]_{i \in \mathbb{N}}$. Per la definizione stessa di cardinalità non standard, $|[a,b]| = \nu$ e inoltre è chiaro che se $x \in [a,b]$, allora $x \in {}^\star A$, per come è stato definito $[a,b]$.
- (3) $\Rightarrow$ (2). Ovvio, per specializzazione.
- (2) $\Rightarrow$ (1). Se A non fosse spesso, esisterebbe un certo $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[n, n+k-1]$ non è contenuto in A, ovvero esiste un a_n tale che $a_n \in [n, n+k-1] \cap A^c$. Siccome $I = [\nu, \mu]$ è un intervallo infinito, $X = \{i \in \mathbb{N} | \mu_i - \nu_i > k\} \in \mathcal{U}$. Per ogni $i \in X$ Considero a_{ν_i} come definito sopra. E' chiaro che, essendo $\mu_i - \nu_i > k$, e $a_{\nu_i} \in [\nu_i, \nu_i + k - 1]$, allora $a_{\nu_i} \in [\nu_i, \mu_i]$. Ora definisco $b = [b_i]_{i \in \mathbb{N}}$ come segue.

$$b_i = a_{\nu_i} \quad \text{se } i \in X$$

$$b_i = 0 \quad \text{altrimenti}$$

Allora $b \in [\nu, \mu]$ poiché $Y = \{i | \nu_i \leq b_i \leq \mu_i\} \supseteq X$ per costruzione, e dunque $Y \in \mathcal{U}$. D'altronde $Z = \{i | b_i \in A^c\} \supseteq X$, per costruzione e poiché $a_{\nu_i} \in A^c$. Dunque $\{i | b_i \in A^c\} \in \mathcal{U}$ e dunque $\{i | b_i \in A\} \notin \mathcal{U}$. Ciò implica che $b \notin {}^\star A$ ma ciò è assurdo poiché per ipotesi so che $[\nu, \mu] \subseteq {}^\star A$ mentre ho appena dimostrato che $b \in [\nu, \mu]$ ma $b \notin {}^\star A$. Dunque A deve essere spesso.

- (2) $\Rightarrow$ (4) ovvio poiché $\mu - \nu$ è infinito e mi basta scegliere $\xi = \nu$.
- (4) $\Rightarrow$ (2). E' una semplice applicazione dell'overspill. Infatti per ogni $i \in \mathbb{N}$, $[\xi, \xi + i] \in {}^\star A$, dunque esiste ν infinito tale che $[\xi, \xi + \nu] \in {}^\star A$.

E' chiaro che B è sindetico se e solo se B^c non è spesso. Ma ciò vista l'equivalenza (1) $\Leftrightarrow$ (2) è equivalente al fatto che $\forall I$ intervallo infinito, I non è contenuto in ${}^\star B^c = ({}^\star B)^c$ per quanto mostrato in uno scorso esercizio. Dunque $I \cap {}^\star B \neq \emptyset$.

Inoltre vista l'equivalenza (1) $\Leftrightarrow$ (4), il fatto che B^c non è spesso è equivalente al fatto che per ogni ξ, $\{n \in \mathbb{N} | \xi + n \in {}^\star B^c = ({}^\star B)^c\} \neq \mathbb{N}$ e dunque $\{n \in \mathbb{N} | \xi + n \in {}^\star B\} \neq \emptyset$.

Dunque si possono affermare immediatamente le seguenti equivalenze:

Corollario 1: *Le seguenti sono equivalenti*

1. *B è sindetico.*
2. *$\forall I$ intervallo infinito, $I \cap {}^\star B \neq \emptyset$ (ovvero ${}^\star B$ non ha buchi infiniti).*
3. *$\forall \xi \in {}^\star\mathbb{N}$, $B_\xi := \{n \in \mathbb{N} | \xi + n \in {}^\star B\} \neq \emptyset$.*
4. *Esiste k finito per cui ${}^\star B$ ha solo buchi di ampiezza minore o uguale a k.*

Dove l'unica equivalenza non mostrata, (1) $\Leftrightarrow$ (4) è una immediata applicazione del principio di transfer usando come k quello dato dalla sindeticità di B.

In tutti gli esercizi che seguono (I due Lemmi e l'Esercizio 14) prenderò gli ultrafiltri su $\mathbb{N}$. Ricordo che se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, allora $f_\star(\mathcal{U}) := \{A \subseteq \mathbb{N} | f^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$.

Dati $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ ultrafiltri su $\mathbb{N}$ dirò che sono isomorfi, ovvero $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ se e solo se esiste una bigezione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\sigma_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

Lemma 1: *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafilro su $\mathbb{N}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Allora $f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva.*

Dimostrazione:

- ($\Rightarrow$) Per ipotesi esiste $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una bigezione tale che $\sigma(f(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ e per un risultato mostrato in un pdf precedente, ciò significa che $A =$

$\{i|\sigma(f(i)) = i\} \in \mathcal{U}$. A questo punto è semplice notare che $f|_A$ è iniettiva: infatti se $f(x) = f(y)$ con $x, y \in A$, allora $\sigma(f(x)) = \sigma(f(y))$ e per l'appartenenza ad A, segue $x = y$.

- ($\Leftarrow$) Esiste A per cui $f : A \to \mathbb{N}$ è iniettiva. Costruisco $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo tale che $f \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$. In questo modo avrei che, per un risultato mostrato in un pdf precedente, $f(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U})$ e dunque, essendo σ una bigezione, $f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$.

  Se A è finito, allora $X = \mathbb{N} \setminus A$ ha la stessa cardinalità di $Y = \mathbb{N} \setminus f(A)$. Dunque esiste una bigezione $\sigma_1 : X \to Y$ e definisco $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in questo modo
  $$\sigma(n) = f(n) \quad \text{se } n \in A$$
  $$\sigma(n) = \sigma_1(n) \quad \text{se } n \notin A$$
  La σ così costruita è una bigezione e coincide con f almeno su A, che appartiene all'ultrafiltro. Dunque $f \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$ e la tesi segue per quanto detto prima.

  Se A non è finito, allora è numerabile. E' noto dalla teoria degli insiemi che esiste una bigezione $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$. Allora è possibile scrivere A come unione disgiunta di due suoi sottoinsiemi infiniti numerabili, ovvero $A = A_1 \sqcup A_2$, uno dei quali, senza perdita di generalità A_1, deve essere nell'ultrafiltro, poiché $A \in \mathcal{U}$. Allora, siccome $A_2 \subset \mathbb{N} \setminus A_1$, e A_2 è infinito numerabile, sicuramente $\mathbb{N} \setminus A_1$ è infinito numerabile. Analogamente $f(A_2) \subset \mathbb{N} \setminus f(A_1)$ ed essendo f iniettiva su A, $f(A_2)$ sarà infinito numerabile e dunque anche $\mathbb{N} \setminus f(A_1)$. Allora esiste una bigezione $\sigma_1 : \mathbb{N} \setminus A_1 \to \mathbb{N} \setminus f(A_1)$ e definisco $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in questo modo
  $$\sigma(n) = f(n) \quad \text{se } n \in A_1$$
  $$\sigma(n) = \sigma_1(n) \quad \text{se } n \notin A_1$$
  La σ così costruita è una bigezione e coincide con f almeno su A_1, che appartiene all'ultrafiltro. Dunque $f \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$ e la tesi segue per le osservazioni precedenti.

Lemma 2: *Se $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$, allora $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$.*

Dimostrazione: Per ipotesi esistono $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che $\mathcal{U} = f(\mathcal{V})$ e $\mathcal{V} = g(\mathcal{U})$. Dunque $\mathcal{U} = f(g(\mathcal{U})$ e per un noto risultato, $f \circ g \equiv_U \text{id}$. Dunque $A = \{i|f(g(i)) = i\} \in \mathcal{U}$. Chiaramente $g|_A$ è iniettiva poiché se $g(x) = g(y)$ per $x, y \in A$, allora $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$. Allora per il Lemma 1, $g(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$. Ma $g(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ e dunque $\mathcal{V} \cong \mathcal{U}$ come volevo mostrare.

Esercizio 1: *$\forall \mathcal{U}$ ultrafiltro non principale, $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ ma non vale che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U}$. Dunque $\leq_{RK}$ non ammette elementi massimali*

Dimostrazione: Sia $\pi_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la proiezione sulla prima coordinata (ovvero $\pi_1(n, m) = n$). Mostro che $\pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Infatti $\pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \{A \subseteq \mathbb{N}|\pi_1^{-1}(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}\}$. D'altra parte $\pi_1^{-1}(A) = A \times \mathbb{N}$. Per definizione di ultrafiltro prodotto, $A \times \mathbb{N} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ se e solo se $\{i | (A \times \mathbb{N})_i \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Inoltre, banalmente, $(A \times \mathbb{N})_i = \emptyset$ se $i \notin A$ e $(A \times \mathbb{N})_i = \mathbb{N}$ se $i \in A$. Dunque, viste le definizioni, $A \times \mathbb{N} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}$. Dunque $\pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e, per definizione, $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$.

Se per assurdo fosse anche $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U}$, per il Lemma 2 avrei che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \cong \mathcal{U}$, ovvero $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \cong \pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U})$. Dunque per il Lemma 1 esiste un A in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ tale che $\pi_1|_A$ è una mappa iniettiva. Ciò significa che per ogni $i \in \mathbb{N}$, esiste al più un elemento j tale che $(i, j) \in A$, infatti se ne esistessero due (i, j_1) e (i, j_2), le loro proiezioni lungo la prima componente sarebbero uguali, contraddicendo il fatto che $\pi_1|_A$ è iniettiva. Dunque $|\{j | (i, j) \in A\}| \in \{0, 1\}$. Essendo $\mathcal{U}$ non principale, allora $\{i | \{j | (i, j) \in A\} \in \mathcal{U}\}$ è vuoto e dunque, per la stessa definizione di ultrafiltro prodotto, A non può appartenere a $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, e ciò è assurdo.

Esercizio 14: Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Le seguenti sono equivalenti

1. $\mathcal{U}$ è $\leq_{RK}$-minimale in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.
2. Se $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ è una partizione tale che $\emptyset \neq A_i \notin \mathcal{U}$ per ogni i, allora esiste $X \in \mathcal{U}$ selettore, cioè tale che $X \cap A_i$ ha un elemento esattamente per ogni i.
3. $\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \exists A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è costante oppure iniettiva
4. Con questo ultrafiltro, ${}^\star\mathbb{N} = \{[f]_{\mathcal{U}} | f \text{è costante o bigezione}\}$.

Dimostrazione:

- (1) $\Rightarrow$ (3). Considero una generica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Per definizione $f(\mathcal{U}) \leq_{RK} \mathcal{U}$, dunque essendo $\mathcal{U}$ minimale, $f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$. Il Lemma 1 implica, dunque, l'esistenza di $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva.
- (3) $\Rightarrow$ (1). Suppongo esista $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$, con $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, ovvero $\mathcal{V}$ non principale, tale che però non valga $\mathcal{V} \cong \mathcal{U}$. Allora esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$. Se esistesse $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è costante, allora $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ sarebbe principale, contro l'assunzione iniziale. Allora esista $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva. Il Lemma 2, allora, implica $\mathcal{V} = f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$, che è assurdo rispetto a quanto detto. Dunque $\mathcal{U}$ è minimale in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.
- (2) $\Rightarrow$ (3). Considero una generica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Se esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è costante allora ho concluso. Altrimenti $f^{-1}(i) \notin \mathcal{U} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Allora $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^{-1}(i)$. Eliminando dall'unione disgiunta gli insiemi eventualmente vuoti, in virtù dell'ipotesi, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap f^{-1}(i)$ ha esattamente un elemento per ogni $i \in \mathbb{N}$, tale che $f^{-1}(i)$ sia non vuoto. Ciò implica evidentemente che $f|_X$ è iniettiva.
- (3) $\Rightarrow$ (2). Sia $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $A_i \notin \mathcal{U}$ per ogni i. Definisco $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo tale che $f|_{A_i} = i$ per ogni i. Per ipotesi, allora, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f|_X$ è costante o iniettiva. Se $f|_X = l$, allora $X \subseteq A_l$, e dunque appartenendo X all'ultrafiltro, dovrebbe essere anche $A_l \in \mathcal{U}$, ma ciò è assurdo vista l'ipotesi. Dunque $f|_X$ è iniettiva. Sicuramente $|X \cap A_i| \leq 1$ per ogni i, vista l'iniettività di $f|_X$. Scegliendo opportunamente $X' \supseteq X$

tale che $|X' \cap A_i| = 1$, ho la tesi (mi basta aggiungere un elemento in A_i per ogni i tale che $|X \cap A_i| = 0$) poiché $X' \in \mathcal{U}$ essendo soprainsieme di X.

- (4) $\Rightarrow$ (3) Ovvia perché, data $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$, esisterebbe per ipotesi, una g tale che $[g] = [f]$, con g costante o bigettiva. Dunque esiste un $A \in \mathcal{U}$ tale che $g|_A = f|_A$ e dunque $f|_A$ costante o iniettiva.
- (3) $\Rightarrow$ (4). Se esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è costantemente k, allora $[f] = [g]$ dove g è la funzione che vale costantemente k. Altrimenti esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva. Nel Lemma 1, sotto questa ipotesi, nel fare la seconda freccia, ho mostrato che se $f|_A$ è iniettiva, allora esiste una bigezione σ tale che $f \equiv_U \sigma$. Dunque $[f] = [\sigma]$, con σ bigezione, come volevo.

Esercizio 15: *A è spesso se e solo se esiste un $\mathcal{V}$ ultrafiltro non principale tale che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_A$ ovvero $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \forall \mathcal{U}$.*

Dimostrazione: Se A è spesso, ho mostrato in un pdf precedente, che esiste un $\xi \in {}^{\star}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tale che $A_\xi = \{n | \xi + n \in {}^{\star}A\} = \mathbb{N}$. Scelgo $\mathcal{V} = \sqcup_\xi := \{B \subseteq \mathbb{N} | \xi \in {}^{\star}B\}$. Abbiamo osservato a lezione che $\sqcup_\xi$ è un ultrafiltro non principale, poiché ξ è infinito. Provo che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Infatti $\{n | A - n \in \mathcal{V}\} = \{n | \xi \in {}^{\star}A - n\} = \mathbb{N}$ per quanto detto precedentemente. Dunque $\{n | A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ qualunque sia la scelta di $\mathcal{U}$.

Viceversa, se $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \forall \mathcal{U}$ allora $\{n | A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ qualunque sia la scelta di $\mathcal{U}$. Ciò significa che $\{n | A - n \in \mathcal{V}\}$ deve necessariamente essere $\mathbb{N}$ poiché appartiene a tutti gli ultrafiltri. Ma allora, essendo in un modello in cui vale il c-enlargement, per ogni $\mathcal{V}$ non principale esiste uno ξ ipernaturale infinito tale che $\mathcal{V} = \sqcup_\xi$. Dunque $A - n \in \sqcup_\xi \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque $\xi + n \in {}^{\star}A \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Per l'equivalenza su citata dimostrata in un pdf precedente, allora A è spesso.

Dalla precedente equivalenza se ne deduce *tout court* una successiva, notando che A sindetico $\Leftrightarrow A^c$ non è spesso. Dunque A sindetico se e solo se per ogni ultrafiltro $\mathcal{V}$ non principale, esiste un certo ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che $A^c \notin \mathcal{U} \oplus V$, ovvero $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, ovvero $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$. Dunque

Corollario 2: *A è sindetico se e solo se per ogni $\mathcal{V}$ non principale, $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$, ovvero se e solo se per ogni $\mathcal{V}$ non principale, esiste un certo $\mathcal{U}$ tale che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.*

Osservazioni Iniziali: Chiarisco alcune definizioni e convenzioni.

- Salvo indicazioni contrarie, tutte le famiglie $\mathcal{F}$ considerate da ora in poi saranno non vuote, costituite da sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ e chiuse per soprainsiemi.
- Una famiglia $\mathcal{F}$ è W.P.R. (*Weakly partition regular*) se $\forall \mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ esiste $F \in \mathcal{F}$ ed esiste $1 \leq i \leq r$ tale che $F \subseteq C_i$. (Vista la chiusura per soprainsiemi, la W.P.R. si può riformulare dicendo che in realtà (almeno) uno dei C_i deve appartenere a $\mathcal{F}$)
- Una famiglia $\mathcal{F}$ è P.R. (*Partition Regular*) se $\forall C_1 \cup \cdots \cup C_r \in \mathcal{F}$ esiste $F \in \mathcal{F}$ ed esiste $1 \leq i \leq r$ tale che $F \subseteq C_i$. (Vista la chiusura per soprainsiemi, la P.R. anche si può dicendo che in realtà uno dei C_i deve appartenere a $\mathcal{F}$)
- Data una famiglia $\mathcal{F}$ si dice che $\mathcal{F}^\star := \{A \subseteq \mathbb{N} | A \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}\}$

Osservazione 2: *Valgono le seguenti:*

1. $\mathcal{F}^\star = \{A \subseteq \mathbb{N} | A^c \notin \mathcal{F}\}$
2. $(\mathcal{F}^\star)^\star = \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F}^\star \supseteq \mathcal{G}^\star$
4. $\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)^\star = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i^\star$
5. $\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)^\star = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i^\star$

Dimostrazione:

1. Devo mostrare che $X = \{A \subseteq \mathbb{N} | A \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}\} = \{A \subseteq \mathbb{N} | A^c \notin \mathcal{F}\} = Y$. Se $A \in X$ ma per assurdo $A \notin Y$, allora $A^c \in \mathcal{F}$. Ma essendo $A \in X$ e $A^c \in \mathcal{F}$, $A \cap A^c \neq \emptyset$ che è assurdo. Se $A \in Y$ ma per assurdo $A \notin X$ allora esiste un $F \in \mathcal{F}$ tale che $A \cap F = \emptyset$. Ma allora, $F \subseteq A^c$. D'altra parte, vista la chiusura per soprainsieme, $A^c \in \mathcal{F}$, che è assurdo poiché $A \in Y$. Dunque $X = Y$.
2. $A \in (\mathcal{F}^\star)^\star \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{F}^\star \Leftrightarrow (A^c)^c = A \in \mathcal{F}$.
3. Mostro ($\Rightarrow$). Usando la caratterizzazione di (1), ho che se $A \in \mathcal{G}^\star$, allora $A^c \notin \mathcal{G}$. Siccome $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, allora $A^c \notin \mathcal{F}$. Dunque $A \in \mathcal{F}^\star$. La ($\Leftarrow$) si mostra applicando all'ipotesi la proprietà (2) e utilizzando il fatto precedente che passare alle famiglie duali rovescia le inclusioni.
4. $A \in \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)^\star \Leftrightarrow A^c \notin \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right) \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{F}_i \forall i \in I \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_i^\star \forall i \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i^\star$.
5. Si ottiene immediatamente dalla precedente usando $\mathcal{F}_i^\star$ e passando al duale.

Esercizio 15: *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia (con le convenzioni viste sopra). Mostrare che $\mathcal{F}^\star$ è un filtro se e solo se $\mathcal{F}$ è P.R.*

Dimostrazione: Mostro ($\Leftarrow$). Suppongo $\mathcal{F}$ P.R. Allora sia $A \in \mathcal{F}^\star$. Dunque $A^c \notin \mathcal{F}$. Se $B \supseteq A$, allora $A^c \supseteq B^c$ e dunque, vista la chiusura per sopra insieme della famiglia, $B^c \notin \mathcal{F}$ da cui $B \in \mathcal{F}^\star$ e dunque $\mathcal{F}^\star$ è chiuso per soprainsieme.

Siano ora $X, Y \in \mathcal{F}^\star$. Dunque $X^c \notin \mathcal{F}$ e $Y^c \notin \mathcal{F}$. La loro unione $X^c \cup Y^c$ non può stare in $\mathcal{F}$, poiché vista la definizione di famiglia P.R. e vista la chiusura per soprainsiemi ciò significherebbe che uno dei due dovrebbe stare in $\mathcal{F}$. Dunque $(X \cap Y)^c \notin \mathcal{F}$ e dunque $X \cap Y \in \mathcal{F}^\star$ e dunque $\mathcal{F}^\star$ è un filtro.

Mostro ($\Rightarrow$). Suppongo che $\mathcal{F}$ non sia P.R. Dunque esistono n insiemi appartenenti alla famiglia tali che $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$ ma $A_i \notin \mathcal{F}$ per ogni i. Ciò significa, però, che $A_i^c \in \mathcal{F}^\star$ per ogni i. Dunque, essendo $\mathcal{F}^\star$ un filtro, $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \in \mathcal{F}^\star$, ovvero per la stessa definizione di $\mathcal{F}^\star$, passando al complementare, $A_1 \cup \cdots \cup A_n \notin \mathcal{F}$ che è assurdo.

Esercizio 16: *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia (con le convenzioni viste sopra). Mostrare che $\mathcal{F}^\star$ ha la F.I.P. se e solo se $\mathcal{F}$ è W.P.R.*

Dimostrazione: Mostro ($\Leftarrow$). Suppongo che $\mathcal{F}^\star$ non abbia la F.I.P. Dunque esistono in $\mathcal{F}^\star$ n sottoinsiemi tali che $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset$. Ciò significa che $A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c = \mathbb{N}$ e vista la W.P.R. e la chiusura per soprainsieme, esiste un certo i per cui $A_i^c \in \mathcal{F}$. Ma ciò è assurdo poiché $A_i^c \notin \mathcal{F}$ visto che $A_i \in \mathcal{F}^\star$.

Mostro ($\Rightarrow$). Voglio mostrare che $\mathcal{F}$ è W.P.R. Sia allora $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \mathbb{N}$ un unione degli elementi della famiglia e suppongo per assurdo che nessuno di essi appartenga a $\mathcal{F}$. Allora $A_i^c \in \mathcal{F}^\star$ e per la F.I.P. $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \neq \emptyset$. Dunque passando al complementare $A_1 \cup \cdots \cup A_n \neq \mathbb{N}$ che è in contraddizione con l'ipotesi.

In conclusione si può notare che $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\star$ se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro. Dunque si possono formulare anche le seguenti:

Esercizio 17: *$\mathcal{F}^\star$ ha la F.I.P. se e solo se esiste $\mathcal{U}$ ultrafiltro tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$. Inoltre $\mathcal{F}^\star$ è un filtro se e solo se $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{U} | \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}\}$.*

Dimostrazione: E' chiaro, per le proprietà inziali degli ultrafiltri, che una famiglia ha la F.I.P. se e solo se esiste un ultrafiltro che la estende. Dunque $\mathcal{F}^\star$ ha la F.I.P. se e solo se esiste $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tale che $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}^\star$. Passando ai duali, usando l'**Osservazione 1** (Punto (2) e (3)) ciò avviene se e solo se esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, appunto ciò che si voleva.

L'ultima equivalenza si ottiene notando che, se $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri contenuti in $\mathcal{F}$, allora passando ai duali, $\mathcal{F}^\star$ è intersezione di ultrafiltri che contengono $\mathcal{F}^\star$. Ma in generale, intersezione di ultrafiltri è sempre un filtro, dunque $\mathcal{F}^\star$ è un filtro. Viceversa, se $\mathcal{F}^\star$ è un filtro, allora è esattamente l'intersezione di tutti gli ultrafiltri che lo estendono (infatti è semplice, fissato un sottoinsieme A non appartenente a un dato filtro, mostrare con Zorn l'esistenza di ultrafiltro che estende il filtro ma non possiede A fra i suoi elementi). Dunque $\mathcal{F}^\star = \bigcap\{\mathcal{U}|\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}^\star\}$. A questo punto passando ai duali e sfruttando l'**Osservazione 1**, si ha $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{U}|\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}\}$, come volevo.