Appunti del corso di Istituzioni di Algebra 2015/2016

Funtori Derivati e Applicazioni dell'Algebra Omologica

Agnese Gini

17 gennaio 2017

Indice

Capitolo 1

Moduli localmente liberi

Teorema 1.1. Sia A un anello noetheriano e M un A modulo finitamente generato. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

a. M proiettivo;

b. M_p libero per ogni p ideale primo di A;

c. $M_\mathfrak{m}$ libero per ogni $\mathfrak{m}$ ideale massimale di A;

d. esistono $a_1, \ldots, a_n \in A$ tali che l'ideale $(a_1, \ldots, a_n) = A$ e M_{a_i} è un A_{a_i} modulo libero per $i = 1, \cdots, n$.

Definizione 1. Se valgono a, b e c M, allora si dice *localmente libero.*

Lemma 1. Sia A un anello locale noetheriano e M un A modulo proiettivo finitamente generato. Allora M è libero.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Dato che il quoziente ${}^{M}\!/\!_{\mathfrak{m}M}$ è uno spazio vettoriale su $k = {}^{A}\!/\!_{\mathfrak{m}}$, possiamo prendere $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ una sua base con $x_i \in M$. Vogliamo mostrare che sono una base per M come A modulo. Per il lemma di Nakayama $x_1, \ldots, x_n$ generano M; prendiamo adesso il morfismo

$$\begin{array}{cccc} f\colon & A^n & \twoheadrightarrow & M \\ & e_i & \mapsto & x_i \end{array}.$$

se proviamo che è un isomorfismo, in particolare che $N := \ker f = 0$ abbiamo finito. M è proiettivo e dunque la successione

$$0 \longrightarrow N \to A^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

spezza, ossia $A^n \simeq N \oplus M$. Quozientando per $\mathfrak{m}$ otteniamo che

$${}^{A^n}\!/\!_{\mathfrak{m}A^n} \simeq {}^{N}\!/\!_{\mathfrak{m}N} \oplus {}^{M}\!/\!_{\mathfrak{m}M}$$

Osserviamo che $A^n/\mathfrak{m}A^n = k^n$ e dato che passando f a quoziente otteniamo un omomorfismo suriettivo, dovremmo necessariamente avere che $N/\mathfrak{m}N = 0$ che implica $N = 0$. □

Lemma 2. Sia A un anello noetheriano e p un suo ideale primo, M e N due A moduli finitamente generati. Se $M_p \simeq N_p$ allora esiste $a \notin p$ tale che $M_a \simeq N_a$.

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti successioni

$$\begin{array}{ccccc} A^h & \xrightarrow{\alpha} & A^n & \twoheadrightarrow & M \\ & & e_i & \mapsto & m_i \end{array}.$$

$$\begin{array}{ccccc} A^k & \xrightarrow{\beta} & A^n & \twoheadrightarrow & N \\ & & e_i & \mapsto & n_i \end{array}.$$

Localizzando con p si ha

$$\begin{tikzcd} A_p^h \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_p^m \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & M_p \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"'] & 0 \arrow[d, "0"'] \\ A_p^k \arrow[r] & A_p^n \arrow[r] & N_p \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dove φ_0 è un isomorfismo con in inverso ψ_0. Esiste $s \notin p$ tale che la matrice $n \times m$ che rappresenta φ_1 è

$$\left(\frac{a_{ij}}{s}\right)_{i=1\ldots n\, j=1\ldots m}$$

con $a_{ij} \in A$. In particolare φ_1 è una mappa tra A_s^m e A_s^n; vogliamo mostrare ora che, a meno di sostituire opportunamente s, esistono anche $\tilde{\varphi}_2$ e $\tilde{\varphi}_0$ e che quest'ultima ha un'inversa $\tilde{\psi}_0$.

$$\begin{tikzcd} A_s^h \arrow[r, "\alpha_s"] \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}_2"'] & A_s^m \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & M_s \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}_0"'] & 0 \\ A_s^k \arrow[r, "\beta_s"] & A_s^n \arrow[r, "g_s"] & N_s \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Per provare l'esistenza di $\tilde{\varphi}_2$ mi basta fare vedere che $\varphi_1 \circ \alpha(e_i) \in \operatorname{Im} \beta_s$; ma esiste $t \notin p$ tale che $\varphi_1 \circ \alpha(e_i) \in \operatorname{Im} \beta/t$. Sostituendo s con st abbiamo l'appartenenza voluta.
Definiamo adesso $\tilde{\varphi}_0(m_i) = g_s\varphi_1(e_i)$; noi vorremmo che $(\tilde{\varphi}_0)_p = \varphi_0$, ma questo discende dalla seguente catena di uguaglianze:

$$\tilde{\varphi}_0(m_i) = \tilde{\varphi}_0(f_s(e_i)) = g_s\varphi_1(e_i) = g\varphi_1(e_i) = \varphi_0 f(e_i) = \varphi_0(m_i)$$

Analogamente possiamo costruire $\tilde{\psi}_0$.
Dobbiamo mostrare che è l'inverso. Abbiamo che $(\tilde{\psi}_0 \circ \tilde{\varphi}_0)_p = id$ e $(\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\psi}_0)_p = id$, allora $\tilde{\psi}_0 \circ \tilde{\varphi}_0(m_i) - m_i = 0$ in M_p e $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\psi}_0(m_i) - m_i = 0$ in N_p, cioè esiste $u \notin p$ tale che $u(\tilde{\psi}_0 \circ \tilde{\varphi}_0(m_i) - m_i) = 0$ e $u(\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\psi}_0(m_i) - m_i) = 0$. Sostituendo s con su abbiamo che $\tilde{\psi}_0 \circ \tilde{\varphi}_0 = id$ e $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\psi}_0 = id$ e dunque $M_s = N_s$. □

Dimostriamo, usando questi due lemmi, il Teorema 1.1:

Dimostrazione.

a. $\Rightarrow$ b. Consideriamo $p \in \mathrm{Spec}A$, se M è proiettivo allora lo è anche M_p, allora per il Lemma 1 dato che A_p è locale si ha la tesi.

b. $\Rightarrow$ c. ovvio.

c. $\Rightarrow$ b. Sia $p \in \mathrm{Spec}A$ e $\mathfrak{m}$ un massimale che lo contiene; indichiamo con $S = A \setminus p$ e $R = A \setminus \mathfrak{m}$. Per ipotesi $M_\mathfrak{m}$ è libero, allora $M_p = S^{-1}M = S^{-1}M_\mathfrak{m}$ e dunque M_p è libero.

d. $\Rightarrow$ c. Sia $\mathfrak{m}$ un massimale e $a_i \notin \mathfrak{m}$ e $R = A \setminus \mathfrak{m}$. Allora $R^{-1}M_{a_i}$ e quindi $M_\mathfrak{m}$ è libero.

c. $\Rightarrow$ d. Per ogni $\mathfrak{m}$ si ha $M_\mathfrak{m} \simeq (A^n)_\mathfrak{m}$, allora per il Lemma 2 esiste $s_\mathfrak{m} \notin \mathfrak{m}$ tale che $M_{s_\mathfrak{m}} \simeq (A^n)_{s_\mathfrak{m}}$. Consideriamo l'ideale $I := (s_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}A$ massimale $)$, per costruzione I non è contenuto in nessun massimale e quindi $I = A$. Per noetherianità esiste un insieme finito di generatori $a_1, \dots, a_k$, che sono gli elementi che cercavamo.

c. $\Rightarrow$ a. Facciamo prima una piccola osservazione

Osservazione 1.2.

- Se M e N sono due moduli su A, anello noetheriano, ed esiste $f\colon A \to B$ piatta su A, allora

$$B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,N) =_\Phi \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

  dove $b \otimes \Phi(\beta \otimes m) = b\beta\Phi(m)$.
  Se $M = A^n$ allora

$$B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(A^n, N) \simeq B \otimes N^n =_\Phi (N \otimes_A B)^n$$

- In generale

$$\begin{tikzcd}
A^h \arrow[r] \arrow[d, "\otimes_A B"'] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "\otimes_A B"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\otimes_A B"'] & 0 \\
B^h \arrow[r] & B^n \arrow[r] & M \otimes B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Applicando il funtore $\mathrm{Hom}_A(\_, N)$ (che è esatto a sinistra) e indicando con M_B $M \otimes B$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^n,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^h,N)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_B,N_B) \to \mathrm{Hom}_A(B^n,N_B) \to \mathrm{Hom}_A(B^h,N_B)$$

Tuttavia applicando il funtore $B\otimes_A$ alla prima successione, usando il primo punto dell'osservazione e sfruttando la piattezza si ha anche

$$0 \to B \otimes \mathrm{Hom}_A(M,N) \to B \otimes \mathrm{Hom}_A(A^n,N) \to B \otimes \mathrm{Hom}_A(A^h,N)$$

Allora per il lemma dei cinque $\mathrm{Hom}_A(M_B,N_B) \simeq B\otimes \mathrm{Hom}_A(M,N)$.

Torniamo alla dimostrazione; per mostrare che M è proiettivo dimostriamo che è addendo diretto di un modulo libero, ossia che la successione

$$A^n \to M \to 0$$

spezza. Applicando il funtore $\mathrm{Hom}_A(M, \_)$ abbiamo la successione

$$\mathrm{Hom}_A(M,A^n) \to \mathrm{Hom}_A(M,M) \to 0$$

è esatta e proviamo che è esatta, in tal caso infatti trovando una controimmagine di id_M avremmo la tesi. $\mathrm{Hom}_A(M,A^n)$ è lui stesso un A modulo finitamente presentato, inoltre localizzando otteniamo

$$(\mathrm{Hom}_A(M,A^n))_{\mathfrak{m}} \to (\mathrm{Hom}_A(M,M))_{\mathfrak{m}} \to 0$$

Per quanto appena osservato (con $B = A_{\mathfrak{m}}$) tale successione equivale a

$$\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}},A^n_{\mathfrak{m}}) \to \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}},M_{\mathfrak{m}}) \to 0$$

che però è esatta perché $M_{\mathfrak{m}}$ è libero. Allora abbiamo concluso dato che essere suriettivo è una proprietà locale.

□

Consideriamo A un dominio noetheriano e M un modulo proiettivo e finitamente generato, allora se $p \in \mathrm{Spec}A$ si ha $M_p = A_p^n$ per qualche n che non dipende da p (dimostrare). Si definisce *rango di* M tale n. In particolare se $\mathrm{rk}\, M = 1$ diremo che è un *fibrato lineare*.

Proposizione 1. Siano M e N due moduli proiettivi di rango rispettivamente m e n. Allora

$$\mathrm{rk}\, M \otimes N = mn$$

Definizione 2. $\mathrm{Pic}(A)$ è l'insieme fibrati lineari a meno di isometria.

Proposizione 2. Se A è un dominio di Dedekind allora $\mathrm{Pic}(A)$ col prodotto tensore è isomorfo al gruppo delle classi laterali.

Capitolo 2

Funtori derivati e dimensione coomologica

2.1 Dimensione coomologica

Definizione 3. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana,

$$\mathrm{dh}(\mathcal{A}) \coloneqq \sup \{n \mid \exists A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \colon \ \mathrm{Ext}^n(A, B) \neq 0\}$$

è la *dimensione coomologica* di $\mathcal{A}$.

Definizione 4. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$,

$$\mathrm{dhp}_{\mathcal{A}}(X) \coloneqq \sup \{n \mid \exists B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \colon \ \mathrm{Ext}^n(X, B) \neq 0\}$$

è la *dimensione coomologica proiettiva* di $\mathcal{A}$; analogamente

$$\mathrm{dhi}_{\mathcal{A}}(X) \coloneqq \sup \{n \mid \exists A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \colon \ \mathrm{Ext}^n(A, X) \neq 0\}$$

Osservazione 2.2. Abbiamo visto che a partire da un triangolo distinto

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow A^\bullet[1]$$

e un complesso $D^\bullet$ abbiamo la successione esatta lunga

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(D, A^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(D^\bullet, B^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(D^\bullet, C^\bullet) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\ & \mathrm{Hom}(D^\bullet, A[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(D^\bullet, B^\bullet[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(D^\bullet, C^\bullet[1]) \dots \end{tikzcd}$$

Scegliendo complessi della forma $\underline{X}^\bullet$ abbiamo allora

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(D,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(D,B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(D,C) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
& \mathrm{Ext}^1(D,A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(D,B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(D,C)\dots
\end{tikzcd}$$

Osservazione 2.3. Se P è proiettivo allora $\mathrm{Ext}^n(\underline{P}^\bullet, A^\bullet) = 0$ per ogni $n > 0$ e quindi $\mathrm{dhp}(P) = 0$. Analogamente se I è iniettivo $\mathrm{dhi}(I) = 0$.

Gli oggetti proiettivi, abbiamo visto, giocano un ruolo centrale nel calcolo degli Ext:

Proposizione 3. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana con abbastanza proiettivi. Allora valgono i seguenti fatti:

1. Se per ogni $X \in \mathcal{A}$ e per ogni $i > 0$ $\mathrm{Ext}^i(P, X) = 0$, allora P è proiettivo.

2. Siano $A, B \in \mathcal{A}$. Se esiste una successione esatta

$$0 \longrightarrow B \to P^k \to \cdots \to P^1 \to A \longrightarrow 0$$

con P^i proiettivi, allora

$$\mathrm{dhp}\, B = \mathrm{dhp}\, A - k$$

Dimostrazione.

1. Dato un morfismo suriettivo $\beta\colon A \to B$, indicando con $\alpha = \ker\beta$ abbiamo una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

Per l'osservazione 2.2 e usando che $\mathrm{Ext}^i(P, A) = 0$ per ipotesi abbiamo che

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, K) \to \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B) \longrightarrow 0$$

è esatta; dunque esiste per ogni $f \in \mathrm{Hom}(P, B)$ esiste $g \in \mathrm{Hom}(P, A)$ tale che $\beta \circ g = f$. Questo è equivalente a dire P è proiettivo.

2. Mostriamo la tesi per induzione su k.
Se $k = 0$ Abbiamo che $0 \to B \to A \to 0$ è esatta, ossia A B sono isomorfi.
Se $k = 1$ Allora $0 \to B \to P \to A \to 0$ è esatta. Passando alla successione esatta lunga degli $\mathrm{Hom}(\_, D)$ otteniamo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(A,D) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(P,D) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(B,D) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & \operatorname{Ext}^1(A,D) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(P,D) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(B,D)\dots \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & \operatorname{Ext}^i(A,D) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^i(P,D) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^i(B,D)\dots
\end{tikzcd}$$

Dato che P è proiettivo $\operatorname{Ext}^i(P,D) = 0$ per ogni $i > 0$, quindi $\operatorname{Ext}^i(A,D) \simeq \operatorname{Ext}^{i+1}(B,D)$. Passando al minimo si ottiene $\operatorname{dhp} B = \operatorname{dhp} A + 1$,
Se $k > 1$ Dalla successione esatta otteniamo due altre successioni esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & P^k \arrow[rr] \arrow[dr] & & P^{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
 & & & C \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Allora per ipotesi induttiva $\operatorname{dhp} A = \operatorname{dhp} C - k + 1$ e per il caso $k = 1$ invece $\operatorname{dhp} C = \operatorname{dhp} B - 1$, da cui

$$\operatorname{dhp} A = \operatorname{dhp} B - 1 - k + 1 = \operatorname{dhp} B - k.$$

□

Questa proposizione ci permette anche di dare una condizione equivalente alla caratterizzazione della dimensione proiettiva in termini di risoluzioni proiettive minimali.

Corollario 1. Sia $\mathcal{A}$ una categoria con abbastanza proiettivi, $\operatorname{dhp} M = k$ se e solo se esiste

$$0 \to P^{-k} \to \cdots \to P^0 \to M \to 0$$

esatta di lunghezza minima e con P^i oggetti proiettivi.

Dimostrazione. Questa condizione è ovviamente sufficiente. Viceversa, per ipotesi esiste

$$0 \to N \to P^{-k+1} \to \cdots \to P^0 \to M \to 0$$

Ma $\operatorname{dhp}(N) = \operatorname{dhp}(M) - k = 0$, dunque N è proiettivo e questa è la successione cercata. □

2.4 Funtori Derivati

Il funtore $F \coloneqq \operatorname{Hom}(M, \_)$ con $M \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ è esatto a sinistra. Abbiamo visto che però presa una sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

applicando F è ben definita la sequenza esatta lunga

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,C) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
& \mathrm{Ext}^1(M,A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M,B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M,C)\dots \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
& \mathrm{Ext}^i(M,A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i(M,B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i(M,C)\dots
\end{tikzcd}
$$

che in un certo senso misura quanto F non sia esatto a sinistra. Vorremmo adesso estendere questo concetto ad un funtore qualsiasi che sia parzialmente esatto.

Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana con abbastanza iniettivi e proiettivi e $\mathcal{B}$ anch'essa abeliana. Preso un funtore

$$F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

esatto a sinistra, definiamo *funtore derivato destro*

$$RF\colon \mathcal{D}(\mathcal{A})^+ \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})^+$$

un funtore tale che

- mandi triangoli distinti in triangoli distinti,
- sia "collegabile" con F.

In particolare se $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ allora $H^0(RF(\underline{A}^\bullet) = FA$.

Una prima possibilità per definirlo è

$$\bar{F}\colon\ \mathrm{Com}\,\mathcal{A}^+ \longrightarrow \mathrm{Com}\,\mathcal{B}^+$$

In modo che $A^\bullet \mapsto FA^\bullet$; tuttavia passando già in Kom $\bar{F}$ non manda triangoli distinti in triangoli distinti.
Analogamente potremmo pensare di definire

$$K^+F\colon\ \mathrm{Kom}\,\mathcal{A}^+ \longrightarrow \mathrm{Kom}\,\mathcal{B}^+$$

In modo che $A^\bullet \mapsto FA^\bullet$; questo manda triangoli distinti in triangoli distinti, infatti consideriamo

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \longrightarrow \mathrm{Cono}(f) \xrightarrow{-\delta} X^\bullet[1]$$

in $\mathrm{Kom}\,\mathcal{A}^+$. Applicando F si ha

$$FX^\bullet \xrightarrow{Ff} FY^\bullet \to F(\mathrm{Cono}(f))$$

Questo però da un triangolo distinto perché

$$F(\mathrm{Cono}(f))^n = FA^n \oplus FB^n$$

e il bordo è

$$\begin{pmatrix} -F\partial_A & 0 \\ Ff & F\partial_b \end{pmatrix}$$

perciò $F(\mathrm{Cono}(f)) = \mathrm{Cono}(Ff)$.
Ancora una volta però questo funtore non è quello giusto perché non si comporta bene rispetto ai quasi isomorfismi. Preso f un quasi isomorfismo, allora passando alla categoria derivata otteniamo un isomorfismo. Se lo completiamo a triangolo distinto in Kom

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow A^\bullet[1]$$

e applichiamo KF^+ otteniamo

$$FA^\bullet \xrightarrow{Ff} FB^\bullet \longrightarrow FC^\bullet \longrightarrow FA^\bullet[1]$$

f è un quasi isomorfismo perciò $H^\bullet(C) = 0$, allora dovremmo avere $H^\bullet(FC) = 0$ ma ciò non accade. Infatti F è esatto solo a sinistra e quindi applicandolo a

$$0 \to C^0 \to C^1 \to C^2 \to C^3 \to \dots$$

si perde l'esattezza già in FC^1.

Questo problema è centrale per la buona definizione del funtore derivato a destra, quindi un Lemma che ci aiuti ad aggirare questo ostacolo.

Lemma 3. Sia $A^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ tale che A^i è un oggetto iniettivo per ogni i e *aciclico*, ossia $H^i(A) = 0$ per ogni i. Allora $A^\bullet$ spezza

$$A^i \simeq B^i(A) \oplus B^{i+1}(A)$$

Dimostrazione. Poichè A^0 è iniettivo allora

$$0 \to A^0 \to A^1$$

allora spezza, quindi $A^1 = A^0 \oplus C^1 = B^1 \oplus C^1$ e poichè gli A^i sono iniettivi allora lo è anche C^1.
Il complesso è aciclico, perciò $\ker \partial_A^1 = B^1$ e dunque la restrizione a C^1 è iniettiva:

$$0 \to C^1 \to A^1$$

ma allora $C^1 \simeq B^2$ e dunque $A^1 \simeq B^1(A) \oplus B^2(A)$. Iterando questo procedimento si ha la tesi. $\square$

Osservazione 2.5. Se $A^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ tale che A^i è un oggetto iniettivo per ogni i e aciclico (come nel Lemma) Applicando un funtore F esatto a sinistra otteniamo $FA^i \simeq FB^i \oplus FB^{i+1}$ e il complesso

$$0 \to FA^0 \to FA^1 \to FA^2 \to FA^3 \to \dots$$

in cui il bordo agisce come l'identità su FB^{i+1} e zero su FB^i, anch'esso risulta aciclico.

L'idea per definire il complesso derivato è quindi quella di sfruttare che su questi particolari complessi applicando un funtore esatto a sinistra viene rispettata la comologia. Ricordiamo inoltre che se una categoria $\mathcal{A}$ ha abbastanza iniettivi, preso un complesso $A^\bullet \in \mathrm{Com}^+ \mathcal{A}$ esiste un complesso $I_A^\bullet \in \mathrm{Com}^+ \mathcal{A}$ fatto di oggetti iniettivi e un quasi isomorfismo

$$i_A \colon A^\bullet \longmapsto I_A^\bullet$$

tale che i_A^n è un monomorfismo per ogni n.
Abbiamo anche osservato grazie al proprietà legate all'iniettività

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})^+}(I_A^\bullet, I_B^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}^+ \mathcal{A}}(I_A^\bullet, I_B^\bullet).$$

Questo fatto unito a quanto sopra ci da che esiste il seguente isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})^+}(A^\bullet, B^\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}^+ \mathcal{A}}(I_A^\bullet, I_B^\bullet) \\ f & \longmapsto & i_B \circ f \circ {i_A}^{-1} \end{array}$$

Facilmente, grazie a queste osservazioni, otteniamo il seguente fatto

Proposizione 4. Sia $\mathcal{A}$ una categoria con abbastanza iniettivi. La categoria dei complessi iniettivi limitati inferiormente $\mathrm{Kom}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})^+$ è naturalmente equivalente a $\mathcal{D}(\mathcal{A})^+$.

Questa proposizione da che la seguente è una buona definizione:

Definizione 5. Sia $\mathcal{A}$ una categoria con abbastanza iniettivi e F un funtore esatto a sinistra. Il funtore derivato a destra

$$\begin{array}{rccc} RF\colon & \mathcal{D}(\mathcal{A})^+ & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathcal{B})^+ \\ & A^\bullet & \longmapsto & F(I_A^\bullet) \\ & f & \mapsto & RF(g) \end{array}$$

dove se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ allora $g = i_B \circ f \circ {i_A}^{-1}$.

Analogamente si dimostra che

Proposizione 5. Sia $\mathcal{A}$ una categoria con abbastanza proiettivi. La categoria dei complessi iniettivi limitati superiormente $\mathrm{Kom}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^-$ è naturalmente equivalente a $\mathcal{D}(\mathcal{A})^-$.

Detto poi $p_A\colon P_A^\bullet \to A^\bullet$ un quasi isomorfismo tra una risoluzione proiettiva e un complesso, abbiamo la buona definizione del *funtore derivato a sinistra*

Definizione 6. Sia $\mathcal{A}$ una categoria con abbastanza proiettivi e F un funtore esatto a destra. Il funtore derivato a sinistra è

$$\begin{array}{rccc} LF\colon & \mathcal{D}(\mathcal{A})^- & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathcal{B})^- \\ & A^\bullet & \longmapsto & F(P_A^\bullet) \\ & f & \mapsto & LF(h) \end{array}$$

dove se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ allora $h = {p_B}^{-1} \circ f \circ p_A$.

Definizione 7. Consideriamo la categoria degli A moduli. Il funtore $F(N) = M \otimes_A N$ è esatto a destra. Definiamo

$$\mathrm{Tor}^i_A(M,N) \coloneqq H^{-i}(LF(N))$$

Esempio 2.6. Siano $M = \mathbb{Z}/m$ e $N = \mathbb{Z}/n$ due $\mathbb{Z}$ moduli. Consideriamo risoluzione proiettiva (libera) di N

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "0"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & \cdots \end{tikzcd}$$

Se applichiamo $M \otimes \_$ otteniamo

$$0 \longrightarrow M \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{n} M \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e ricordando che $M \otimes \mathbb{Z} = M$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Se calcoliamo perciò la coomologia vediamo che

$$\mathrm{Tor}^0(M,N) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Tor}^1(M,N) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

con $d = \gcd(m,n)$.

Mostriamo che i funtori derivati così definiti hanno le proprietà che avevamo richiesto all'inizio del capitolo.

Lemma 4.

i. Se $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ allora $H^0(RF(\underline{A}^\bullet)) = FA$.

ii. RF porta triangoli distinti in triangoli distinti.

Dimostrazione. i. A partire da una risoluzione iniettiva di $\underline{A}^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "0"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & I^3 \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

otteniamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1$$

Poichè F è esatto a sinistra

$$0 \longrightarrow FA \longrightarrow FI^0 \longrightarrow FI^1$$

rimane esatta. Dato che $RF(\underline{A}^\bullet) = F(I^\bullet)$ allora si ha proprio $H^0(RF(\underline{A}^\bullet)) = FA$.
ii. Ogni triangolo

$$A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow A^\bullet[1]$$

grazie alla Proposizione 4 è quasi isomorfo al triangolo

$$I_A^\bullet \longrightarrow I_B^\bullet \longrightarrow I_C^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet[1]$$

Applicare RF al primo è quindi come applicarlo al secondo, ci possiamo quindi ridurre a lavorare in Kom^+. Per concludere basta ripetere le osservazioni fatte per K^+F, il nostro triangolo è isomorfo a

$$I_A^\bullet \xrightarrow{g} I_B^\bullet \longrightarrow \operatorname{Cono}(g) \longrightarrow I_A^\bullet[1]$$

applicando il funtore F e ricordando che $F(\operatorname{Cono}(g)) = \operatorname{Cono}(Fg)$ si ha

$$FI_A^\bullet \xrightarrow{Fg} FI_B^\bullet \longrightarrow \operatorname{Cono}(Fg) \longrightarrow F(I_A^\bullet)[1]$$

che è un triangolo distinto. □

Definizione 8. Sia $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Si definisce

$$R^iF(A) := H^i(RF(A))$$

inoltre diremo che A è *adatto ad* F se $R^iF(A) = 0$ per ogni i.

Esempio 2.7.

- Gli oggetti adatti per il tensore sono tutti e soli i moduli piatti.
- Gli oggetti adatti per $\mathrm{Hom}_A(M, \_)$ sono tutti e soli i moduli proiettivi.

Lemma 5. Consideriamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

1. Se A è adatto allora

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \longrightarrow 0$$

   è esatta;

2. Se A, B adatti allora C adatto. Se A, C adatti allora B adatto.
3. Se $A^\bullet \in \mathrm{Kom}^+ \mathcal{A}$ è aciclico e gli A^i sono tutti adatti, allora $FA^\bullet$ è aciclico.
4. Gli oggetti iniettivi sono adatti.

Dimostrazione. Dall'esattezza, abbiamo in $\mathrm{Kom}^+ \mathcal{A}$ i quasi isomorfismi

$$\begin{tikzcd}
I_A^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & I_B^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & I_C^\bullet \arrow[d] & \\
\underline{A}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \underline{B}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cono}(f) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{A}^\bullet[1] \\
\underline{A}^\bullet \arrow[r] & \underline{B}^\bullet \arrow[r] & \underline{C}^\bullet &
\end{tikzcd}$$

È ben definita la successione esatta lunga

$$0 \to FA \to FB \to FC \to R^1FA \to R^1FB \to \dots$$

infatti il triangolo

$$I_A^\bullet \longrightarrow I_B^\bullet \longrightarrow I_C^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet[1]$$

è distinto e applicatogli F va in un triangolo distinto, passando perciò in comologia e ricordando che le frecce nel diagramma all'inizio sono quasi isomorfismi (isomorfismi in coomologia), si ha la tesi.
Alla luce di questo fatto 1. e 2. sono ovvi.
3. Consideriamo il complesso

$$0 \to A^0 \to A^1 \to A^2 \to A^3 \to \dots$$

dato che è aciclico abbiamo le successioni esatte

$$0 \to A^0 \to A^1 \to B^2 \to 0$$

e

$$0 \to B^2 \to A^2 \to B^3 \to 0$$

Usando 2., otteniamo che B^2 è adatto e allora lo è anche B^3.
Applichiamo F:

$$0 \to FA^0 \to FA^1 \to FA^2 \to FA^3 \to \dots$$

Per 1. abbiamo che

$$0 \to FA^0 \to FA^1 \to FB^2 \to 0$$

è esatta. Per mostrare che $F(A^\bullet)$ è aciclico dobbiamo innanzi tutto far vedere che

$$\operatorname{Im} F\partial_A^1 = \ker F\partial_A^2$$

Consideriamo

$$0 \to FB^2 \xrightarrow{\alpha} FA^2 \xrightarrow{\beta} FB^3 \to 0$$

è esatta visto che è B^2 è adatto, allora

$$\operatorname{Im} F\partial_A^1 = \operatorname{Im} \alpha = \ker \beta = \ker F\partial_A^2$$

Iterando questo procedimento si ha la tesi. □

Teorema 2.8. Se $A^\bullet \in \mathrm{Com}^+$ è di oggetti adatti, allora

$$RF(A^\bullet) = F(A^\bullet)$$

Dimostrazione. Il quasi isomorfismo

$$i_A \colon A^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet$$

in Kom^+ si completa a triangolo distinto.

$$A^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet \longrightarrow C^\bullet \to A^\bullet[1]$$

Per ogni n quindi si ha la successione esatta

$$0 \to A^n \to I^n \to C^n \to 0$$

allora per il lemma precedente i C^n sono oggetti adatti. Dalla sequenza esatta lunga in comologia otteniamo anche che il complesso $C^\bullet$ è aciclico.
Applicando F:

$$0 \to FA^n \to FI_A^n \to FC^n \to 0$$

è esatta.
Vogliamo mostrare che $FA^\bullet \to FI_A^\bullet$ è un quasi isomorfismo. Ma dato che $C^\bullet$ è fatto di oggetti adatti e è aciclico per il Lemma 5.3 $FC^\bullet$ è aciclica e quindi la successione esatta lunga in comologia è

$$\cdots \to H^i(FA) \to H^i(FI) \to 0 \to H^{i+1}(FA) \to H^{i+1}(FI) \to 0 \to \dots$$

Allora $F(A^\bullet) = F(I_A^\bullet) = RF(A^\bullet)$ in $\mathcal{D}(\mathcal{B})^+$, che è quello che volevamo. □

2.8.1 Il funtore Tor

Studiamo adesso il funtore derivato $\mathrm{Tor}_A(M, \_)$, con M un A modulo, rispetto $F = M \otimes_A \_$.

Proposizione 6. Se N è un A modulo proiettivo allora $\mathrm{Tor}^i(M, N) = 0$ per ogni $i > 0$.

Dimostrazione. N è proiettivo e quindi $\underline{N}^\bullet$ è una sua risoluzione proiettiva. Applicando F otteniamo il complesso

$$0 \to 0 \to N \otimes_A M \to 0 \to 0$$

la cui comologia è zero per $i \neq 0$. □

Vale anche la proprietà simmetrica:

Proposizione 7. Se M è un A modulo piatto allora $\mathrm{Tor}^i(M, N) = 0$ per ogni $i > 0$.

Dimostrazione. Sia $P^\bullet \in \mathrm{Com}^+$ è una risoluzione proiettiva di N.

$$\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to 0$$

questo complesso è esatto ovunque tranne che in zero e quindi tensorizzando per M, che è piatto, l'esattezza si conserva per $i < 0$, che equivale a dire che$\mathrm{Tor}^i(M, N) = 0$ per ogni $i > 0$. □

Sappiamo che $\mathrm{Tor}_A^0(M, N) = M \otimes_A N = N \otimes_A M = \mathrm{Tor}_A^0(N, M)$, in effetti si ha che questa simmetria è sempre valida. Vediamo alcuni fatti e osservazioni che ci aiuteranno a dimostrarlo:

Osservazione 2.9. Consideriamo una sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

applicando F troviamo la sequenza esatta lunga

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}^1(M, C) \to M \otimes A \longrightarrow M \otimes B \longrightarrow M \otimes C \longrightarrow 0$$

Se invece abbiamo

$$0 \longrightarrow M_1 \overset{f}{\to} M_2 \overset{g}{\to} M_3 \longrightarrow 0$$

e definiamo $F_i(X) \coloneqq M_i \otimes_A X$. Allora sono definiti dei morfismi

$$F_1(X) \xrightarrow{f \otimes id} F_2(X)$$

$$F_2(X) \xrightarrow{g \otimes id} F_3(X)$$

e se M è proiettivo (piatto) allora

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes X \longrightarrow M_2 \otimes X \longrightarrow M_3 \otimes X \longrightarrow 0$$

è esatta.

Lemma 6. Siano $F, G, H \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtori esatti a destra e una successione di funtori

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

esatta sui proiettivi con $\mathcal{A}$ è una categoria con abbastanza proiettivi e iniettivi. Allora

$$\cdots \to L^1G(X) \to L^1H(X) \to F(X) \to G(X) \to H(X) \to 0$$

è esatta.

Dimostrazione. Sia $P_X^\bullet$ una risoluzione proiettiva di $\underline{X}^\bullet$, in ogni grado n

$$0 \longrightarrow F(P_X^n) \longrightarrow G(P_X^n) \longrightarrow H(P_X^n) \longrightarrow 0$$

è esatta per ipotesi.
Il tringolo

$$FP^\bullet \longrightarrow GP^\bullet \longrightarrow HP^\bullet \to FP^\bullet[1]$$

allora è distinto.
Applicando la successione esatta lunga si ha la tesi.

□

Corollario 2. Presa la seguente successione esatta di moduli

$$0 \longrightarrow M_1 \overset{f}{\to} M_2 \overset{g}{\to} M_3 \longrightarrow 0$$

Allora, preso un modulo X qualsiasi, la sequenza lunga

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^1(M_2, X) \to \mathrm{Tor}^1(M_1, X) \to M_1 \otimes X \to M_2 \otimes X \to M_3 \otimes X \to 0$$

è esatta.

Dimostrazione. I funtori $F_i(X) := M_i \otimes_A X$ per $i = 1, 2, 3$ dell'osservazione verificano le ipotesi del lemma. $\square$

Quanto appena detto è sufficiente per mostrare la simmetria voluta, ossia:

Proposizione 8. Siano M, N due A moduli qualsiasi. Allora $\mathrm{Tor}^i_A(M, N) = \mathrm{Tor}^i_A(N, M)$ per ogni i.

Dimostrazione. Per calcolare $\mathrm{Tor}^i_A(M, N)$, prendiamo una risoluzione proiettiva $P^\bullet$ di N e gli applichiamo $M \otimes \_$. Chiamiamo adesso N' il nucleo della proiezione di P^0 su N; la seguente successione allora è esatta:

$$0 \longrightarrow N' \to P^0 \to N \longrightarrow 0$$

Abbiamo per il Corollario 2.8.1 con $M \otimes \_$ la successione esatta lunga

$$\begin{gathered} \dots \mathrm{Tor}^1(M, N) \to M \otimes N' \to M \otimes P^0 \to M \otimes N \to 0 \\ \cdots \to 0 \to \mathrm{Tor}^2(M, N) \to \mathrm{Tor}^1(M, N') \to 0 \to \dots \end{gathered} \tag{2.1}$$

Dove gli zeri compaiono al posto di $\mathrm{Tor}^i(M, P^0)$ dato che P^0 è proiettivo. Allora $\mathrm{Tor}^i(M, N) = \mathrm{Tor}^{i-1}(M, N')$ per ogni $i \geq 2$.
Analogamente col funtore $\_ \otimes M$ otteniamo:

$$\begin{gathered} \dots \mathrm{Tor}^1(N, M) \to N' \otimes M \to P^0 \otimes M \to N \otimes M \to 0 \\ \cdots \to 0 \to \mathrm{Tor}^2(N, M) \to \mathrm{Tor}^1(N', M) \to 0 \to \dots \end{gathered} \tag{2.2}$$

e quindi $\mathrm{Tor}^i(N, M) = \mathrm{Tor}^{i-1}(N', M)$ per ogni $i \geq 2$.
Osserviamo che essendo la risoluzione aciclica in P^{-1} abbiamo che il complesso

$$\cdots \to P^{-3} \to P^{-2} \to P^{-1} \to 0 \to \dots$$

è una risoluzione per N'.
Mostriamo per induzione su i la tesi.

$i = 0$ È noto che $M \otimes N = N \otimes M$.

$i = 1$ Dal caso $i = 0$ e dalla prime parte delle successioni 2.1 e 2.2 si ha che allora $\mathrm{Tor}^1_A(M, N) = \mathrm{Tor}^1_A(N, M)$.

$i \geq 1$ Per ipotesi induttiva $\mathrm{Tor}^{i-1}_A(M, N') = \mathrm{Tor}^{i-1}_A(N', M)$ e dunque per quanto provato prima $\mathrm{Tor}^i_A(M, N) = \mathrm{Tor}^{i-1}_A(M, N') = \mathrm{Tor}^{i-1}_A(N', M) = \mathrm{Tor}^i_A(N, M)$.

□

Proposizione 9. I seguenti fatti sono equivalenti:

(1) M è un A modulo piatto;

(2) $\mathrm{Tor}^i_A(M, N) = 0$ per ogni N e per ogni $i > 0$;

(3) $\mathrm{Tor}^1_A(M, N) = 0$ per ogni N.

Dimostrazione. Ovviamente (1) ⇒ (2) ⇒ (3) .
Supponiamo che valga (3) e consideriamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Allora anche la successione

$$0 \longrightarrow M \otimes A \to M \otimes B \to M \otimes C \longrightarrow 0$$

è esatta e quindi M è piatto. □

Capitolo 3

Dimensione comologica di anelli noetheriani locali

I risultati che abbiamo ottenuto riguardo Tor trovano applicazione nello studio degli anelli noetheriani locali e, per analogia, negli anelli graduati. A meno di specificare, in questo paragrafo indicheremo con $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale con massimale $\mathfrak{m}$ e M un A modulo finitamente generato, inoltre con k indicheremo il campo residuo $A/\mathfrak{m}$.

Osservazione 3.1. I risulti che presenteremo continuano ad essere validi sostituendo nelle ipotesi A anello graduato con A_0 campo e M modulo graduato finitamente generato.

In primo luogo ci interessa capire come sono fatte le risoluzioni libere (proiettive/piatte) di M. Dato che è finitamente generato, possiamo definire n_0 il minimo numero di generatori di M e sappiamo che esiste un omomorfismo di moduli surgettivo tra $F^0 := A^{n_0}$ e M:

$$F^0 \xrightarrow{\partial^0} M \to 0$$

A partire da qui, iterativamente, possiamo costruire una risoluzione libera di M: indichiamo con n_i il minimo numero di generatori di $\ker \partial^{-i}$ e con $F^{-i} := A^{n_i}$.

Definizione 9. Una risoluzione

$$\dots \xrightarrow{\partial^{-4}} F^{-3} \xrightarrow{\partial^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^0 \xrightarrow{\partial^0} M \to 0$$

costruita come sopra è detta *risoluzione libera minimale.*

Lemma 7. Una risoluzione libera di M è minimale se e solo se il complesso tensorizzato per k ha tutti i bordi nulli eccetto in zero, ossia $\bar{\partial}^{-i} := \partial^{-i} \otimes id_k = 0$ per $i > 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\dots \xrightarrow{\partial^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^0 \xrightarrow{\partial^0} M \to 0$$

sia una risoluzione libera minimale. Applichiamo il funtore $\_ \otimes k$:

$$\dots \xrightarrow{\bar\partial^{-3}} F^{-2} \otimes k \xrightarrow{\bar\partial^{-2}} F^{-1} \otimes k \xrightarrow{\bar\partial^{-1}} F^0 \otimes k \xrightarrow{\bar\partial^0} M \otimes k \to 0$$

Osserviamo[1] che $M \otimes k \simeq k^{n_0}$e $F^0 \otimes k \simeq k^{n_0}$ e quindi $\bar\partial^0$ è un isomorfismo (sono spazi vettoriali della stessa dimensione e il bordo è suriettivo), cosicché $\bar\partial^{-1} = 0$.
Supponiamo adesso $\bar\partial^{-j}$ sia zero per $0 < j < i$. Chiamiamo M' il conucleo della mappa ∂^{-i}:

$$F^{-i} \xrightarrow{\partial^{-i}} F^{-i+1} \xrightarrow{\beta} M' \to 0$$

Se tensorizziamo questa sequenza esatta abbiamo

$$F^{-i} \otimes k \xrightarrow{\bar\partial^{-i}} F^{-i+1} \otimes k \xrightarrow{\bar\beta} M' \otimes k \to 0$$

Dato che il complesso è esatto M' è anche il nucleo di ∂^{-i+1} e quindi dato che è minimale $M' \otimes k = k^{n_i}$. Ci siamo ricondotti al caso base e quindi la tesi e vera per ipotesi induttiva.
Viceversa, supponiamo che $\bar\partial^{-i} = 0$ per $i > 0$. Allora $\bar\partial^0$ è iniettiva e dunque

$$n_0 \leq \dim_k(M \otimes k) = \min\{\# \text{ generatori di } M\} \leq n_0$$

e quindi $n_0 = \min\{\# \text{ generatori di } M\}$. Analogamente a come abbiamo fatto prima, sfruttando l'esattezza, ci si può ricondurre sempre a questo caso. In tal modo otteniamo che $n_i = \min\left\{\# \text{ generatori di } \ker \partial^{-i}\right\}$ per ogni i, che equivale a dire che la risoluzione libera presa è minimale. $\square$

Questo risulto ci permette di dimostrare un risultato molto importante a proposito della dimensione comologica proiettiva dei moduli finitamente generati su anelli locali noetheriani.

Teorema 3.2. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale con k campo residuo di $\mathfrak{m}$ e M un A modulo finitamente generato. Siano poi $n = \operatorname{dhp} M$ e d la lunghezza di una risoluzione libera minimale di M. Allora $n = d$ e

$$\operatorname{Tor}^i_A(M,k) \begin{cases} = 0 & i > d; \\ \neq 0 & i \leq d, \end{cases}$$

Inoltre se

$$\dots \xrightarrow{\partial^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^0 \xrightarrow{\partial^0} M \to 0$$

è una risoluzione libera minimale $n_i = \dim_k \operatorname{Tor}^i_A(M,k)$.

[1]Nakayama

Osservazione 3.3. $\mathrm{Tor}^i_A(M,k)$ è un k-spazio vettoriale. Infatti $\mathrm{Tor}^i_A(M,k) = \mathrm{Tor}^i_A(k,M)$ che è la comologia di una risoluzione proiettiva o piatta di M tensorizzata per k, i cui bordi sono proprio mappe di spazi vettoriali.

Dimostrazione. $d \geq n$ infatti ogni modulo libero è proiettivo. Se consideriamo poi risoluzione proiettiva di M, per calcolare i Tor tensorizziamo per k

$$0 \to P^{-n} \to \cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to 0 \to \dots$$

allora chiaramente $\mathrm{Tor}^i_A(k,M) = 0$ per $i > n$.
Se

$$\dots \xrightarrow{\partial^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^0 \xrightarrow{\partial^0} M \to 0$$

è una risoluzione libera minimale di M lunga s applicando $\_ \otimes k$ per il Lemma 7 otteniamo un complesso con i bordi tutti nulli: passando alla comologia quindi abbiamo che $\mathrm{Tor}^i_A(k,M) = F^{-i} \otimes k = k^{n_i}$ e $n_i = \dim_k \mathrm{Tor}^i_A(k,M)$. Inoltre

$$\mathrm{Tor}^i_A(M,k) \begin{cases} = 0 & i > s; \\ \neq 0 & i \leq s, \end{cases}$$

In genera vale che $s \geq d \geq n$ ma

$$\mathrm{Tor}^i_A(M,k) \begin{cases} = 0 & i > n; \\ \neq 0 & i \leq s, \end{cases}$$

e quindi $n+1 \geq s+1$, ossia $n \geq s \geq d \geq n$. □

Osservazione 3.4. Il teorema ci dice che le risoluzioni libere minimali sono anche di lunghezza minima.

Corollario 3. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale con k campo residuo di $\mathfrak{m}$ e M un A modulo finitamente generato. I seguenti fatti sono equivalenti:

(1) M libero

(2) M proiettivo

(3) M piatto

Dimostrazione. (1) $\iff$ (2) è Lemma 1.
(2) $\iff$ (3) noto.
(3) $\iff$ (2) Per la Proposizione 9, $\mathrm{Tor}^1_A(k,M) = 0$ perciò una risoluzione libera minimale è lunga zero e quindi M é libero. □

Corollario 4. Sia A un anello noetheriano e M un A modulo finitamente generato. I seguenti fatti sono equivalenti:

(1) M localmente libero.

(2) M proiettivo

(3) M localmente piatto

Dimostrazione. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) è il Teorema 1.1.
M proiettivo $\Longleftrightarrow$ M localmente piatto $\Longleftrightarrow$ M localmente libero. □

Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale noetheriano, il Teorema 3.2 mette in relazione la lunghezza di una risoluzione libera minimale di un modulo finitamente generato M con i $\mathrm{Tor}^i(k, M)$, dove k è il campo residuo di $\mathfrak{m}$. Abbiamo mostrato tuttavia che il funtore derivato Tor è simmetrico nelle entrate, diventa quindi interessante lo studio delle risoluzioni dell' A modulo k. In questo paragrafo vedremo la costruzione, a tale scopo, del complesso di Koszul. Ci serve tuttavia introdurre alcune nozioni e risultati preliminari.

3.4.1 Prodotto esterno

Definizione 10. Sia A un anello commutativo con identità e M un A modulo. Diremo che

$$\Phi \colon M^k \longrightarrow \wedge^k M$$

è il *prodotto esterno* se

1. Φ è multilineare
2. Φ è alternante, ossia $\Phi(m_1, \dots, m, m, \dots m_k) = 0$ (antisimmetrico).
3. Per ogni $\Psi \colon M^k \to U$ multilineare alternante esiste unico un omomorfismo di moduli $\Omega \colon \wedge^k M \to U$ tale che $\Psi = \Omega \circ \Phi$.

Osservazione 3.5. Sia char$k \neq 2$. Se φ è un applicazione alternante allora $\varphi(m_1, \dots, m_k) = \varepsilon(\sigma)\varphi(m_{\sigma 1}, \dots, m_{\sigma k})$ con $\sigma \in S_k$.

Proposizione 10. Il prodotto esterno esiste.

Dimostrazione. Esiste una mappa

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & M^k & \longrightarrow & M^{\otimes^k} \\ & (m_1, \dots, m_k) & \longmapsto & m_1 \otimes \dots \otimes m_k \end{array}$$

Definiamo allora $\wedge^k M$ come $M^{\otimes^k}$ modulo il gruppo generato dai podotti in cui compaiono due entrate uguali e p la proiezione. Allora $\Phi = p \circ \pi$. Le prime due proprietà del prodotto esterno valgono per costruzione; verifichiamo la terza: prendiamo $\Psi \colon M^k \to U$ alternante e multilineare, per la proprietà universale del prodotto tensore esiste Ω_1 tale che $\Psi = \Omega_1 \circ \pi$ e poichè è alternante passa a quoziente. □

Osservazione 3.6.

- Indicheremo $\Phi(m_1, \dots, m_k) = m_1 \wedge \dots \wedge m_k$.
- Se $M = A^n$, detta $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica, per $I = \{i_1 < \dots i_k \leq n\}$ definiamo $e_I \coloneqq e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$. Allora[2]
$$\{e_I \ : \ \#I = k\}$$
è una base di $\wedge^k M$.
- Sia $M = A^n$. Allora
$$\begin{cases} \wedge^0 M \coloneqq A \\ \wedge^n M = A \\ \wedge^k M = 0 \qquad \text{per } k > n \end{cases}$$
- Sia $T \colon M \to N$ un omomorfismo di moduli, allora tramite $T^k \colon M^k \to N^k$ è indotto un omomorfismo $\wedge^k T \colon \wedge^k M \to \wedge^k N$. Se $k = n$ è proprio la moltiplicazione per $\det(T)$.

3.7 Complesso di Koszul

Il nostro obiettivo è quello di costruire una risoluzione libera di $k = A/\mathfrak{m}$, per A anello noetheriano locale. Per fare questo prima definiamo le seguenti nozioni che valgono per A anello qualsiasi:

Definizione 11. $x_1, \dots, x_n \in A$ si dice *successione regolare* se x_1 non è un divisore di zero in A e x_i non è un divisore di zero in ${A}\big/{(x_1, \dots, x_{i-1})}$ per ogni i.

Prendiamo una successione regolare di $x_1, \dots, x_m \in A$ e indichiamo con $M = A^m$, allora $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in M$. Il *complesso di Koszul* $K^\bullet(\underline{x})$ è

$$\dots 0 \xrightarrow{\partial_K^{-1}} \wedge^0 M \xrightarrow{\partial_K^0} \wedge^1 M \xrightarrow{\partial_K^1} \wedge^2 M \xrightarrow{\partial_K^2} \dots \xrightarrow{\partial_K^{m-1}} \wedge^m M \to 0 \dots$$

con $\partial_K^i = \_ \wedge \underline{x}$.
Affinché questo sia davvero un complesso c'è da verificare che $\partial_K^i \circ \partial_K^{i-1} = 0$, ma è ovviamente vero poiché il prodotto esterno è alternante e quindi $\partial_K^i \circ \partial_K^{i-1}(y) = y \wedge \underline{x} \wedge \underline{x} = 0$.

Per questo complesso vale una condizione necessaria e sufficiente sulla comologia legata alla scelta di $\underline{x}$, di cui noi mostreremo però solo la necessità.

[2] Non lo dimostriamo.

Teorema 3.8. Se $x_1, \dots, x_m \in A$ è una successione regolare, allora

$$H^i(K^\bullet(\underline{x})) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq m \\ A/(x_1, \dots, x_m) & \text{se } i = m \end{cases}$$

Viceversa se $H^i(K^\bullet(\underline{x})) \neq 0$ solo in grado m la successione è regolare.

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi per induzione su m.

$m = 1$ Dato che $M = A$ allora il complesso è

$$\dots 0 \xrightarrow{\partial_K^{-1}} A \xrightarrow{\partial_K^0} A \xrightarrow{\partial_K^1} 0 \to 0 \dots$$

con $\partial_k = \cdot x_1$.
Dato che $x_1 \nmid 0$, ∂_K^0 è iniettiva e quindi $H^0 = 0$ e $H^1 = A/(x_1)$.

$m \Rightarrow m+1$ Indichiamo con $K_m^\bullet$ il complesso di Koszul ottenuto da $M_m = A^m$ e $x_1, \dots, x_m \in A$, una successione regolare, e con $K_{m+1}^\bullet$ il complesso di Koszul ottenuto da $M_{m+1} = M_m \oplus A\varepsilon = A^{m+1}$ con la successione regolare $x_1, \dots, x_{m+1}$.
Allora $\wedge^0 M_{m+1} = \wedge^0 M_{m+1} = A$ e $\wedge^1 M_{m+1} = M_{m+1} = M_m \oplus A\varepsilon$, per $1 < k < m+1$ abbiamo che $\wedge^k M_{m+1} = \wedge^k M_m \oplus (\wedge^{k-1} M_m \wedge A\varepsilon) = A^{\binom{m+1}{k}}$.
Infatti abbiamo che una base[3] di $\wedge^k M_{m+1}$ è data dagli e_I, con $I = \{i_1 < \dots i_k \leq m\}$, più gli $e_J \wedge \varepsilon$, con $J = \{i_1 < \dots i_{k-1} \leq m\}$.
Dobbiamo descrivere adesso il bordo ∂ del complesso. Ricordando come abbiamo definito il complesso di Koszul, indicando con $\underline{x}(m) = (x_1, \dots, x_m)$, per $e_I \in \wedge^k M_{m+1}$ poniamo sui generatori della prima forma

$$\partial_{m+1}^k(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge (\underline{x}(m) + x_{m+1}\varepsilon)$$

e usando la multilinearità

$$\partial_{m+1}^k(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \partial_m^k(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) + x_{m+1}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge \varepsilon)$$

Preso un generatore della seconda forma invece

$$\begin{aligned} \partial_{m+1}^k(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge \varepsilon) &= e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge \varepsilon \wedge (\underline{x}(m) + x_{m+1}\varepsilon) \\ &= e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge \varepsilon \wedge \underline{x}(m) \\ &= -e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge \underline{x}(m) \wedge \varepsilon \\ &= -\partial_m^k(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}}). \end{aligned}$$

[3] Questi sono algebricamente indipendenti per costruzione, inoltre sono in numero esatto poichè $\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$.

In altri termini

$$\partial^k_{m+1} = \begin{pmatrix} \partial^k_m & 0 \\ x_{m+1} & -\partial^k_m \end{pmatrix}$$

Abbiamo appena mostrato che, a meno del segno e di shiftare per uno, $K^\bullet_{m+1} = \mathrm{Cono}(f)$ per

$$\begin{array}{cccc} f\colon & K^\bullet_m & \longrightarrow & K^\bullet_m \\ & a & \longmapsto & -x_{m+1}a \end{array}$$

e dunque $H^i(K^\bullet_{m+1}) \simeq H^{i+1}(\mathrm{Cono}(f))$.
Abbiamo mostrato che la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow K^\bullet_m \to \mathrm{Cono}(f) \to K^\bullet_m[1] \to 0$$

induce una successione esatta lunga in comologia, usando che per ipotesi induttiva $H^i(K^\bullet_m) = 0$ per $i \neq m$ otteniamo che $H^i(\mathrm{Cono}(f)) = 0$ per $i < m-1$ e

$$0 \to H^{m-1}(\mathrm{Cono}(f)) \to A/I \xrightarrow{\omega} A/I \to H^m(\mathrm{Cono}(f)) \to 0$$

con $I = (x_1, \ldots, x_m)$ e $\omega = -H^i(f)$. Dato che $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}$ è regolare, ω è la moltiplicazione per un elementi non nullo, allora è iniettiva, quindi $H^{m-1}(\mathrm{Cono}(f)) = 0$, e $H^m(\mathrm{Cono}(f)) = A/(I, x_{m+1})$.
Ricomponendo quanto appena detto allora

$$H^i(K^\bullet_{m+1}(\underline{x})) = H^{i+1}(\mathrm{Cono}(f)) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq m+1 \\ A/(x_1, \ldots, x_{m+1}) & \text{se } i = m+1 \end{cases}$$

□

3.9 Anelli noetheriani regolari

Torniamo al caso a cui siamo interessati, $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano, aggiungendo l'ipotesi che A sia regolare. Allora sappiamo che esistono dei generatori del massimale $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_m)$ tali che $m = \dim A$ e $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ sono una base del k-spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Questi elementi dell'anello godono anche di un'altra proprietà:

Lemma 8. $x_1, \ldots, x_m$ sono una successione regolare di A.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione dell'anello. A è un anello regolare e dunque è un dominio, perciò $x_i \nmid 0$ per ogni i. Se $m = 1$ allora è ovvio.
Sia $B = A/(x_1)$, allora $\dim B = \dim A - 1 = m - 1$. Sia $p\colon A \twoheadrightarrow B$ la

proiezione a quoziente, il massimale di B $\mathfrak{n}$ è generato da $p(x_2), \ldots, p(x_m)$ e ${}^{\mathfrak{n}}\!/_{\mathfrak{n}^2}$ dalle classi di questi elementi. Dato che sono esattamente $m-1$ allora sono una base. Per ipotesi induttiva allora sono una successione regolare di B, per il terzo teorema d'omomorfismo allora abbiamo la tesi. □

Consegue immediatamente da questo fatto e dal Teorema 3.8:

Corollario 5. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano regolare di dimensione m, tale che $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_m)$. Allora $K^{\bullet}(\underline{x})$ è un complesso di moduli liberi tali che

$$H^i(K^{\bullet}(\underline{x})) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq m \\ k & \text{se } i = m \end{cases}$$

dove $k = {}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$ è proprio il campo residuo.
In particolare $K^{\bullet}(\underline{x})$ è una risoluzione libera di k.

Da questo otteniamo anche che :

Corollario 6. Per ogni A-modulo M, con A nelle ipotesi del corollario precedente, vale che $\mathrm{Tor}^i_A(k, M) = 0$ se $i < 0$ e $i > m$.

Dimostrazione. Basta calcolare la coomologia del complesso di Koszul ottenuto con i generatori dei massimali che ha proprio lunghezza $m+1$. □

Corollario 7. Sia $(A, \mathfrak{m})$ anello noetheriano locale regolare e $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_m)$. Ogni A modulo finitamente generato

- ha una risoluzione libera lunga al più m;
- $\operatorname{dhp} M \leq m$.

Dimostrazione. Dato che $\mathrm{Tor}^i_A(k, M) = 0$ se $i < 0$ e $i > m$, il Teorema 3.2 ci dice che la minima lunghezza di una risoluzione libera di M finitamente generato, che è anche la dimensione comologica proiettiva, deve essere minore di m. Naturalmente quindi prendendo una risoluzione libera minimale questa sarà lunga al più m. □

Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale regolare di dimensione n. Abbiamo visto che $K^{\bullet}(\underline{x})$, con $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{m}$, è una risoluzione libera di k.

Lemma 9. $K^{\bullet}(\underline{x})$ è una risoluzione libera minimale di k.

Dimostrazione. Ricordiamo che $K^{\bullet}(\underline{x})$ è

$$\ldots 0 \xrightarrow{\partial_K^{-1}} \wedge^0 A^n \xrightarrow{\partial_K^0} \wedge^1 A^n \xrightarrow{\partial_K^1} \wedge^2 A^n \xrightarrow{\partial_K^2} \ldots \xrightarrow{\partial_K^{n-1}} \wedge^n A^n \to 0 \ldots$$

con $\partial = \_ \wedge \underline{x}$.
Per dire che è minimale usiamo il Lemma 7: se applichiamo $\_ \otimes k$ il bordo diventa $\partial^s \otimes id_k$, ma per ogni $v \in \wedge^s A^n$ $\partial^s(v) = v \wedge \underline{x} \in \mathfrak{m}A^n$, ricordando che $k = A/\mathfrak{m}$, abbiamo allora che $\partial(v) \otimes k = 0$. □

Corollario 8. La dimensione comologica proiettiva di $k = A/\mathfrak{m}$ è proprio n.

In realtà vale qualcosa di molto più forte:

Teorema 3.10. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale regolare di dimensione n. Allora

$$n = \mathrm{dh}A \coloneqq \sup\{\mathrm{dhp}_A M \mid M \text{ è } A\text{-modulo }\}$$

Osservazione 3.11. Sappiamo che esiste un A modulo, cioè k, tale che $\mathrm{dhp}\, k = n$, cosicché $\mathrm{dh}A \geq n$. Per il Corollario 7, inoltre, se M è finitamente generato $\mathrm{dhp}\, k \leq n$; se mostriamo l'ipotesi di finitezza è superflua allora abbiamo la tesi.

Enunciamo due lemmi più generali che ci serviranno per la dimostrazione del teorema:

Lemma 10. Se $\mathrm{Ext}^1({}^{A}\!/_{I}, X) = 0$ per ogni ideale $I \subseteq A$, allora X è iniettivo.

Dimostrazione. Supponiamo di avere un morfismo iniettivo g e f come segue

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Consideriamo la famiglia delle possibili estensioni di f

$$\mathcal{F} = \big\{(N', f') \mid N \subset N' \subset M,\ f' \colon N' \to X \text{ e } f'|_N = f\big\}$$

$\mathcal{F} \neq \varnothing$ e le catene ammettono maggiorante rispetto all'ordinamento $(N', f') < (N'', f'')$ se e solo se $N' \subseteq N''$ e $f''|_{N'} = f'$. Allora per il Lemma di Zorn esiste almeno un elemento massimale (N', f').

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[r] \arrow[dl, "f'"] & M \\ & X & & \end{tikzcd}$$

Supponiamo che $N' \neq M$, ossia esiste $m \in M \setminus N'$, e mostriamo che in tal caso possiamo costruire un'estensione di f' a $\langle N', m\rangle$.
Sia $I = \{a \in A \colon\ am \in N'\}$ e $\mu\colon A \to M$ la moltiplicazione per a destra per m; per costruzione $\mu(I) = N'$, invece chiamiamo $N'' = \mu(A)$. Vogliamo mostrare che $f' \circ \mu$ si estende anch'essa a tutto A. A tale scopo consideriamo la sequenza esatta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \to A/_I \to 0$$

e applichiamo Hom(_, X). Per ipotesi otteniamo una sequenza esatta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(I, X) \to \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A/_I, X) \to 0$$

e grazie alla suriettività esiste $h = f' \circ \mu \in \mathrm{Hom}(A, X)$. Possiamo definire quindi $f'' \colon \langle N', m \rangle \to X$ come $n' + am \mapsto f'(n') + g(a)$. Il morfismo è ben definito, preso infatti $\bar{n} + \bar{a}m = n' + am$ allora $n' - \bar{n} = (\bar{a} - a)m \in N'$ cosicché $g(\bar{a} - a) = f'((\bar{a} - a)m) = f'(n' - \bar{n})$. Chiaramente $f''|_N = f$ e è un morfismo di A moduli, dunque è un'estensione. L'unica possibilità è quindi che $N' = M$ e quindi X è iniettivo. □

Ricordiamo che

$$\mathrm{dhp}_A(M) \coloneqq \sup\{n \colon \exists N \ \text{ tale che } \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \neq 0\}$$

Lemma 11. Sia A un anello e I un suo ideale. Se $\mathrm{dhp}_A \left(A/_I\right) \leq n$, allora per ogni A modulo $\mathrm{dhp}_A M \leq n$.

Dimostrazione. Consideriamo un modulo Y qualsiasi, per ipotesi

$$\mathrm{Ext}^{n+1}(A/_I, Y) = 0.$$

Se esiste

$$0 \to Y \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^{n-1} \to X \to 0$$

esatta con I^i iniettivi, allora $\mathrm{Ext}^{n+1}(A/_I, Y) = \mathrm{Ext}^1(A/_I, X) = 0$, cioè anche X è iniettivo. In particolare dato che la dimensione comologica iniettiva di un modulo è k se e solo se esiste

$$0 \to Y \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^k \to 0$$

esatta di lunghezza minima e con I^i oggetti iniettivi[4], allora ogni Y ha risoluzioni libere iniettive lunghe al più n.
Per definizione dire che per ogni Y $\mathrm{dhi}\, Y \leq n$ è come dire che $\mathrm{Ext}^i_A(M, Y) = 0$ per ogni $i > n$, che a sua volta è equivalente al fatto che $\mathrm{dhp}_A M \leq n$. □

Per provare il teorema ci siamo ridotti a dimostrare che

Lemma 12. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale regolare di dimensione n. Allora per ogni I $\mathrm{dhp}_A \left(A/_I\right) \leq n$.

[4] Si dimostra come nel caso dei proiettivi.

Dimostrazione. $A/_{I}$ è un A-modulo finitamente generato dato che A è un anello noetheriano. La tesi è dunque ovviamente vera per il Corollario 7. $\square$

Mostriamo ora che vale anche il viceversa:

Teorema 3.12. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale. Se $r = \mathrm{dh} A < \infty$ allora A è regolare.

Dimostrazione. Se M è finitamente generato $\mathrm{dhp}_A\, M \leq r$, quindi k ha una risoluzione libera proiettiva lunga al più r. Dato che i Tor controllano tutte le lunghezza in effetti ogni modulo allora ha una risoluzione libera proiettiva lunga al più r.
Sia $n = \dim A$ e $x_1, \ldots, x_s$ un insieme di genetarori di $\mathfrak{m}$. Per Nakayama allora le loro classi sono anche una k-base di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Mostriamo per induzione su s la tesi.
$s = 0$ Allora A è un campo, che è regolare per definizione.
$s > 0$ Procediamo per passi.

Passo (1). Esiste $x \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ che non è un divisore di zero.

Ricoridiamo che $\mathcal{D}(A) \cup \{0\} = \cup_{i=1}^{t} P_i$ con P_i primi associati; per il teorema di unicità della decomposizione primaria per ogni i esiste b_i tale che $\mathrm{Ann}(b_i) = P_i$. Vogliamo mostrare che $\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{m}^2 \cup_{i=1}^{t} P_i$. Per Nakayama $\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{m}^2$, altrimenti sarebbe zero, invece se $\mathfrak{m} \subseteq \cup_{i=1}^{t} P_i$ per il lemma di scansamento dovrebbe coincidere con uno dei primi; una terza possibilità è che $\mathfrak{m}^2 \cup_{i=1}^{k} P_i$ sia l'unione minimale che lo contiene (a meno di rinominare i primi), allora prendiamo $y_0 \in \mathfrak{m} \backslash \cup_{i=1}^{k} P_i$ e $y_j \in \mathfrak{m} \backslash (\mathfrak{m}^2 \cup_{i=1, i \neq j}^{k} P_i)$, l'elemento $y_1 + y_0 y_2 \cdots y_k \in \mathfrak{m}$ ma ciò è assurdo perché per la scelta degli y_i questa somma non può stare in $\mathfrak{m}$. Perciò l'unica possibilità è $\mathfrak{m} = P = \mathrm{Ann}\, a$. Per ipotesi esiste

$$\ldots \xrightarrow{\partial^{-4}} F^{-3} \xrightarrow{\partial^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^{0} \xrightarrow{\partial^{0}} k \to 0$$

risoluzione libera minimale di k lunga r, allora $i(F^{-r}) \subseteq \mathfrak{m} F^{-r+1}$. Allora $a i(F^{-r}) \subseteq a \mathfrak{m} F^{-r+1} = 0$ che è assurdo poiché F^{-r} è libero. Perciò $\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{m}^2 \cup_{i=1}^{t} P_i$.

✓

Passo (2). Sia $B = A/(x)$. Possiamo ridurci a dimostrare che $\mathrm{dh} B < \infty$.

Sappiamo che $\dim B = \dim A - 1 = n - 1$ e B locale noetheriano con massimale $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}/(x)$. Dato che $\bar{x} \neq 0$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, possiamo[5] supporre $x = x_1$. $x_1, x_2, \ldots, x_s$ sono una base di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ come k spazio vettoriale e $\mathfrak{m}_B$

[5]Le basi di uno spazio vettoriale hanno tutte la stessa cardinalità.

sarà generato da $\pi(x_2), \ldots, \pi(x_s)$. Se dimostriamo che dh$B < \infty$ ricaviamo, induttivamente, che B è regolare e quindi $n-1 = s-1$, che ci da anche $n = s$, cioè A è regolare.

✓

Passo (3). Se $\mathrm{dhp}_B\, \mathfrak{m}_B$ è finita allora dh$B < \infty$.

Basta osservare che sostituendo a $\mathfrak{m}_B$ una sua risoluzione libera finita nella successione esatta

$$0 \to \mathfrak{m}_B \to B \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

troviamo una risoluzione libera di $k = B/\mathfrak{m}_B = A/\mathfrak{m}$ e dunque $\mathrm{dhp}_B\, k < \infty$.

✓

Passo (4). $\mathfrak{m}_B$ è un fattore diretto di $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ e quindi basta mostrare che $\mathrm{dhp}_B\, \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ è finita.

Diciamo che $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}/(x)$ è un fattore diretto di $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ sia come A che come B modulo. Infatti, consideriamo la mappa suriettiva

$$\Phi \colon \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}/(x)$$

e mostriamo che esiste una sezione, in tal caso avremmo $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m} = \mathfrak{m}/(x) \oplus Z$. Vale che

$$\mathfrak{m}/(x) = (x_2, \ldots, x_s) + (x)/(x) = (x_2, \ldots, x_s)/(x) \cap (x_2, \ldots, x_s)$$

Possiamo definire allora $s \colon x_i \mapsto x_i$ per $i = 2, \ldots, n$. La mappa s è ben definita, siamo $y \in (x) \cap (x_2, \ldots, x_s)$ allora

$$y = \sum_{i=2}^{s} f_i x_i = -f_1 x$$

quindi $\sum_{i=1}^{s} f_i x_i = 0$ in $\mathfrak{m}$ e perciò anche in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Abbiamo quindi una combinazione lineare a coefficienti in k degli x_i che è nulla, ma poiché sono una base gli $\bar{f}_i = 0$, ossia $f_i \in \mathfrak{m}$ per ogni i. In particolare allora $y = -f_1 x \in x\mathfrak{m}$.

✓

Passo (5). $\mathrm{dhp}\, \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ è finita.

Diciamo che $\mathrm{dhp}_B\, {}^{\mathfrak{m}}\!/\!_{x\mathfrak{m}} < \infty$ e per dimostrarlo costruiamo una sua risoluzione libera lunga al più r. Sappiamo per ipotesi che esiste una risoluzione libera di $\mathfrak{m}$ come A modulo lunga al più $r+1$

$$0 \to F^{-r} \xrightarrow{\partial^{-r}} \dots \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^{0} \to 0$$

con $F^{-i} = A^{n_i}$. Osserviamo che $\mathfrak{m} \otimes B = \mathfrak{m} \otimes {}^{A}\!/\!_{(x)} = {}^{\mathfrak{m}}\!/\!_{x\mathfrak{m}}$, allora se applicando $\_ \otimes B$ a tale complesso ottenessimo che

$$0 \to B^{n_k} \xrightarrow{\partial^{-k}} \dots \xrightarrow{\partial^{-2}} B^{n_1} \xrightarrow{\partial^{-1}} B^{n_0} \to 0$$

è aciclico avremmo la risoluzione che ci serve per concludere. Tuttavia la comologia di questo complesso è data proprio dai $\mathrm{Tor}^i(\mathfrak{m}, B)$, che sono effettivamente zero per $i > 0$. Infatti possiamo calcolarli a partire dalla risoluzione di B

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot x} A \to 0$$

Chiaramente allora $\mathrm{Tor}^i(\mathfrak{m}, B) = 0$ per $i > 1$. Inoltre tensorizzando per $\mathfrak{m}$ otteniamo

$$0 \to \mathfrak{m} \xrightarrow{\cdot x} \mathfrak{m} \to 0$$

ma, per la scelta di x, questa mappa è iniettiva e dunque $\mathrm{Tor}^1(\mathfrak{m}, B) = 0$. □

Corollario 9. Se A è un anello noetheriano locale regolare $p \in \mathrm{Spec}A$, allora A_p è regolare.

Dimostrazione. $A \supset \mathfrak{m} \supset p$ e consideriamo A_p come A modulo. Allora ammette una risoluzione libera

$$0 \to F^{-n} \xrightarrow{\partial^{-n}} \dots \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^{0} \to 0$$

Applichiamo $\_ \otimes A_p$

$$0 \to S^{-1}F^{-n} \xrightarrow{\partial^{-n}} \dots \xrightarrow{\partial^{-2}} S^{-1}F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} S^{-1}F^{0} \to 0$$

per piattezza questa rimane esatta ed è quindi una risoluzione libera del campo residuo $k = S^{-1}(A/p)$. □

Osservazione 3.13. Se $\dim A_p = 1$ e A è un dominio, allora A_p è un anello di valutazione discreta.

3.14 Anelli graduati

Studiando la dimensione di un anello noetheriano locale abbiamo incontrato questo risultato che correla gli anelli regolari con gli anelli graduati:

Teorema 3.15. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale tale che $x_1, \ldots, x_m$ siamo una k-base di ${}^{\mathfrak{m}}\!/_{\mathfrak{m}^2}$. Allora A è un anello regolare se e solo se $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$ è isomorfo a $k[u_1, \ldots, u_m]$ come anelli graduati.

Possiamo estendere quanto detto nel paragrafo precedente all'anello graduato $S = k[x_1, \ldots, x_n]$, considerando però solo i moduli graduati. Ricordiamo che un S modulo libero graduato $(S[k])^n = S^{k+n}$.
Valgono con alcune accortezza allora i seguenti fatti:

- La lunghezza e la dimensione di una risoluzione libera minimale di un modulo M è controllata dai $Tor^i(k, M)$ dove k è lo S modulo S/S^+.
- $x_1, \ldots, x_n$ sono una successione regolare.
- (*Teorema di Hilbert*) Ogni modulo finitamente generato ha una risoluzione lunga al più n.

Capitolo 4

Moduli piatti e proiettivi

Mostriamo adesso alcuni risultati sui moduli ottenibili grazie alla teoria sviluppata sulla comologia. Ricordiamo alcuni fatti:

Proposizione 11.

1. Se M è un A modulo piatto, allora Se $S^{-1}M$ è un $S^{-1}A$ modulo piatto.
2. M è un A modulo piatto se e solo se $M_\mathfrak{m}$ è piatto per ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$ massimale.

Dimostrazione. 1. Basta osservare che un $S^{-1}A$ modulo X è anche un A modulo e che

$$X \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}M \simeq X \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A M) \simeq X \otimes_A M$$

2. C'è da dimostrare solo che la condizione è necessaria. Consideriamo una successione di A moduli esatta

$$0 \to X \to Y$$

vogliamo mostrare che in

$$0 \to \ker f \to M \otimes X \xrightarrow{f} M \otimes Y$$

$\ker f = 0$. Sappiamo che

$$0 \to X_\mathfrak{m} \to Y_\mathfrak{m}$$

è esatta e per ipotesi allora lo è anche

$$0 \to M_\mathfrak{m} \otimes X_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m} \otimes Y_\mathfrak{m}$$

Ma $M_\mathfrak{m} \otimes B_\mathfrak{m} = (M \otimes B)_\mathfrak{m}$ e quindi

$$0 \to (M \otimes X)_\mathfrak{m} \to (M \otimes Y)_\mathfrak{m}$$

è esatta cosicché $\ker f_{\mathfrak{m}} = 0$.
Vale essere zero è una proprietà locale.Infatti supponiamo che un modulo $K \neq 0$ sia tale che $K_{\mathfrak{m}} = 0$ per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$ massimale, allora esistono un elemento $0 \neq k \in K$ e un massimale $\mathfrak{m} \supseteq \mathrm{Ann}(k)$; localizzando avremmo che $\frac{k}{1} = 0$ e quindi esisterebbe $s \in A \setminus \mathfrak{m}$ tale che $sk = 0$, ma per definizione $s \in I$. Assurdo.
Allora $\ker f = 0$ e quindi M è piatto. □

Lemma 13. Sia A un anello commutativo con identità e M un A modulo. M è piatto se e solo se per ogni ideale $I \subseteq A$

$$\mathrm{Tor}^1_A({}^{A}\!/_{I}, M) = 0.$$

Dimostrazione. Ovviamente se M è piatto $\mathrm{Tor}^1_A(\_, M) = 0$. Mostriamo ora che questa condizione è sufficiente. Consideriamo una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{a} Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

e tensorizziamo per M

$$X \otimes M \xrightarrow{b} Y \otimes M \to Z \otimes M \longrightarrow 0$$

Se b è iniettiva allo abbiamo la tesi. Pocediamo per passi.

- Possiamo assumere che Y sia finitamente generato. Supponiamo per assurdo che esistano $x_i \in X$ e $m_i \in M$ tali che

  $$\sum x_i \otimes m_i \neq 0$$

  $$\sum a(x_i) \otimes m_i = 0$$

  Ricordiamo che

  $$Y \otimes M = \frac{\oplus A e_{y,m}}{Rel}$$

  dove *Rel* è l'insieme delle relazioni di equivalenza sugli elementi $e_{y,m}$. Chiamiamo Y' il modulo generato dagli $a(x_i)$ e da tutti gli altri elementi che nell'insieme *Rel* compaiono in relazione con gli $e_{a(x_i),m}$. Allora $\sum a(x_i) \otimes m_i = 0$ è zero anche in $Y' \otimes M$. Chiamiamo ora X' il modulo generato dagli x_i e $a' \colon X' \to Y'$ la restrizione di a, che quindi deve essere iniettiva. Supponiamo di aver dimostrato che b è iniettiva nel caso finitamente generato, allora $\sum x_i \otimes m_i = 0$ in $X' \otimes M$ e visto che le mappe di moduli portano zero in zero, usando l'immersione di $X' \otimes M$ in $X \otimes M$ abbastanza che $\sum x_i \otimes m_i = 0$.

- Se Y è finitamente generato allora Z è finitamente generato: per ipotesi $Z \simeq Y/a(X)$.

- b è iniettiva. $Z = \langle z_1, \dots, z_n \rangle_A$, possiamo allora scrivere una successione di moduli:
$$\begin{cases} Z_0 = Z_1 = \langle z_1 \rangle \\ Z_j = \langle z_1, \dots, z_j \rangle \end{cases}$$
Dato che $Z_j/Z_{j-1} = \langle z_j \rangle$ per ogni j abbiamo un sequenza esatta corta
$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to I_j \to & A & \to & Z_j\diagup Z_{j-1} & \to 0 \\ & a & \mapsto & az_j & \end{array}$$
e dunque $Z_j/Z_{j-1} \simeq A/I_j$.
Per provare la tesi mi basta mostrare che $\mathrm{Tor}^1_A(Z, M) = 0$. In particolare mostriamo che $\mathrm{Tor}^1_A(Z_j, M) = 0$ per ogni j.
Se $j = 1$ $\mathrm{Tor}^1_A(Z_1, M) = \mathrm{Tor}^1_A(A\diagup I_1, M) = 0$.
Se $j > 1$ Applichiamo il funtore $\_ \otimes M$ a
$$0 \to Z_{j-1} \to Z_j \to A\diagup I_j \to 0$$
e otteniamo che $\mathrm{Tor}^1_A(Z_j, M) = 0$, infatti
$$\begin{array}{c} \dots \to Z_{j-1} \otimes M \to Z_j \otimes M \to A\diagup I_j \otimes M \to 0 \\ \dots \to 0 \to \mathrm{Tor}^1(Z_j, M) \to 0 \to \dots \end{array}$$
dato che $\mathrm{Tor}^1_A(A\diagup I_j, M) = 0$ per ipotesi mentre $\mathrm{Tor}^1_A(Z_{j-1}, M) = 0$ per ipotesi induttiva.

□

Definizione 12. La *torsione* di un modulo M è l'insieme
$$\mathrm{Tors}(M) := \{m \in M \mid \mathrm{Ann}(M) \neq 0\}$$

Lemma 14. Tors(M) è un gruppo. Se A è un dominio è anche un modulo.

Lemma 15. Siano A dominio e M un modulo piatto. Allora $\mathrm{Tors}(M) = 0$

Dimostrazione. Se $a \neq 0$ allora è ben definita la successione esatta
$$0 \to A \xrightarrow{a} A \to A\diagup(a) \to 0$$
Tensorizzando per M abbiamo
$$0 \to M \xrightarrow{a} M \to M\diagup(a)M \to 0$$
In particolare la moltiplicazione per a che era iniettiva perché A è un dominio rimane iniettiva, grazie alla piattezza, e quindi $\mathrm{Tors}(M) = 0$. □

Lemma 16. Siano A dominio e M un modulo con $\mathrm{Tors}(M) = 0$. Allora

$$\mathrm{Tor}^1_A({}^{A}\!/_{(a)}, M) = 0.$$

Dimostrazione. Se $a = 0$, dato che A è libero, $\mathrm{Tor}^1_A(A, M) = 0$. Se $a \neq 0$, consideriamo la successione del lemma precedente

$$0 \to A \xrightarrow{a} A \to {}^{A}\!/_{(a)} \to 0$$

e tensorizziamo per M abbiamo

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^1_A({}^{A}\!/_{(a)}, M) \to M \xrightarrow{a} M \to {}^{M}\!/_{(a)M} \to 0$$

Ma $\ker(\cdot a) = 0$ perché che il modulo è senza torsione e visto che

$$\mathrm{Tor}^1_A(A, M) \to \mathrm{Tor}^1_A({}^{A}\!/_{(a)}, M) \to \ker(\cdot a)$$

è esatta, allora $\mathrm{Tor}^1_A({}^{A}\!/_{(a)}, M) = 0$. □

Corollario 10. A PID e e M un modulo con $\mathrm{Tors}(M) = 0$. Allora M è piatto.

Dimostrazione. A PID implica che per ogni I esiste a tale che $I = (a)$, allora per ogni ideale $\mathrm{Tor}^1_A({}^{A}\!/_{I}, M) = 0$ e dunque per il Lemma 13 M è piatto. □

Esempio 4.1.

- $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$ modulo che è piatto ma non proiettivo (né libero).
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z} \times \ldots$ è senza torsione e non è libero.

Osservazione 4.2. Proiettivo implica sempre piatto, lo conferma che per $i > 0$ per un moduli proiettivo i Tor sono tutti nulli.

Esempio 4.3. $A = \mathbb{C}[x, y]$ e $M = (x, y)$ rivedi..

VEDI FINE LEZIONE