## Riepilogo di Geometria:

- **Assioma A1**

Per tutte le coppie di punti *P*,*Q* dell'insieme *S* è assegnato un numero reale (=)> 0, che si dice distanza di P da Q e si indica don *d*(P,Q)

1- Se i punti *P*,*Q* sono distinti è *d*(P,Q) > 0, se coincidono è *d*(P,Q) = 0
2- *d*(P,Q) = *d*(Q,P) (Proprietà di *Simmetria*)
3- *d*(P,Q) (=)< *d*(P,R) + *d*(R,Q) (*Disuguaglianza triangolare*)

Un insieme *S* in cui sia assegnata una distanza si dice uno SPAZIO. Abbiamo già usato questa parola, ed abbiamo già usato la parola PUNTO per indicare un suo elemento.

- **Assioma A2**

Per due punti distinti passa una ed una sola retta.

Due rette si dicono INCIDENTI se hanno esattamente un punto in comune, altrimenti si dicono PARALLELE.

- **Assioma A3**

Nel piano ci sono almeno tre punti non allineati.

- **Assioma A4**

Su ogni retta esistono due RELAZIONE DI ORDINE, FRA LORO OPPOSTE (diciamo che su una retta è stata stabilita una relazione di ordine se, dati due punti A e B, è possibile decidere quale dei due precede l'altro. Se A precede B scriviamo A (precede) B. Se per una delle due relazioni A (precede) B, per la relazione opposta B (precede) A).
Per ciascuna di queste relazioni valgono le proprietà seguenti:

1- Se A, B, C sono punti appartenenti ad una retta e, in una delle due relazioni d'ordine stabilite sulla retta, è A (precede) B (precede) C allora è
AC = AB + BC
2- Viceversa, se per tre punti D, E, F del piano vale l'uguaglianza DE + EF = DF, allora il punto E è allineato con D e F e si ha D (precede) E (precede) F, oppure
F (precede) E (precede) D

- **Assioma A5**

Fissata una semiretta u di origine O e fissato un numero reale positivo x esiste sulla semiretta un unico punto P tale che OP = x

Dato il segmento AB, esiste sulla semiretta con origine A contenente B un punto P tale che:
AP = ½ AB
È evidente che tale punto è il solo equidistante da A e da B, lo chiameremo PUNTO DI MEZZO del segmento AB.

- **Assioma A6**

Data nel piano una retta r, l'insieme complementare di r risulta suddiviso in due regioni non vuote, dette SEMIPIANI, con le seguenti proprietà:

1- Il segmento che congiunge due punti di uno stesso semipiano non taglia la retta r.
2- Il segmento che congiunge due punti di semipiani distinti taglia la retta r.

Un insieme K del piano si dice convesso se, presi due suoi punti P, Q, il segmento PQ che li congiunge è tutto contenuto in K.

- **Assioma A7**

Date nel piano due qualunque terne $\{P,r,\sigma\}$, $\{P^1,r^1,\sigma^1\}$, c'è una ed una sola isometria che porta la prima sulla seconda, cioè che porta P su $P^1$, la semiretta r sulla semiretta $r^1$, ciascun punto del semipiano σ in un punto del semipiano $\sigma^1$.
(al massimo tre passaggi)

- **Assioma A8**

È unica la parallela mandata ad una retta da un punto esterna ad essa.

- **Assioma A9**

Esiste un'unica applicazione, detta misura angolare, che fa corrispondere ad un angolo piatto un numero reale non negativo.

- **Teorema T1**

Siano A, B, C, D, E, … punti del piano. Allora

AD (=)< AB + BC + CD
AE (=)< AB + BC + CD + DE

Dato un punto O ed un numero positivo r, si dice CIRCONFERENZA DI CENTRO O E RAGGIO R l'insieme dei punti del piano tali che OP = r.
Si dice CERCHIO DI CENTRO O E RAGGIO R l'insieme dei punti del piani tali che OP (=)< r.
Un punto del piano si dice interno o esterno al cerchio, o alla circonferenza, di centro O e raggio r, a seconda che la sua distanza da O sia minore o maggiore di r.

- **Teorema T2**

Se due insiemi H e K sono convessi allora la loro intersezione è un insieme convesso.

- **Teorema T3**

Un semipiano è un insieme convesso.

Si dice ANGOLO una coppia di semirette avente la stessa origine.

- **Teorema T4**

Dato un triangolo, una retta che non passa per alcuno dei suoi vertici, o non taglia alcun lato o ne taglia esattamente due.

- **Teorema T5**

Una retta che unisce un punto interno ad un triangolo con un vertice incontra il suo lato opposto.

- **Teorema T6**

Se le diagonali di un quadrilatero si tagliano in un punto interno ad entrambe, il quadrilatero è convesso.

- **Teorema T7**

Se una semiretta t ha origine sulla retta r, ma non è contenuta in r, allora è tutta contenuta in uno dei due semipiani che hanno come bordo r.

- **Teorema T8**

Se un quadrilatero è convesso allora le diagonali si incontrano in un punto interno ad entrambe.

- **Teorema T9**

In un quadrangolo convesso ciascun vertice è contenuto nell'angolo che ha come vertice il vertice opposto e i cui lati passano per gli altri due vertici.

- **Teorema T10**

Una semiretta che ha come origine nel vertice di un angolo e passa per un punto interno all'angolo è essa stessa interna all'angolo.

- **Teorema T11**

Dato un angolo (r,s) i punti interni di un segmento che unisce un punto A di r con un punto B di s (Corda dell'angolo) sono interni all'angolo.

- **Teorema T12**

Una semiretta che è interna ad un angolo e che ha origine nel suo vertice incontra una corda dell'angolo in un punto interno alla corda stessa.

- **Teorema T13 (1)**

Un'isometria trasforma una circonferenza in una circonferenza, un cerchio in un cerchio.

- **Teorema T14 (2)**

Un'isometria trasforma rette in rette, semirette in semirette e segmenti in segmenti.

- **Teorema T15 (3)**

Un'isometria trasforma un semipiano in un semipiano.

- **Teorema T16 (4)**

Data una retta r, esiste un'unica simmetria che ha per asse r. Essa è involutoria.

- **Teorema T17 (5)**

Esiste un'unica simmetria che scambia fra loro due punti (distinti) A, B e che muta in se ciascuno dei due semipiani originari della retta r che passa per A e per B. Essa è una simmetria assiale; il suo asse è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno uguale distanza da A e B e viene detto ASSE DEL SEGMENTO AB.

- **Teorema T18 (6)**

Se la retta s è ortogonale alla retta r, la retta r è ortogonale alla retta s.

- **Teorema T19 (7)**

Data una retta r e, in essa, il punto O, esiste un'unica retta s perpendicolare ad r in O.

- **Teorema T20 (8)**

Due rette r e s, ortogonali alla stessa retta r sono fra loro parallele.

- **Teorema T21 (9)**

Data una retta r e un punto P, esiste una parallela ad r passante per P.

- **Teorema T22 (10)**

Siano r ed s due semirette distinte, non allineate, con origine comune in O. Esiste un'unica simmetria assiale che scambia r con s e che trasforma la regione angolare (r,s) in sé.

- **Teorema T23 (1)**

Se la retta r è parallela a s e s e parallela a t allora r è parallela a t.

- **Teorema T24 (2)**

Le rette r ed s siano parallele, allora una retta t incidente all'una è incidente all'altra.

- **Teorema T25 (3)**

Se r ed s sono due rette parallele, una retta t ortogonale all'una è ortogonale all'altra

- **Teorema T26 (4)**

Siano r ed s due rette parallele e t una loro trasversale. Siano A e B rispettivamente i punti d'incontro di t con r e con s, e O il punto di mezzo del segmento AB. Si può affermare che la figura costituita dalle rette r, s, t è simmetrica rispetto al punto O.

- **Teorema T27 (5)**

Una simmetria centrale trasforma una retta in una retta ad essa parallela con verso opposto.

- **Teorema T28 (6)**

Un quadrangolo con i lati opposti paralleli ha un centro di simmetria, ossia è un parallelogrammo.

- **Teorema T29 (7)**

Un quadrangolo convesso che abbia due lati opposti paralleli e di uguale lunghezza è un parallelogrammo.

- **Teorema T30 (8)**

Un quadrangolo con i lati opposti paralleli (Cioè un parallelogrammo) che abbia un angolo retto è un rettangolo.

- **Teorema T31 (1 Angoli)**

Due angoli (r,s) ed ($r^1$,$s^1$) hanno la stessa misura se e sole se esiste un'isometria che trasforma l'uno nell'altro (Cioè se sono isometrici).

- **Teorema T32 (2 Angoli)**

In un triangolo A,B,C siano α, β, γ le misure degli angoli A, B, C e siano a, b, c le lunghezze dei lati opposti ad A, B, C (Rispettivamente). Allora, se $a > b$, si ha $\alpha > \beta$.

- **Teorema T33 (3 Angoli)**

In un triangolo A,B,C siano α, β, γ le misure degli angoli A, B, C e siano a, b, c le lunghezze dei lati opposti ad A, B, C (Rispettivamente). Allora, se $\alpha > \beta$, si ha $a > b$.

- **Teorema T34 (4 Angoli)**

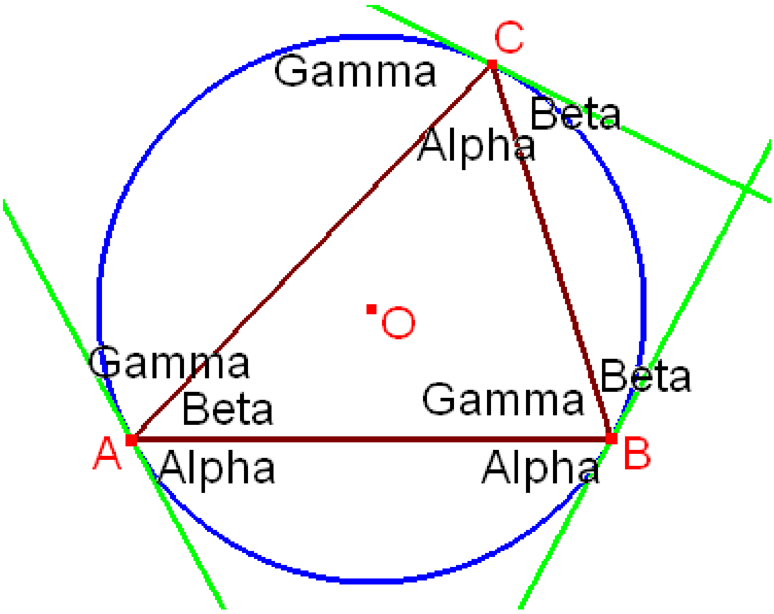
La somma delle misure degli angoli interni di un triangolo è II (La misura dell'angolo piatto).

- **Teorema T35 (5 Angoli)**

La somma delle misure degli angoli interni di un poligono convesso di *n* lati è (*n* – 2)II; la somma delle misure degli angoli esterni è 2II, indipendentemente dal numero dei lati.

- **Teorema T36 (6 Angoli)**

Tutti gli angoli inscritti in uno stesso arco hanno uguale ampiezza.




- **Teorema T37 (7 Angoli)**

Sia $T_1$ un arco della circonferenza T, di estremi A, B, capace di un'ampiezza δ; sia $s_1$ il semipiano avente per bordo la retta AB e contenente $T_1$. I punti di $s_1$ interni a T vedono la corda AB sotto un angolo minore di $\delta$, quelli esterni vedono la corda AB sotto un angolo minore di $\delta$.

- **Teorema T38 (8 Angoli)**

Un quadrilatero convesso ABCD è inscrivibile in una circonferenza se e soltanto se i suoi angoli sono supplementari.

- **Teorema T39 (9 Angoli)      I Criterio di congruenza dei triangoli**

Due triangoli ABC e $A^1B^1C^1$ siano tali che:
$AB = A^1B^1$
$AC = A^1C^1$
(Angolo) BAC = (Angolo) $B^1A^1C^1$
Essi sono congruenti.

- **Teorema T40 (10 Angoli)      II Criterio di congruenza dei triangoli**

Due triangoli ABC e $A^1B^1C^1$ siano tali che:
$AB = A^1B^1$
(Angolo) BAC = (Angolo) $B^1A^1C^1$
(Angolo) ABC = (Angolo) $A^1B^1C^1$
Essi sono congruenti.

- **Teorema T41 (11 Angoli)      III Criterio di congruenza dei triangoli**

Due triangoli ABC e $A^1B^1C^1$ siano tali che:
$AB = A^1B^1$
$AC = A^1C^1$
$BC = B^1C^1$
Essi sono congruenti.

- **Teorema "Plus 1"**

L'angolo al centro è sempre doppio rispetto all'angolo sulla circonferenza.

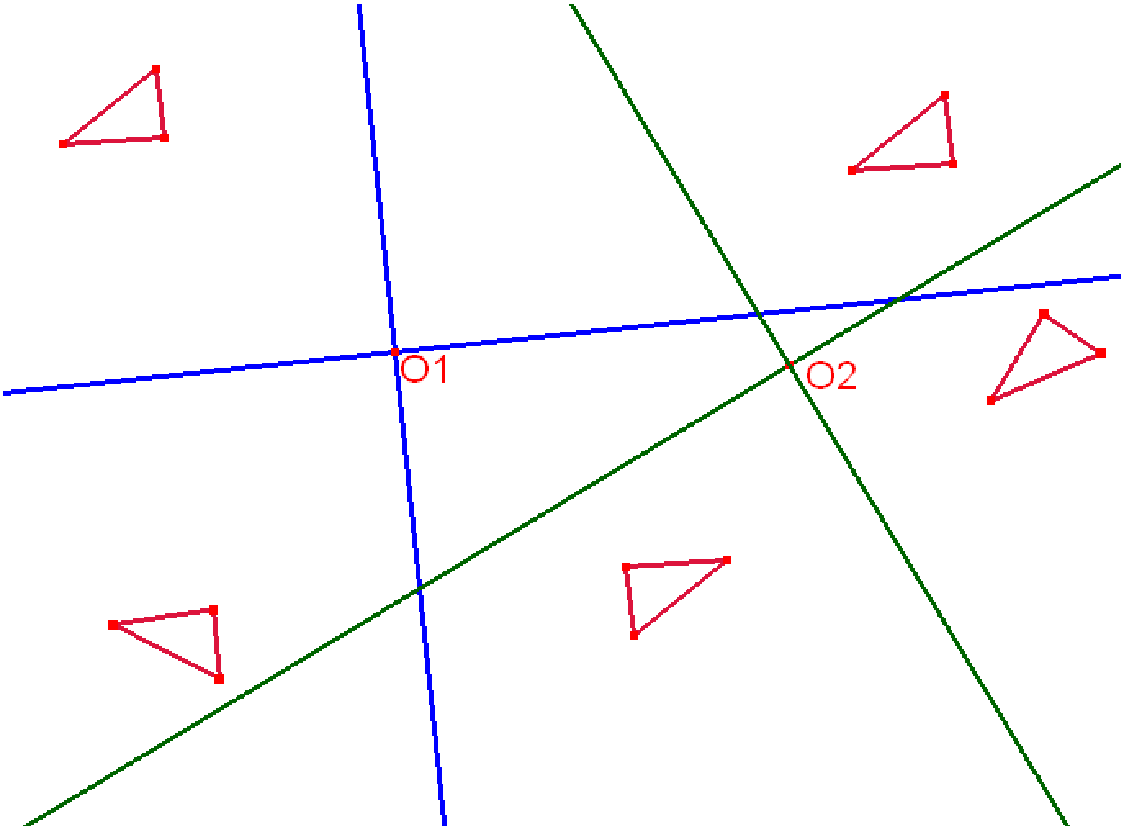
- **Teorema "Plus 2"**

L'angolo sull'arco maggiore della circonferenza è acuto, sull'arco minore è ottuso.

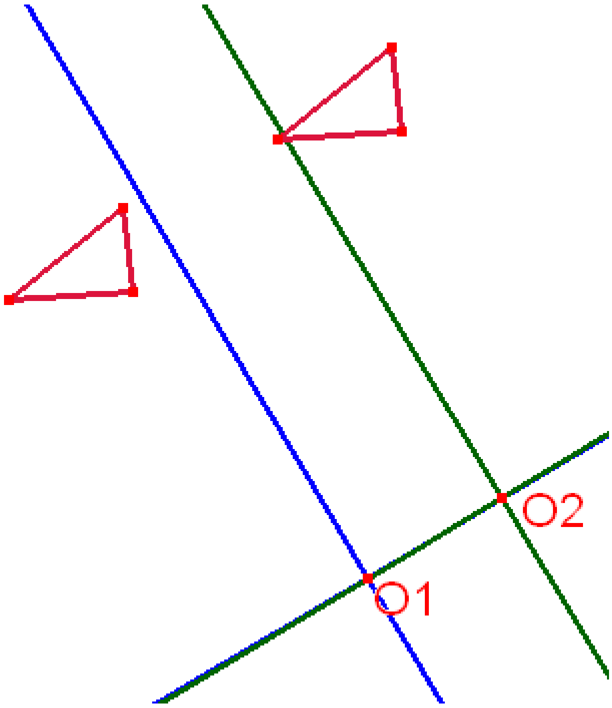
**Angoli associati** sono gli angoli formati dalla tangente in B del teorema 6.

**Isometrie: La rotazione**
Due simmetrie assiali perpendicolari formano una simmetria centrale nel punto d'incontro degli assi di simmetria.

Due simmetrie centrali formano una traslazione.

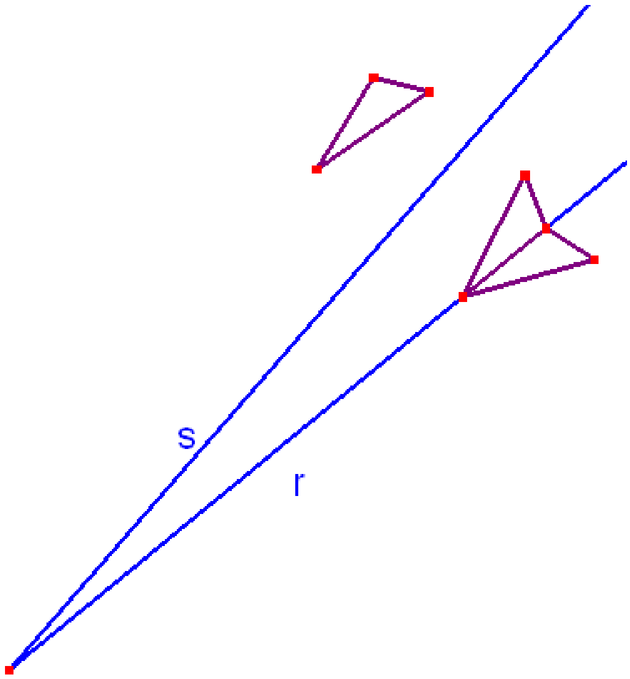



Orientando le rette (Gli assi delle simmetrie assiali) possiamo ottenere:

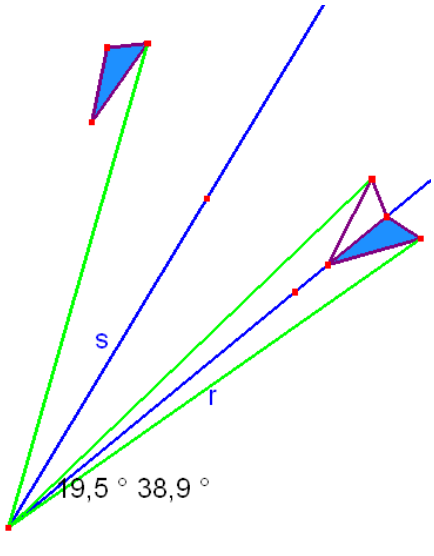


Ciascuna delle simmetrie è stata fatta doppia, quindi delle quattro simmetrie in realtà ne abbiamo due che sono la stessa retta, le altre due sono significative, quella invece si annulla. Il vettore spostamento è perpendicolare agli assi significativi. La distanza fra gli assi è la metà del vettore spostamento.

**2)**




Scambiano due volte nelle simmetrie centrale possiamo osservare che il semipiano si scambia due volte; di conseguenza il semipiano finale è lo stesso iniziale. Possiamo osservare che la distanza di un punto e del suo ruotato dal centro è uguale.




L’angolo fra il punto ed il proprio ruotato è il doppio dell’angolo fra le semirette.

L’unico punto fisso è il centro.

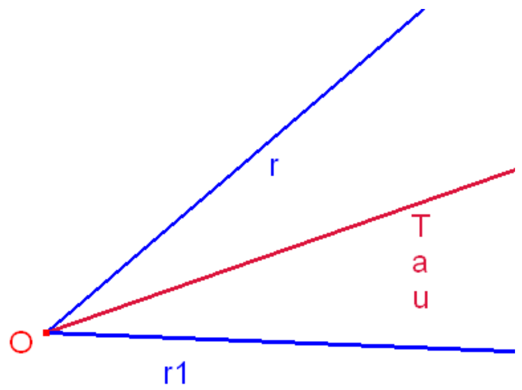
Se l’angolo fra le semirette è di 90°, l’angolo che si forma è doppio, 180°, di conseguenza è una simmetria centrale. **La simmetria centrale è una rotazione di 180°.**

La simmetria assiale non è mai un’identità. La traslazione è un’identità quando il vettore è 0, la rotazione è un’identità quando l’angolo fra gli assi è 0.

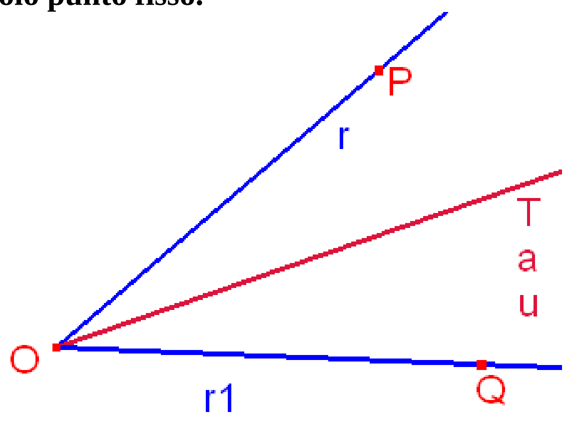
Nella rotazione l’angolo è sempre **convesso.**

(P 222)

**Dimostrazione Teorema 11:**
Date due semirette r ed r1 e la semiretta Tau che ne è bisettrice.

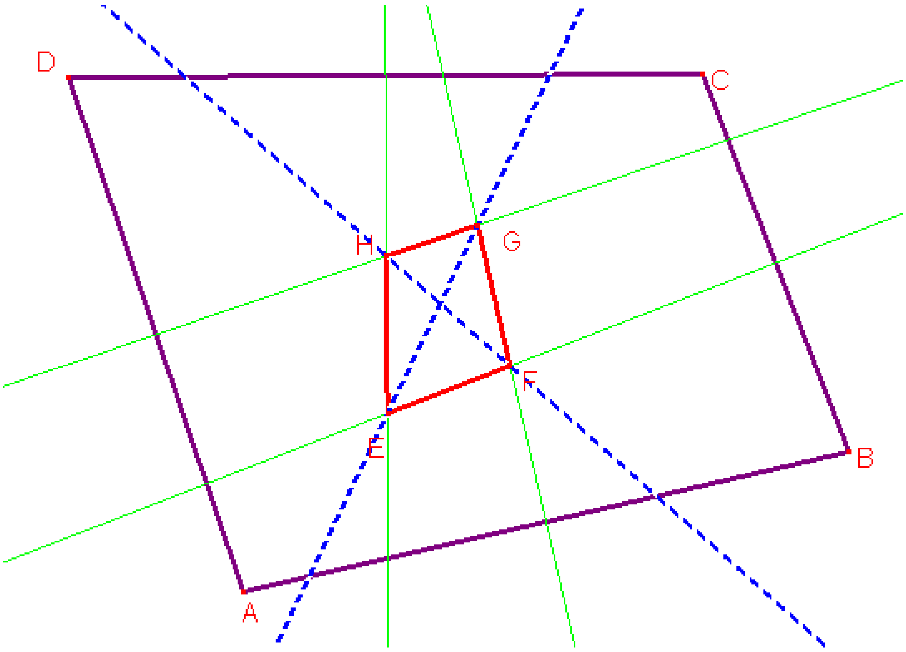



Se ci fosse un secondo punto O fisso; le tre rette coinciderebbero perché il secondo punto sarebbe comune a tutte e tre le rette e, di conseguenza, non sarebbe una rotazione ma una simmetria assiale. **Quindi la rotazione ha un solo punto fisso.**



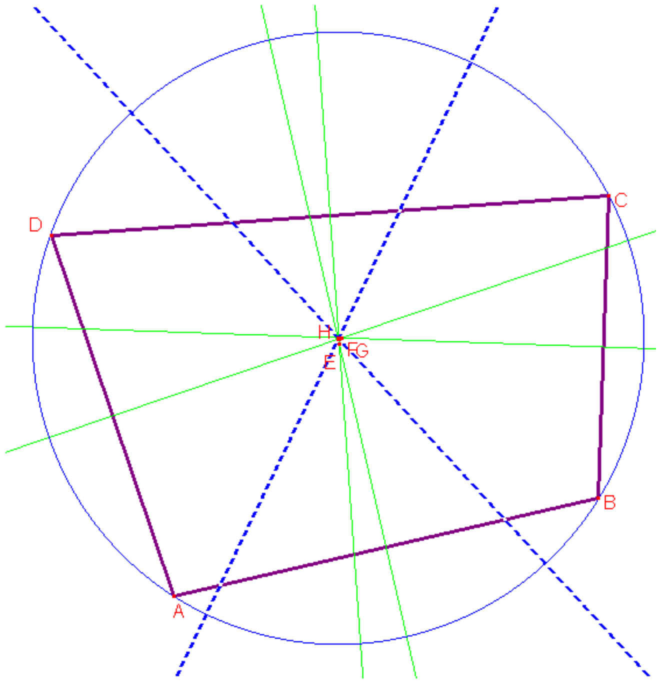

La simmetria di asse Tau del punto P origina il punto Q. P lo possiamo ottenere, sostenendo che ci sia un altro punto in comune, attraverso la simmetria assiale di asse $r^1$ del punto Q. Quindi le due rette coincidono ($r^1$ e Tau) e, essendo Tau la bisettrice, allora $r^1$, Tau e r coincidono.

**Relazione sulle proprietà di un quadrilatero:**
Vogliamo analizzare le proprietà della figura delineata dall'incontro degli assi dei quattro angoli di un quadrilatero. Per prima cosa costruiamo la figura prendendo quattro punti mobili (ABCD), collegandoli fra loro con dei segmenti. Tracciamo l'asse di ciascun segmento ed individuiamo punti d'incontro degli assi (HGFE).




Possiamo osservare che questi punti, a loro volta, formano un quadrilatero, vogliamo quindi studiare le proprietà di questo quadrilatero, degli angoli che forma.

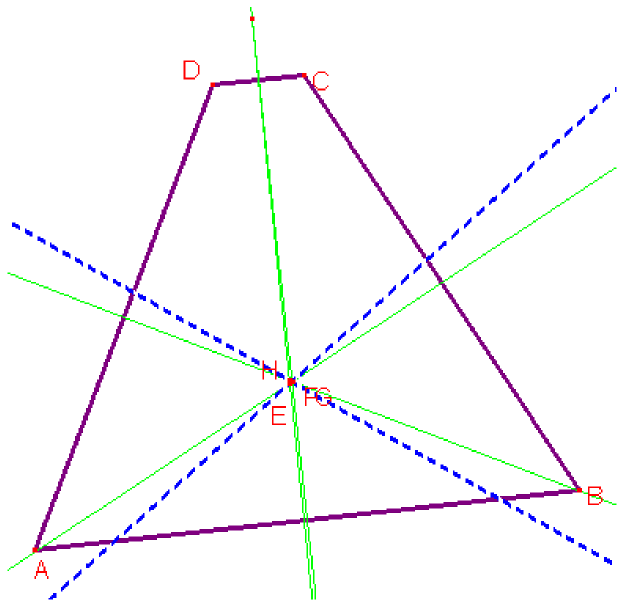
Sappiamo che l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai due estremi segmenti, quindi se costruissimo una circonferenza di raggio OD sull'asse del segmento DC e mettessimo il punto O sull'asse stesso, la circonferenza incontrerebbe anche il punto C. Valendo questa relazione anche per gli altri tre assi della figura significa che, **quando tutti gli assi hanno un punto in comune, quello è il centro della circonferenza che inscrive il cerchio.**



In questo caso, però, non esiste un quadrilatero interno, coincidendo tutti e quattro i punti HEFG che lo formano, bensì solamente un punto.

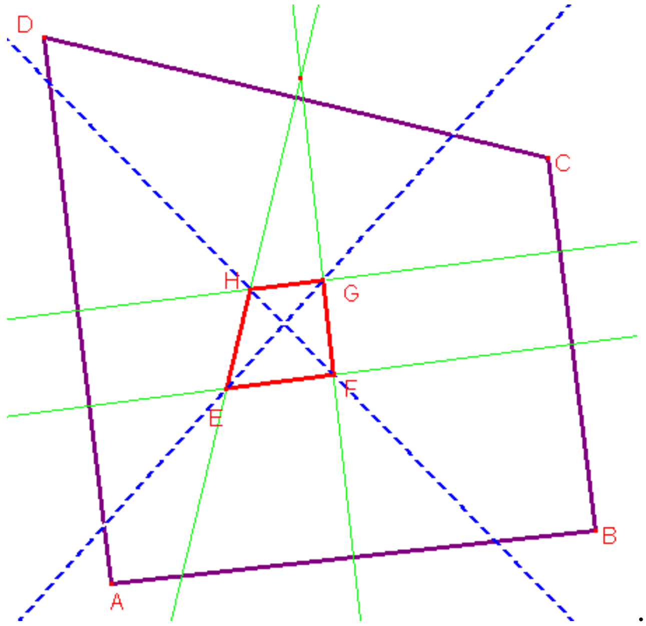
**Casi particolari:**
Studiamo adesso alcuni casi particolari:

**Trapezio Isoscele:**



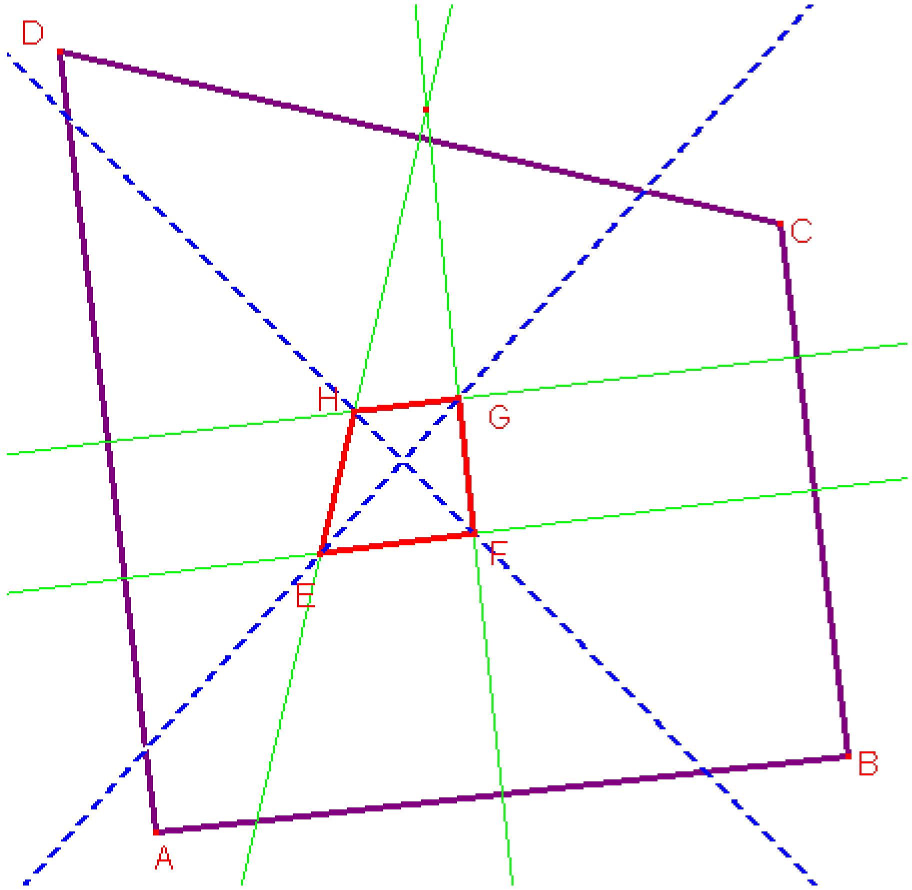

Possiamo osservare che gli assi si incontrano solamente in un punto (La figura è quindi inscrivibile in un cerchio), la particolarità è però negli assi delle basi (Maggiore e minore) essi, infatti, coincidono. Studiando gli angoli possiamo osservare che gli angoli opposti della figura maggiore sono supplementari

**Trapezio Rettangolo:**

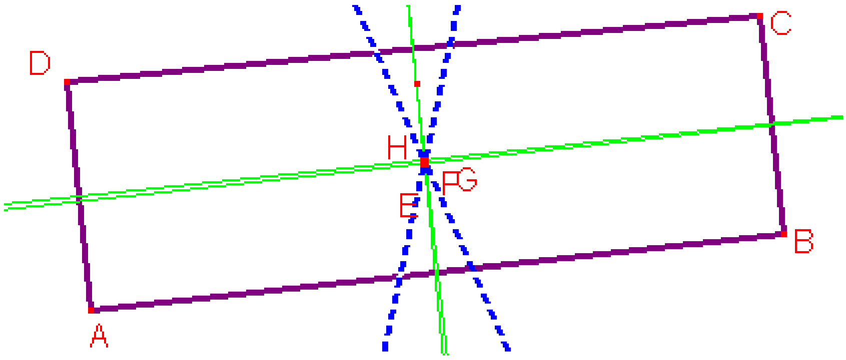



Non coincidendo i quattro punti d’intersezione degli assi la figura non può essere inscritta in una circonferenza.

Gli assi dei lati opposti paralleli, però, mantengono il loro parallelismo e sono entrambi perpendicolari all'asse dell'angolo con cui formano un angolo di 90°. Di conseguenza la figura che risulta dall'intersezione degli assi sarà a sua volta un trapezio rettangolo.



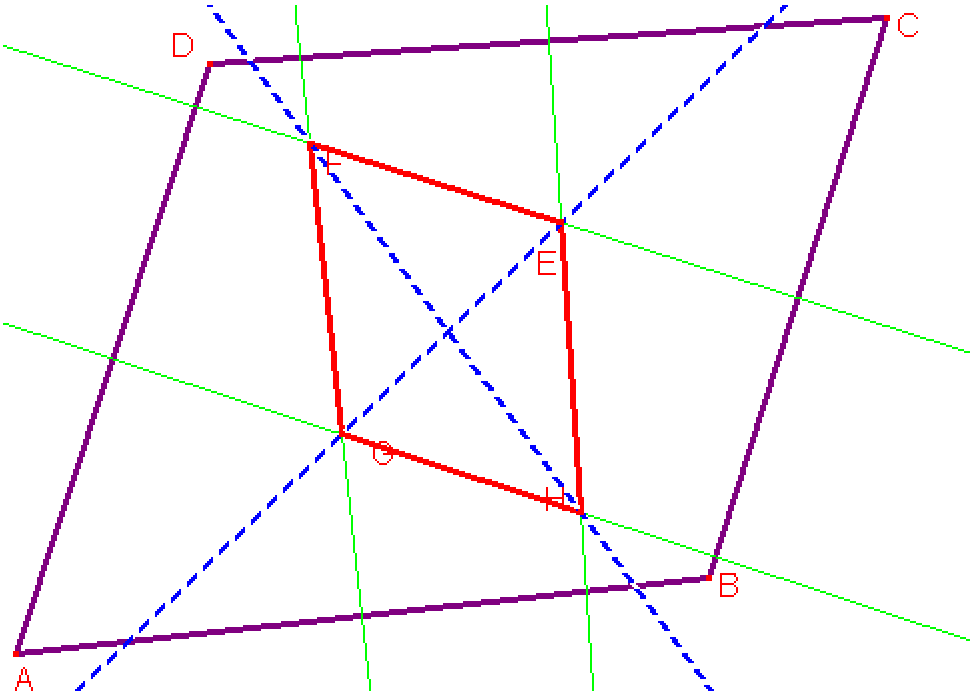

**Rettangolo:**




Nel caso del rettangolo gli assi di simmetria dei lati opposti coincidono, inoltre gli assi dei lati perpendicolari fra loro sono a loro volta perpendicolari. Gli assi sono anche gli assi di simmetria e si incontrano in un solo punto, centro di simmetria del rettangolo e centro del cerchi che inscrive il rettangolo stesso. Il raggio del cerchio è, nel caso del rettangolo, pari alla diagonale del rettangolo formato dagli assi. ($\sqrt{(Asse_{maggiore}^2/4+Asse_{minore}^2/4)}$). Anche il rettangolo, come il trapezio isoscele, ha i lati opposti supplementari.

Il quadrato ha le stesse caratteristiche del rettangolo (Tranne che gli assi sono uguali tra loro).

**Parallelogramma:**




Studiando infine il parallelogrammo possiamo studiare alcune caratteristiche; i lati sono a due a due paralleli e, di conseguenza, anche gli assi sono a due a due paralleli. Grazie alle proprietà degli angoli, sapendo che gli angoli opposti ABC e ADC (E anche BAD con DCB) sono uguali, possiamo ricavare che:

- Sia FEH e FGH, che EHG e GFE sono supplementari di angoli uguali e, pertanto, hanno la stessa ampiezza.

Possiamo concludere che EHG = BAD, FEH = ABC; DCB = GFE, ADC = FGH.
Quindi EFGH è un parallelogramma simile ad ABCD, con gli angoli opposti uguali ed inversi rispetto a quello maggiore.

**Conclusioni:**
Dopo aver analizzato queste figure, possiamo quindi fare un'affermazione (Non ancora, quindi, dimostrata, ma derivata solamente dall'osservazione).

**Se i lati opposti di una quadrilatero sono supplementari la figura è inscrivibile in una circonferenza.**