Spettro Generalizzato di Tensori Supersimmetrici

Giulio Del Corso

16 Settembre 2016

Definizione (Tensore)

Sia $\mathbb{K}$ un campo reale o complesso. Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale E di dimensione n, un **tensore** è un'applicazione multilineare da m copie di E in $\mathbb{K}$:

$$T : E_{(1)} \times \cdots \times E_{(m)} \to \mathbb{K}.$$

Dove m è detto **ordine** del tensore e n è detta **dimensione** del tensore.

Definizione (Tensore)

Sia $\mathbb{K}$ un campo reale o complesso. Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale E di dimensione n, un **tensore** è un'applicazione multilineare da m copie di E in $\mathbb{K}$:

$$T : E_{(1)} \times \cdots \times E_{(m)} \to \mathbb{K}.$$

Dove m è detto **ordine** del tensore e n è detta **dimensione** del tensore.

Assegnata una base $\mathbb{B} = (v_1, ..., v_n)$ di uno spazio vettoriale n-dimensionale E, un tensore di ordine m è completamente determinato dai valori:

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_m} = T(v_{i_1}, ..., v_{i_m}).$$

Dove ciascuno degli m indici può variare in $1 \cdots n$.

Gli n^m valori ottenuti sono le **coordinate** rispetto alla base $\mathbb{B}$ del tensore. L'insieme di queste coordinate è detto **supermatrice**.

Gli n^m valori ottenuti sono le **coordinate** rispetto alla base $\mathbb{B}$ del tensore. L'insieme di queste coordinate è detto **supermatrice**.
Si indicheranno con $\mathbf{E}$ lo spazio dei vettori astratti e con E lo spazio dei vettori rappresentati in una base fissata, con $\mathbf{T} \in \mathbf{E}^m$ i tensori astratti di ordine m nello spazio dei vettori $\mathbf{E}$ e con $A \in E^m$ le supermatrici di ordine m nello spazio E dei vettori rappresentati in una base fissata.

Convenzioni adoperate

Osservazione

Si definisce:

$$Ax^{m-1} := \left(\sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{n} A_{i,i_2,\dots,i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \right).$$

Vale la relazione:

$$Ax^m = x^T A x^{m-1} = \sum_{i_1,\dots i_m=1}^{n} A_{i_1,\dots,i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}.$$

Convenzioni adoperate

Osservazione

Si definisce:

$$Ax^{m-1} := \left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n} A_{i,i_2,\ldots,i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \right).$$

Vale la relazione:

$$Ax^m = x^T A x^{m-1} = \sum_{i_1,\ldots i_m=1}^{n} A_{i_1,\ldots,i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}.$$

In analoga maniera si definisce $\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^{m-1}$, con $\cdot$ il prodotto scalare.

E-autovalori di Tensori

Definizione (E-autovalore di un Tensore)

Sia $\mathbf{T} \in \mathbf{E}^m$ e $m \geq 1$, un numero complesso $\lambda \in \mathbb{C}$ è un **E-autovalore** del tensore $\mathbf{T}$ se esiste un $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ tale che:

$$\begin{cases} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^{m-1} = \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1 \end{cases}$$

In questo caso si dice che $\mathbf{x}$ è un **E-autovettore** del tensore $\mathbf{T}$ associato all'E-autovalore λ.

E-autovalori di Supermatrici

Definizione (E-autovalore di una Supermatrice)

Sia $A \in E^m$ e $m \geq 1$, un numero complesso $\lambda \in \mathbb{C}$ è un **E-autovalore** della supermatrice A se esiste un $x \in E$ tale che:

$$\begin{cases} Ax^{m-1} = \lambda x \\ x^T x = 1 \end{cases}$$

in questo caso si dice che x è un **E-autovettore** della supermatrice A associato all'E-autovalore λ.

Invarianza dell'E-spettro

Invarianza dell'E-spettro

Teorema (Invarianza dell'E-spettro)

Gli E-autovalori di un tensore sono invarianti per cambio di base.

Invarianza dell'E-spettro

Teorema (Invarianza dell'E-spettro)

Gli E-autovalori di un tensore sono invarianti per cambio di base.

Definizione (Base ortonormale)

Una base $\{\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n\}$ è detta **ortonormale** se:

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_{ij}$$

Invarianza dell'E-spettro

Teorema (Invarianza dell'E-spettro)

Gli E-autovalori di un tensore sono invarianti per cambio di base.

Definizione (Base ortonormale)

Una base $\{\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n\}$ è detta **ortonormale** se:

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_{ij}$$

Teorema (Rappresentazione)

Gli E-autovalori di un tensore sono gli stessi della supermatrice che lo rappresenta in una base ortonormale arbitraria.

Controesempio

Gli E-autovalori presentano dei limiti nell'estendere il concetto di autovalore di matrici. In particolare esistono numerosi casi nei quali ogni numero complesso è un E-autovalore.

Esempio

Sia $m = 3$ ed $n = 2$, $A_{111} = A_{221} = 1$, 0 altrimenti. Allora:

$$\begin{cases} x_1^2 = \lambda x_1 \\ x_1 x_2 = \lambda x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

E per ogni numero complesso λ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \sqrt{1-\lambda^2} \end{pmatrix}$$

è soluzione di questo sistema. Dunque ogni numero complesso è un E-autovalore.

Supersimmetria

Definizione

Una supermatrice è detta **supersimmetrica** se è invariante per ogni permutazione degli indici.

Supersimmetria

Definizione

Una supermatrice è detta **supersimmetrica** se è invariante per ogni permutazione degli indici.

Esempio

Un esempio di supermatrice supersimmetrica 2-dimensionale di ordine 3 è data da:

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; T^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Infatti deve valere per supersimmetria: $A_{111} = 1$, $A_{222} = 2$, $A_{121} = A_{211} = A_{112} = 3$, $A_{212} = A_{221} = A_{122} = 4$. Si ottengono quindi 4 elementi indipendenti.

Inoltre ogni sezione (verticale, orizzontale, etc.) sarà a sua volta simmetrica.

Autovalori di Tensori

Definizione (Autovalore)

Un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è detto un **autovalore** di $A \in E^m$ se esiste un vettore $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ che soddisfa l'equazione:

$$Ax^{m-1} = \lambda \left(x_i^{m-1}\right)_{i=1,\cdots,n}.$$

x è detto **autovettore** associato all'autovalore λ.

Iperdeterminante

Definizione (Iperdeterminante simmetrico)

Per una supermatrice supersimmetrica $A \in E^m$ si definisce il suo **iperdeterminante simmetrico**, indicato da $\det(A)$, come un polinomio irriducibile in $A_{i_i,\ldots,i_m}$ che si annulla ogni volta che esiste un $x \in \mathbb{C}^n$; $x \neq 0$ tale che $f(x) = 0$ e il suo gradiente $\nabla f(x) = 0$. Dove $f(x) = Ax^m = x^T A x^{m-1} = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} A_{i_1,\cdots,i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}$.

Iperdeterminante

Definizione (Iperdeterminante simmetrico)

Per una supermatrice supersimmetrica $A \in E^m$ si definisce il suo **iperdeterminante simmetrico**, indicato da $\det(A)$, come un polinomio irriducibile in $A_{i_i,\dots,i_m}$ che si annulla ogni volta che esiste un $x \in \mathbb{C}^n$; $x \neq 0$ tale che $f(x) = 0$ e il suo gradiente $\nabla f(x) = 0$. Dove $f(x) = Ax^m = x^T Ax^{m-1} = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} A_{i_1,\cdots,i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}$.

Definizione (Polinomio Caratteristico)

Il polinomio:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

è detto il **polinomio caratteristico** della supermatrice A.

Proposizione (Esistenza)

Gli autovalori (reali) e gli E-autovalori (reali) esistono per un tensore supersimmetrico di ordine pari A.

Proposizione (Esistenza)

Gli autovalori (reali) e gli E-autovalori (reali) esistono per un tensore supersimmetrico di ordine pari A.

Esempio

Sia A una supermatrice supersimmetrica di ordine non pari.
$A_{111} = b$, $A_{222} = d$, $A_{112} = A_{121} = A_{211} = -a$,
$A_{212} = A_{122} = A_{221} = a > 0$. Siano $c = \frac{b-d}{2}$ e $\varepsilon = \frac{b+d}{2} - \lambda$.
La ricerca degli autovalori si riduce a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} (b-\lambda)x^2 - 2axy + ay^2 = 0 \\ -ax^2 + 2axy + (d-\lambda)y^2 = 0 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è dunque:

$$p(\lambda) = \varepsilon^4 - (2x^2 - 6a^2)\varepsilon^2 + (c^4 - 6a^2c^2 + 8a^3c - 3a^4).$$

In particolare, se $c = \sqrt{3}a$, allora $p(\lambda) = \varepsilon^4 + (8\sqrt{3} - 12)a^4 > 0$.
Il sistema non ha dunque soluzioni reali.

Teorema

Valgono le seguenti conclusioni riguardanti gli autovalori di A, supermatrice supersimmetrica:

Teorema

Valgono le seguenti conclusioni riguardanti gli autovalori di A, supermatrice supersimmetrica:

1. *Un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di una supermatrice A se e solo se è radice del polinomio caratteristico ϕ.*

Teorema

Valgono le seguenti conclusioni riguardanti gli autovalori di A, supermatrice supersimmetrica:

1. *Un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di una supermatrice A se e solo se è radice del polinomio caratteristico ϕ.*
2. *Il numero degli autovalori di A è $d = n(m-1)^{n-1}$.*
   Il loro prodotto è uguale a $\det(A)$.

Teorema

Valgono le seguenti conclusioni riguardanti gli autovalori di A, supermatrice supersimmetrica:

1. *Un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di una supermatrice A se e solo se è radice del polinomio caratteristico ϕ.*
2. *Il numero degli autovalori di A è $d = n(m-1)^{n-1}$.*
   Il loro prodotto è uguale a $\det(A)$.
3. *Se A è diagonale, allora A ha n autovalori reali.*

Positività

Definizione (Supermatrice definita positiva)

Una supermatrice supersimmetrica di ordine pari è detta **definita positiva** se per ogni $x \in E, x \neq 0$ vale $Ax^m > 0$.

Positività

Definizione (Supermatrice definita positiva)

Una supermatrice supersimmetrica di ordine pari è detta **definita positiva** se per ogni $x \in E, x \neq 0$ vale $Ax^m > 0$.

Esempio

Un esempio di supermatrice definita positiva di ordine 4 e dimensione 2 è $A = (A_{abcd})$ con $A_{1111} = 3, A_{2222} = 2, A_{abcd} = 0$ altrimenti. Infatti il polinomio associato Ax^m è:

$$A_{1111}x_1x_1x_1x_1 + A_{2222}x_2x_2x_2x_2 = 3x_1^4 + 2x_2^4 \geq 0.$$

Applicazione: Positività

Se si vuole studiare la positività di un polinomio $f(x)$, esso si può associare ad una supermatrice A mediante la relazione $Ax^m = f(x)$.

Applicazione: Positività

Se si vuole studiare la positività di un polinomio $f(x)$, esso si può associare ad una supermatrice A mediante la relazione
$Ax^m = f(x)$.
Se A non è supersimmetrica essa può essere sostituita dalla sua simmetrizzata $sym(A)$ costruita mediante la relazione:

$$sym(A)_{i_1,\cdots,i_m} := \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \varrho} A_{\pi(i_1,\cdots,i_m)}.$$

Con ϱ l'insieme delle permutazioni degli indici.

Applicazione: Positività

Se si vuole studiare la positività di un polinomio $f(x)$, esso si può associare ad una supermatrice A mediante la relazione $Ax^m = f(x)$.

Se A non è supersimmetrica essa può essere sostituita dalla sua simmetrizzata $sym(A)$ costruita mediante la relazione:

$$sym(A)_{i_1,\cdots,i_m} := \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \varrho} A_{\pi(i_1,\cdots,i_m)}.$$

Con ϱ l'insieme delle permutazioni degli indici.

Per $sym(A)$ vale ancora la relazione $f(x) = sym(A)^m$.

Un metodo per determinare la positività associando al polinomio una supermatrice è il seguente.

Esempio

Sia A una supermatrice supersimmetrica i cui coefficienti rispettano

$$\begin{cases} A_{1111} = A_{2222} = A_{1122} = A_{2211} = 1 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Per costruzione questa supermatrice non è supersimmetrica, il polinomio associato ad A è $f_A(x) = (x_1^2 + x_2^2)^2$.
Sfruttando la formula precedente si ottiene la seguente matrice simmetrizzata $sym(A)$

$$\begin{cases} A_{1111} = A_{2222} = 1 \\ A_{1122} = A_{2211} = A_{1212} = A_{2121} = A_{1221} = A_{2112} = \frac{1}{3} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Questa supermatrice è supersimmetrica ed il polinomio ad essa associato è ancora $f_{sym(A)}(x) = (x_1^2 + x_2^2)^2$.

Metodi

Due proposizioni utili per studiare la positività di una supermatrice o di un polinomio ad essa associato sono le seguenti:

Metodi

Due proposizioni utili per studiare la positività di una supermatrice o di un polinomio ad essa associato sono le seguenti:

Proposizione

A è definita positiva se e solo se i suoi autovalori reali (E-autovalori reali) sono positivi.

Metodi

Due proposizioni utili per studiare la positività di una supermatrice o di un polinomio ad essa associato sono le seguenti:

Proposizione

A è definita positiva se e solo se i suoi autovalori reali (E-autovalori reali) sono positivi.

Metodo

Se la radice più piccola di ϕ è positiva $\implies$ A è definita positiva.
Se la radice più grande di ϕ è negativa $\implies$ A è definita negativa.

Gershgorin generalizzato

Teorema

Sia A una supermatrice supersimmetrica.
Gli autovalori di A giacciono nell'unione di n dischi in $\mathbb{C}$.
Questi n dischi hanno gli elementi diagonali della supermatrice supersimmetrica come centri e la somma dei valori assoluti degli elementi non diagonali come loro raggi.

Gershgorin generalizzato

Teorema

Sia A una supermatrice supersimmetrica.
Gli autovalori di A giacciono nell'unione di n dischi in $\mathbb{C}$.
Questi n dischi hanno gli elementi diagonali della supermatrice supersimmetrica come centri e la somma dei valori assoluti degli elementi non diagonali come loro raggi.
Se uno di questi n dischi è disgiunto dagli altri $n-1$ dischi, allora contiene esattamente $(m-1)^{n-1}$ autovalori.
Se m è pari allora c'è almeno un autovalore reale che giace sul disco.

Gershgorin generalizzato

Teorema

Sia A una supermatrice supersimmetrica.
Se k di questi n dischi sono connessi fra loro, ma disgiunti dagli altri $n-k$, allora ci sono esattamente $k(m-1)^{n-1}$ autovalori che giacciono nell'unione di questi k dischi.
Quando m è pari almeno un autovalore reale giace nell'intervallo reale dato dall'intersezione fra l'unione di questi cerchi e l'asse reale se una di queste tre condizioni è valida:

i) *k è dispari*

ii) *k è pari e gli altri $n-k$ dischi sono a sinistra di questa unione.*

iii) *k è pari e gli altri $n-k$ dischi sono a destra di questa unione.*

Congetture

Congetture

Congettura

Se k degli n dischi nel teorema di Gershgorin sono connessi ma disgiunti con gli altri $n - k$ dischi, allora al minimo k autovalori reali sono nell'intervallo dato dall'intersezione di questi k dischi con l'asse reale.

Congetture

Congettura

Se k degli n dischi nel teorema di Gershgorin sono connessi ma disgiunti con gli altri $n - k$ dischi, allora al minimo k autovalori reali sono nell'intervallo dato dall'intersezione di questi k dischi con l'asse reale.

Congettura

A ha al minimo n autovalori reali.

Congetture

Congettura

Se k degli n dischi nel teorema di Gershgorin sono connessi ma disgiunti con gli altri $n - k$ dischi, allora al minimo k autovalori reali sono nell'intervallo dato dall'intersezione di questi k dischi con l'asse reale.

Congettura

A ha al minimo n autovalori reali.

Teorema

Se A è una supermatrice supersimmetrica di ordine pari e dimensione n, allora esistono almeno n autovalori con n distinte coppie di autovettori associati.

Argomenti attuali di ricerca

- Determinare un algoritmo efficiente per la ricerca degli autovalori ed E-autovalori nel caso generale.
- Determinare un metodo iterativo efficiente per la ricerca del minimo/massimo autovalore.
- Estendere le proprietà a casi non supersimmetrici.
- Determinare sotto quali ipotesi si possa cambiare la base lasciando invariato lo spettro generalizzato.

Grazie dell'attenzione.