Quasi-invarianza rispetto all'azione del gruppo di Levy su $\beta\mathbb{N}$

Guglielmo Nocera

21 luglio 2015

Sommario

Definito il gruppo di Levy di permutazioni di $\mathbb{N}$ e mostrato che la sua azione si estende a $\beta\mathbb{N}$, dimostreremo una caratterizzazione delle funzioni "quasi invarianti" rispetto a tale azione, fornendo poi un operatore T che associa in maniera naturale ad una funzione limitata su $\mathbb{N}$ una funzione quasi invariante.
Articolo di riferimento: Martin Blümlinger, *Levy group action and invariant measures on* $\beta\mathbb{N}$, Transactions of the American Mathematical Society Volume 348, Number 12, December 1996.

1 Gruppo di Levy

Definizione 1 (Gruppo di Levy). *Si definisce gruppo di Levy $\mathcal{G}$ il sottogruppo delle permutazioni di $\mathbb{N}$ costituito da tutte le g tali che*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} |\{n | n \leq N, gn > N\}| = 0$$

(ovvero il limite esiste ed è 0).

Definizione 2. *Definiamo l'operatore T su funzioni limitate (in modulo) da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ nella maniera seguente:*

$$Tf(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

Definizione 3. *La funzione di densità di un insieme $A \subset \mathbb{N}$ è definita come*

$$d_A(n) = |\{i \in A | i \leq n\}|.$$

Lemma 1. *Sono equivalenti:*

(a) $g \in \mathcal{G}$

(b) $\forall f$ *limitata su* $\mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} Tf(n) - Tf_g(n) = 0$, *dove* $f_g(n) = f(gn)$

(c) $\forall A \subset \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} d_A(n) - d_{gA}(n) = 0$

<u>*Dim.*</u> Per definizione di $\mathcal{G}$ (a) implica (b), dato che considerando le cancellazioni:

$$Tf(n) - Tf_g(n) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(i) - f(gi) \leq \frac{1}{n}\sum_{i\in\Lambda(n)} f(i) - f(gi) \leq \frac{1}{n}\ 2(\sup f)\ |\Lambda(n)| \longrightarrow 0$$

dove $\Lambda(n) = \{i \leq n|\ gi > n\}$. Considerando che $d_A = T\chi_A$ è limitata otteniamo anche (b)$\Longrightarrow$(c). Vediamo l'ultima implicazione, cioè supponiamo che valga (c). Allora se g non appartenesse a $\mathcal{G}$ avremmo che esiste una successione (n_i) (che a meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che soddisfi $\frac{n_{i-1}}{n_i} \longrightarrow 0$) tale che $|E_i|/n_i > \alpha$per un certo α (definendo $E_i = \{n|n \leq n_i, gn > n_i\}$). Sia ora $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$. Quindi, poiché per definizione $gE_j \subset [n_j + 1, \infty)\ \forall j$,

$$d_{gA}(n_i) \leq d_{\cup_{j<i}E_j}(n_i) \leq \frac{n_{i-1}}{n_i} \longrightarrow 0,$$

ma allora $\limsup_{n\to\infty} d_A(n_i) - d_{gA}(n_i) \geq \alpha > 0$, assurdo.

Teorema 2. *Se* A, B *sono sottoinsiemi infiniti e coinfiniti di* $\mathbb{N}$, *esiste* $g \in \mathcal{G}$ *con* $B = gA$ *se e solo se* $\lim d_A(n) - d_B(n) = 0$.

<u>*Dim.*</u> Certamente se $B = gA$ per un qualche $g \in \mathcal{G}$ si ha $\lim_n d_A(n) - d_B(n) = 0$ per il lemma precedente. Viceversa se $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$, $A^c = \{a'_1 < a'_2 < \dots\}$, $B = \{b_1 < b_2 < \dots\}$ e $B^c = \{b'_1 < b'_2 < \dots\}$, definiamo g come $ga_i = b_i$, $ga'_i = b'$. Segue che

$$\frac{1}{N}|\{n|n \leq N, gn > N\}| = \frac{1}{N}|\{n \in A|n \leq N, gn > N\}| + \frac{1}{N}|\{n \in A^c|n \leq N, gn > N\}| =$$

$$= max(0, d_A(N) - d_B(N)) + \max(0, d_{A^c}(N) - d_{B^c}(N)).$$

Ma se $\lim_{n\to\infty} d_A(n) - d_B(n) = 0$ anche $\lim d_{A^c}(n) - d_{B^c}(n) = \lim[(n - d_A(n)) - (n - d_B(n))] = 0$, cioè per quanto appena visto

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}|\{n|n \leq N, gn > N\}| = 0$$

da cui la tesi, cioè $g \in \mathcal{G}$ (per definizione).

Definizione 4. *Definiamo insieme quasi invariante rispetto all'azione del gruppo di Levy* $\mathcal{G}$ *se* $A\Delta gA$ *ha densità asintotica* 0 *per ogni* $g \in G$. *Definiamo funzione quasi invariante una funzione* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *t.c. l'insieme* $\{n \in \mathbb{N}|\ |f(n) - f(gn)| > \varepsilon\}$ *ha densità 0 per ogni* $\varepsilon > 0$.

2 Azione su $\beta\mathbb{N}$

Prima di proseguire, alcuni richiami su $\beta\mathbb{N}$ e sulla sua topologia. Come consuetudine, confonderemo senza preavviso A sottoinsieme di $\mathbb{N}$ con la sua immersione in $\beta\mathbb{N}$ data dagli ultrafiltri principali associati. Ricordiamo inoltre che $\mathcal{O}_A = \overline{A}$, considerando A rispettivamente nei due sensi, e che tale sottoinsieme di $\beta\mathbb{N}$ è aperto e chiuso.

Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to K$ (K compatto T_2) si estende in modo unico ad una funzione *continua* $\bar{f} : \beta\mathbb{N} \to K$. In particolare, se f è limitata su $\mathbb{N}$ anche Tf lo è, e quindi è ben definita (per unicità dell'estensione) la funzione continua $\overline{Tf} : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. In generale indicheremo, per una generica $h \in C(\beta\mathbb{N})$, $Th = \overline{T(h|_{\mathbb{N}})}$.

Definiamo quasi invariante una funzione continua su $\beta\mathbb{N}$ se la sua restrizione a $\mathbb{N}$ lo è.

Osservazione 2.1. Una qualunque permutazione g di $\mathbb{N}$ induce un automorfismo topologico di $\beta\mathbb{N}$ con la definizione naturale $g\mathcal{U} = \{gA | A \in \mathcal{U}\}$. Infatti se essendo g biunivoca su $\mathbb{N}$ abbiamo che $gA \in g\mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U}$. Dal punto di vista topologico, invece, vale

$$g\mathcal{O}_A = \{g\mathcal{U} | \mathcal{U} \in \mathcal{O}_A\} = \{g\mathcal{U} | A \in \mathcal{U}\} = \{g\mathcal{U} | gA \in g\mathcal{U}\} = \{\mathcal{V} | gA \in \mathcal{V}\} = \mathcal{O}_{gA}$$

per cui g trasforma elementi della base in elementi della base e dunque, essendo un automorfismo, è anche un automorfismo topologico.

Definizione 5. *Definiamo S il sottoinsieme di $\beta\mathbb{N}$ contenente tutti quegli ultrafiltri che contengono solo sottoinsiemi a densità superiore positiva, cioè non contenenti insiemi a densità nulla.*

Lemma 3. *Per ogni $f \in C(\beta\mathbb{N}), g \in \mathcal{G}$, vale $Tf(x) - Tf_g(x) = 0$ su $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.*

<u>*Dim.*</u> Sappiamo che la funzione $f|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, che è limitata in quanto $\beta\mathbb{N}$ è compatto e quindi f è limitata, si estende in maniera unica ad una funzione continua (che dunque sarà proprio f) da $\beta\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, con

$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\text{-}\lim_k f(k).$$

Ora, $\mathcal{U}\text{-}\lim_k f(k) = 0$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \{k || f(k)| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Ma se g è nel gruppo di Levy vale $\lim_k f(k) = 0$ come limite classico su $\mathbb{N}$, e quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ t.c. \ |f(k)| < \varepsilon \ \forall k \leq M$$

il che significa semplicemente che $\{k || f(k)| < \varepsilon\}$ è cofinito e quindi sta in $\mathcal{U}$ per ogni $\mathcal{U}$ non principale. Quindi $f(\mathcal{U}) = 0$ per ogni $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. □

Teorema 4. *S è chiuso, non vuoto e $\mathcal{G}-$invariante (nel senso che $\mathcal{G}S = S$). Ogni sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ è tale che $\overline{A} \cap S \neq 0$ se e solo se $\overline{d_A} > 0$.*

Dim. D'ora innanzi, salvo specifica, con "densità" si intenderà "densità superiore e inferiore" (coincidenti).
I sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con densità 1 hanno la PIF e formano un filtro $\mathcal{F}$. Ogni ultrafiltro che estende $\mathcal{F}$ deve stare in S, perché se non gli appartenesse conterrebbe un sottoinsieme di densità 0, e dunque non conterrebbe il suo complementare avente densità 1, assurdo perché si è detto che l'ultrafiltro estende $\mathcal{F}$. In particolare S è non vuoto.
Ora, se $\mathcal{U} \notin S$ esiste $B \in \mathcal{U}$ (ovvero $\mathcal{U} \in \overline{B}$) con densità 0; ma $\overline{B}$ è anche aperto e $\overline{B} \cap S = \varnothing$ per definizione di S. Quindi S^c è aperto perché contiene un intorno di ogni suo punto $\mathcal{U}$, e dunque S è chiuso.
Inoltre S non interseca $\mathbb{N}$, e dunque ha parte interna vuota, perché ogni $\mathcal{O}_A$ contiene ultrafiltri principali.
S è $\mathcal{G}-$invariante: infatti per il *Lemma 1* $\overline{d_A} > 0$ se e solo se $\overline{d_{gA}} > 0$, e dunque $\mathcal{U} \in S \iff g\mathcal{U} \in S$.
Infine, se A ha densità superiore positiva e B ha densità 1 abbiamo $\overline{d_{A\cap B}} = \overline{d_A}$[1] e quindi $A \cap B \neq \varnothing$. Quindi $\mathcal{F} \cap A$ (cioè $\{F \cap A | F \in \mathcal{F}\}$) genera un filtro (che evidentemente estende $\mathcal{F}$) che si estenderà a sua volta ad un ultrafiltro $\mathcal{U}$: questo conterrà A e non conterrà insiemi a densità nulla, poiché contiene anche $\mathcal{F}$. Segue che $\mathcal{U} \in \overline{A} \cap S \neq \varnothing$. Viceversa se A è tale che $\overline{A} \cap S \neq \varnothing$ allora $\exists \mathcal{U} \in \overline{A} \cap S$, ovvero $A \in \mathcal{U}$ e quindi $\overline{d_A} > 0$.

Lemma 5. *Se $x \in S$ vale: $f(x) = f(gx)$ per ogni funzione $f \in C(\beta\mathbb{N})$ quasi invariante e per ogni $g \in \mathcal{G}$.*

Dim. Se f non fosse costante sull'orbita di x esisterebbero $g \in \mathcal{G}, \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) + 3\varepsilon < f(gx)$. Allora l'insieme $C = \{n \in \mathbb{N} | f(n) < f(x) + \varepsilon, f(gn) > f(gx) - \varepsilon\}$ è contenuto nell'ultrafiltro x. Infatti se così non fosse avremmo $C^c = \{n \in \mathbb{N} | f(x) + \varepsilon \leq f(n) \vee f(gn) \leq f(gx) - \varepsilon\} \in x$, e quindi $x \in \mathcal{O}_{C^c} = \overline{C}$, ovvero esiste una successione di $n_i \in C^c$ convergente a x. Quindi $f(x) = \lim_{n_i \to x} f(n_i) \geq f(x) + \varepsilon$ oppure $f(gx) = \lim_{n_i \to x} f(gn_i) \leq f(gx) - \varepsilon$, assurdo.
Quindi poiché $x \in S$ C ha densità superiore positiva, e così pure $\{n || f(n) - f(gn)| > \varepsilon\}$ che lo contiene. Dunque f non è quasi invariante, assurdo. $\square$

Ecco dunque i due risultati finali:

[1] Infatti una disuguaglianza è immediata, e per l'altra

$$\overline{d}_A \leq \overline{d}_{A\cap B} + \overline{d}_{A\cap B^c} \leq \overline{d}_{A\cap B} + \overline{d}_{B^c} = \overline{d}_{A\cap B}$$

perché

$$\overline{d}_{B^c} \leq 1 + \limsup_n -d_B(n) = 1 - \liminf_n d_B(n) = 1 - d(B) = 0.$$

Teorema 6. *f limitata su $\mathbb{N}$ è quasi invariante se e solo se la sua estensione continua a $\beta\mathbb{N}$ è costante sulle $\mathcal{G}-$orbite di S.*

Dim. Dal lemma precedente abbiamo un'implicazione. Quanto all'altra, supponiamo che f, invece, non sia quasi invariante, ovvero che esista $\varepsilon > 0$ t.c. $\{n|f(n) < f(gn) - 3\varepsilon\}$ ha densità superiore positiva. Più precisamente esiste k t.c. $C = \{n|f(n) < k\varepsilon, f(gn) > (k+1)\varepsilon$ ha densità asintotica positiva. Per il *Teorema 4* allora $\overline{C} \cap S \neq \varnothing$, ovvero esiste $x \in S$ t.c. $f(x) \leq k\varepsilon$ e $f(gx) \geq (k+1)\varepsilon$. Dunque f non è costante sulla $\mathcal{G}-$orbita di x. $\square$

Corollario 7. *Per ogni funzione f limitata su $\mathbb{N}$, Tf è quasi invariante.*

Dim. Segue direttamente dal teorema precedente e dal fatto che $Tf - Tf_g$ si annulla su $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ e quindi su S.