IstAlg: IV Foglio di Esercizi

Agnese Gini

12 gennaio 2016

1 Esercizio 77

Data una rappresentazione (V, σ), da qui in poi indicheremo dove serve con σ_V^m l'elemento $\sigma(m) \in GL(V)$.

i. Consideriamo $P = \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ con l'azione $\sigma_P^m(f(t)) = m \cdot f(t) = t^m f(t)$. Vogliamo dimostrare che è proiettivo. In particolare vogliamo provare che esiste un morfismo di rappresentazioni h che fa commutare in $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})$ ogni diagramma di questo tipo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ V \arrow[r, "g"] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Innanzi tutto osserviamo che, presa la base $\{t^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ di P, σ_P^m non è altro che uno shift degli elementi della base. Quindi ci basta fissare l'immagine di 1 perché dato ψ un morfismo di rappresentazioni deve valere $\psi(t^m) = \sigma_P^m \psi(1)$. Allora dato un diagramma come sopra, per suriettività esiste $v \in V$ tale che $g(v) = f(1)$ e allora possiamo definire $h(1) = v$.
Mostriamo adesso che ci sono abbastanza iniettivi. In realtà mostriamo qualcosa di più generale, ossia che la categoria $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})$ è equivalente alla categoria dei $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ moduli.
Prendiamo $V \in \mathrm{Rep}(\mathbb{Z})$. V è un $\mathbb{C}$ spazio vettoriale e ovviamente un $\mathbb{C}$ modulo; quello che dobbiamo fare per far vedere che è $P = \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ modulo è che cosa fa l'operazione

$$\mu \colon P \times V \longmapsto V$$

Utilizzando la struttura di spazio vettoriale possiamo ridurci a lavorare su una base, inoltre abbiamo anche definite le azioni $\mathbb{C}$ lineari σ_V e σ_P.
È ben definita allora

$$(t^m, v) \mapsto \sigma_V^m(v)$$

Verifichiamo che l'operazione rispetti tutte le proprietà richieste:

- Siano $p(t) = \sum_i a_i t^i \in P$ e $v, w \in V$ allora

$$\begin{aligned} p(t) \cdot (v+w) = &\sum_i a_i t^i \cdot (v+w) = \sum_i a_i \sigma_V^i(v+w) = \\ &= \sum_i a_i \sigma_V^i(v) + \sum_i a_i \sigma_V^i(w) = \\ &= p(t) \cdot v + p(t) \cdot w \end{aligned}$$

- Siano $p(t) = \sum_i a_i t^i \in P$, $q(t) = \sum_i b_i t^i \in P$ e $v \in V$ allora

$$\begin{aligned} (p(t)+q(t)) \cdot v = &(\sum_i (a_i+b_i) t^i \cdot v = \sum_i (a_i+b_i) \sigma_V^i(v) = \\ &= \sum_i a_i \sigma_V^i(v) + \sum_i b_i \sigma_V^i(v) = \\ &= p(t) \cdot v + q(t) \cdot v \end{aligned}$$

- Siano $p(t) = \sum_i a_i t^i \in P$, $q(t) = \sum_i b_i t^i \in P$ e $v \in V$ allora $(p(t)q(t)) \cdot v = p(t) \cdot (q(t) \cdot v)$, basta osservare che $\sigma_P^{m+n} = \sigma_P^m \circ \sigma_P^n$ e che vale la formula del prodotto di Cauchy.

Definiamo dunque il seguente funtore $\Gamma \colon \mathrm{Rep}(\mathbb{Z}) \to P$-mod: per quanto appena visto se $(V, \sigma_V) \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})$ possiamo porre $\Gamma(V) = V$; consideriamo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(V, W)$ e poniamo $\Gamma(f)(v) = f(v)$ per ogni $v \in V$, rimane da provare che $\Gamma(f) \in \mathrm{Hom}_P(V, W)$. Ovviamente rispetta la struttura di gruppo perché è di spazi vettoriali, dobbiamo verificare che $p(t) \cdot f(v) = f(p(t) \cdot v)$. Se $p(t) = \sum_i a_i t^i \in P$ allora

$$\begin{aligned} p(t) \cdot f(v) = &(\sum_i a_i t^i) \cdot f(v) = \sum_i a_i \sigma_W^i(f(v)) = \sum_i a_i f(\sigma_V^i(v)) = \\ &= f(\sum_i a_i \sigma_V^i(v)) = f(p(t) \cdot v). \end{aligned}$$

Proviamo adesso che Γ è un'equivalenza di categorie, ci basta mostrare le seguenti proprietà:

(a) Se $\Gamma(V)$ è isomorfo $\Gamma(W)$ allora V è isomorfo a W.

(b) Per ogni $V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})$ esiste Y in $\mathrm{Ob}\,P$-mod tale che $\Gamma(Y)$ è isomorfo a V,

(c) Per ogni V, W Γ induce una bigezione tra $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(V, W)$ e $\mathrm{Hom}_P(\Gamma(V), \Gamma(W))$.

Tuttavia risultano evidenti dalla definizione di Γ e dalle considerazioni già fatte.

ii. Il funtore $F\colon \operatorname{Rep}(\mathbb{Z}) \to \mathbf{Vett}_{\mathbb{C}}$ tale che $F(V) = V^{\mathbb{Z}}$ e ha come morfismi le restrizioni ai fissati, è esatto a sinistra. Infatti data una successione di rappresentazioni esatta a sinistra

$$0 \to V \xrightarrow{f} W$$

osserviamo che, anche in questa categoria, $\ker f$ è l'insieme degli elementi $x \in V$ tali che $f(x) = 0$. Dato che $F(V) = V^{\mathbb{Z}}$ è un sottospazio abbiamo che se $\ker f = 0$ allora $\ker f|_{V^{\mathbb{Z}}} = 0$, ossia

$$0 \to F(V) \xrightarrow{F} fF(W)$$

è esatta.
Il funtore non è però esatto, infatti prendiamo il seguente epimorfismo

$$\begin{array}{cccc} P & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} & \to 0 \\ 1 & \mapsto & 1 & \end{array}$$

dove le azioni sono rispettivamente quella del punto i. e quella banale. Ricordiamo che per quanto già osservato dare l'immagine di 1 equivale a descrivere tutto il morfismo, in particolare

$$g(t^m) = g(\sigma_P^m(1)) = \sigma_{\mathbb{C}}^m g(1) = g(1) = 1.$$

Ovviamente per linearità $\operatorname{Im} g = \mathbb{C}$. Passando ai fissati però abbiamo $F(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ mentre $F(P) = 0$, quindi $\operatorname{coker} Fg \neq 0$.

Osservazione 2. Prima di proseguire notiamo alcuni fatti. Consideriamo una morfismo in $\operatorname{Rep}(\mathbb{Z})$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} W$$

Allora φ è di rappresentazioni se e solo se $\varphi(1) \in W^{\mathbb{Z}}$; infatti deve valere per ogni $x \in \mathbb{C}$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(\sigma_{\mathbb{C}}^m(x)) = \sigma_W^m(\varphi(x))$$

ma poiché l'azione di $\mathbb{C}$ è banale e per la linearità questo equivale a

$$x\varphi(1) = x\sigma_W^m(\varphi(1))$$
$$\varphi(1) = \sigma_W^m(\varphi(1))$$

cioè $\varphi(1) \in W^{\mathbb{Z}}$.
Questo ci porta dire che come spazi vettoriali $W^{\mathbb{Z}}$ e $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Rep}(\mathbb{Z})}(\mathbb{C}, W)$ sono isomorfi, tramite la mappa

$$\begin{array}{cccc} \Phi_W\colon & W^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\operatorname{Rep}(\mathbb{Z})}(\mathbb{C}, W) \\ & w & \longmapsto & \phi_v\colon 1 \mapsto w \end{array}$$

Notiamo inoltre preso un morfismo di categorie $f\colon Y \to Z$, se $y \in Y^{\mathbb{Z}}$ allora $\sigma_Z^n(f(y)) = f(\sigma_Z^n(y)) = f(y)$, cioè $f(Y^{\mathbb{Z}}) \in Z^{\mathbb{Z}}$. Il seguente diagramma allora

$$\begin{tikzcd}
Y^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\Phi_Y"] \arrow[d, "Ff"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(\mathbb{C}, Y) \arrow[d, "f \circ _"] \\
Z^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\Phi_Z"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(\mathbb{C}, Z)
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Questo ci dice che Φ è una trasformazione naturale tra $F(\_)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(\mathbb{C}, \_)$.

iii. Alla luce dell'osservazione 2, $R^iF(\mathbb{C}) = \mathrm{Ext}^i(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ per ogni i. Per calcolarlo quindi possiamo partire da un risoluzione proiettiva di $\mathbb{C}$:

$$0 \to P \xrightarrow{1-t} P \to 0$$

Questa risoluzione non è altro che la risoluzione che si ottiene a partire dalla $g\colon P \to \mathbb{C}$ del controesempio nel punto ii. . Applicando il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(\_, \mathbb{C})$ otteniamo ovviamente che $R^0F(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ e $R^iF(\mathbb{C}) = 0$ per $i > 1$; ricordando quanto detto nel punto i. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(P, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ (l'isomorfismo è quello che manda φ in $\varphi(1)$), l'immagine del complesso allora è

$$0 \to C \xrightarrow{1-\sigma^1_{\mathbb{C}}(1)} C \to 0$$

Ma l'azione di $\mathbb{C}$ è banale e quindi $R^1F(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

iv. Come fatto nel punto precedente per calcolare $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{C}, V)$ quindi possiamo partire dalla risoluzione proiettiva di $\mathbb{C}$:

$$0 \to P \xrightarrow{1-t} P \to 0$$

Applicando il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(\_, V)$ otteniamo

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, V) \xrightarrow{\_\circ(1-t)} \mathrm{Hom}(P, V) \to 0$$

ovviamente che $\mathrm{Ext}^0(\mathbb{C}, V) = V^{\mathbb{Z}}$ e $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{C}, V) = 0$ per $i > 1$; sempre per quanto detto prima allora $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})}(\_, V) = V$ e

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}, V) = {V}\big/{\sigma^1_V V - V}.$$

3 Esercizio 79

$\mathbb{Z}$ è un anello noetheriano di dimensione 1 (PID), allora $\mathbb{Z}[x,y]$ ha dimensione 3. Inoltre

$$\mathbb{Z}[x,y] \big/ (5, x-1, y+2) \simeq \mathbb{F}_5$$

e quindi $\mathfrak{m} = (5, x-1, y+2)$ è massimale, perciò $A = \mathbb{Z}[x,y]_\mathfrak{m}$ è un anello noetheriano locale. Siamo nelle ipotesi del teorema della dimensione e visto che $\mathfrak{m}$ ha tre generatori allora $\dim A \leq 3$. Tuttavia la catena

$$(0) \subsetneq (5)_\mathfrak{m} \subsetneq (5, x-1)_\mathfrak{m} \subsetneq (5, x-1, y+2)_\mathfrak{m} \subsetneq A$$

è una catena di ideali primi, allora $\dim A = 3$. Da questo otteniamo anche che A è un anello regolare.
Sia $p(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + 6$. Consideriamo

$$B = A \big/ (p(x,y))$$

A è un dominio, perciò p non è un divisore di zero e dunque $\dim B = \dim A - 1 = 2$. Osserviamo che $p = (y+2)^2 + (x-1)(x-2)$; $x-2$ è invertibile in A perché se appartenesse a $\mathfrak{m}$ avremmo $x - 2 - x + 1 = -1 \in \mathfrak{m}$, allora in B abbiamo che $x - 1 \in (y+2)_\mathfrak{m}$ e quindi $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \big/ (p(x,y)) = (\bar{5}, \overline{y+2})$: anche B è regolare.

4 Esercizio 84

5 Esercizio 86

Sia $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi su un campo $\mathbb{K}$ e M un S modulo graduato finitamente generato. Vogliamo mostrare che M ha una risoluzione libera di lunghezza al più n; tuttavia questo risulta abbastanza facile avendo già dimostrato il seguente fatto:

Proposizione 1. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ anello noetheriano locale regolare e di dimensione n. Ogni A modulo finitamente generato ha una risoluzione libera lunga al più n.*

Quello che faremo perciò è ripercorrere i fatti che ci hanno portato a questo enunciato, correggendo le dimostrazioni dove necessario. Al posto di A troveremo S e al posto di $k = A/\mathfrak{m}$ il campo $\mathbb{K}$.

Dato che M finitamente generato, possiamo definire n_0 il minimo numero di generatori di M e sappiamo che esiste un omomorfismo di moduli graduati surgettivo tra $F^0 := A^{n_0}$ e M:

$$F^0 \xrightarrow{\partial^0} M \to 0$$

A partire da qui, iterativamente, possiamo costruire una risoluzione libera di M: indichiamo con n_i il minimo numero di generatori di $\ker \partial^{-i}$ e con $F^{-i} := A^{n_i}$.

Definizione 1. Una risoluzione

$$\dots \xrightarrow{\partial^{-4}} F^{-3} \xrightarrow{\partial^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^0 \xrightarrow{\partial^0} M \to 0$$

costruita come sopra è detta *risoluzione libera minimale.*

È fondamentale per la costruzione avere una condizione necessaria e sufficiente per capire quando una risoluzione è minimale:

Lemma 1. Una risoluzione libera di M è minimale se e solo se il complesso tensorizzato per k ha tutti i bordi nulli eccetto in zero, ossia $\bar{\partial}^{-i} := \partial^{-i} \otimes id_k = 0$ per $i > 0$.

La dimostrazione è pressoché identica a quella fatta per il caso noetheriano locale; l'unico modifica sostanziale da fare è all'inizio. Essa si basa infatti sul provare che

$$F^0 \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\bar{\partial}^0} M \otimes \mathbb{K} \to 0$$

è un isomorfismo. Non possiamo però più usare il Lemma di Nakayama per dire che $M \otimes \mathbb{K} = F^0 \otimes \mathbb{K} = \mathbb{K}^{n_0}$. Questo non è un problema, perché vale un risultato analogo per gli anelli graduati[1]:

Lemma 2. Sia S anello graduato e M un S modulo graduato finitamente generato tale che $S^+M = M$. Allora $M = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che $M = \oplus M_i \neq 0$, allora esiste

$$k = \min \{i \mid M_i \neq 0\}$$

. Dato che M è graduato per ogni j $S_j M_k \subseteq M_{j+k}$ e quindi

$$S^+ M_k \subseteq \oplus_{j>k} M_j$$

. Allora $M_k \nsubseteq S^+M = M$, assurdo. □

Questo ci dice che anche in questo caso

$$M \otimes \mathbb{K} = M \otimes {}^{S}\!/\!_{S^+} = {}^{M}\!/\!_{S^+M} = \mathbb{K}^{n_0}$$

e una mappa suriettiva di spazi vettoriali della stessa dimensione è anche iniettiva.
Il resto della dimostrazione è esattamente applicabile; e ci permette di provare il seguente fatto:

[1] È l'Esercizio 30.

Teorema 6. Sia S un anello graduato con $\mathbb{K} = S/S^+$ e M un S modulo finitamente generato. Siano poi $n = \operatorname{dhp} M$ e d la lunghezza di una risoluzione libera graduata minimale di M. Allora $n = d$ e

$$\operatorname{Tor}^i_S(M, \mathbb{K}) \begin{cases} = 0 & i > d; \\ \neq 0 & i \leq d, \end{cases}$$

Inoltre se

$$\ldots \xrightarrow{\partial^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^0 \xrightarrow{\partial^0} M \to 0$$

è una risoluzione libera minimale $n_i = \dim_k \operatorname{Tor}^i_S(M, \mathbb{K})$.

Il Teorema 6 mette in relazione la lunghezza di una risoluzione libera minimale di un modulo finitamente generato M con i $\operatorname{Tor}^i_S(M, \mathbb{K})$. Abbiamo mostrato tuttavia che il funtore derivato Tor è simmetrico nelle entrate, il prossimo passo allora è trovare una risoluzioni dell' S modulo $\mathbb{K}$. A tale scopo abbiamo definito il complesso di Koszul. A partire da una successione regolare di $x_1, \ldots, x_m \in A$ un anello e indicando con $N = A^m$ e $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in N$, è definito il *complesso di Koszul* $K^\bullet(\underline{x})$

$$\ldots 0 \xrightarrow{\partial_K^{-1}} \wedge^0 N \xrightarrow{\partial_K^0} \wedge^1 N \xrightarrow{\partial_K^1} \wedge^2 N \xrightarrow{\partial_K^2} \ldots \xrightarrow{\partial_K^{m-1}} \wedge^m M \to 0 \ldots$$

con $\partial^i_K = \_ \wedge \underline{x}$.
Affinché questo sia davvero un complesso c'è da verificare che $\partial^i_K \circ \partial^{i-1}_K = 0$, ma è ovviamente vero poiché il prodotto esterno è alternante e quindi $\partial^i_K \circ \partial^{i-1}_K(y) = y \wedge \underline{x} \wedge \underline{x} = 0$.
Nel nostro caso c'è da fare un'osservazione: il complesso così scritto non rispetta la struttura di moduli graduati, affinché questo accada basterà semplicemente cambiare il grado.
Il complesso di Koszul gode della seguente proprietà:

Teorema 7. Se $y_1, \ldots, y_m \in A$ è una successione regolare, allora

$$H^i(K^\bullet(\underline{y})) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq m \\ A \big/ (y_1, \ldots, y_m) & \text{se } i = m \end{cases}$$

Ovviamente le indeterminate $x_1, \ldots, x_n$ sono sono una successione regolare di S: ogni $I_i = (x_1 \ldots, x_i)$ è primo e dunque $S \big/ I_i$ non ha divisori di zero. Quindi $K^\bullet(x_1, \ldots, x_n)$ è la risoluzione di $\mathbb{K}$ che cercavamo.

8 Esercizio 87

Sia $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi su un campo $\mathbb{K}$ e M un S modulo finitamente generato. Se M è graduato sappiamo per l'Esercizio 86 che esiste

un risoluzione libera lunga al più n. Vorremmo quindi ricondurci al caso graduato.
M è finitamente generato, quindi può essere scritto come un quoziente di un modulo libero S^n e la successione

$$S^k \xrightarrow{g} S^h \xrightarrow{f} M \to 0$$

è esatta. L'idea è quella di rendere questa successione graduata, ossia poter fare in modo che le mappe agiscano su elementi omogenei. Un metodo standard[2] è quello di aggiungere una variabile e vedere S come

$$\mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \big/ (x_0 - 1)$$

Se prendiamo adesso i polinomi che determinano g e li omogeneizziamo otteniamo una successione esatta di $R = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ moduli

$$R^k \xrightarrow{G} R^h \xrightarrow{\tilde{f}_0} N \to 0$$

con $N = \text{coker} G$. Questo può essere visto come il primo passo per la costruzione di una risoluzione libera graduata di N. Allora prendiamo una tale risoluzione, che per l'esercizio precedente sara lunga al più $n + 1$ (abbiamo aggiunto una variabile)

$$0 \to F^{-n-1} \xrightarrow{\partial^{-n-1}} \ldots F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} R^k \xrightarrow{G} R^h \to 0$$

e mostriamo che da questa possiamo ottenerne una per M. Indichiamo con $I = (x_0 - 1) \subseteq R$, per quanto detto prima abbiamo però che

$$M = A^h \big/ g(A^k) = R^h \big/ G(R^k) \otimes_R R \big/ I = N \otimes_R S$$

infatti per costruzione $G = g \otimes id_S$. Applicando il funtore $\_ \otimes_R S$ otteniamo un complesso di S moduli liberi $C^\bullet$

$$0 \to F^{-n-1} \otimes_R S \xrightarrow{\bar{\partial}^{-n-1}} \ldots F^{-2} \otimes_R S \xrightarrow{\bar{\partial}^{-2}} A^k \xrightarrow{g} A^h \to 0$$

che è la nostra candidata risoluzione. Sappiamo già che la comologia in zero è M, dobbiamo dimostrare che per $i < 0$ il complesso è aciclico. Ma $H^{-i}(C^\bullet) = \text{Tor}^i(N, S)$, che sappiamo essere simmetrico. Prendiamo la risoluzione di S

$$0 \to R \xrightarrow{\cdot(x_0-1)} R \to 0$$

e applichiamo $\_ \otimes_R S$:

$$0 \to N \xrightarrow{\cdot(x_0-1)} N \to 0$$

[2]Basta pensare alle curve proiettive.

Ovviamente allora $\mathrm{Tor}^i(N,S) = \mathrm{Tor}^i(S,N) = 0$ per ogni $i > 1$. Se $x_0 - 1$ non divide zero in N, allora abbiamo anche $\mathrm{Tor}^1(S,N) = 0$.
Supponiamo che esista $n \in N$ tale che $(1 - x_0)n = 0$; dato che N è graduato possiamo scrivere n come somma di polinomi omogenei $n_d + n_{d+1} + \dots$ con $n_d \neq 0$, la condizione diventa allora

$$(1 - x_0)n_d + (1 - x_0)n_{d+1} + \cdots = n_d - (x_0 + n_{d+1}) + \cdots = 0$$

In particolare allora $n_d = 0$, assurdo.
Il complesso dunque $C^\bullet$ è la risoluzione lunga al più $n + 1$ che cercavamo.