# Varietà asferiche esotiche di Davis

Guglielmo Nocera

19 aprile 2017

**Sommario**

Nota per il colloquio del quarto anno della Scuola Normale su esistenza e costruzione di varietà asferiche con rivestimento universale non omeomeorfo allo spazio euclideo.

# Indice



## 0 Introduzione

**Definizione.** *Una varietà topologica è detta chiusa se è compatta e senza bordo.*

**Definizione.** *Una varietà topologica connessa $X$ è detta asferica se $\pi_n(X) = 0$ per ogni $n \geq 2$.*

**Definizione.** *Una varietà topologica è detta lineare a pezzi (PL) se gli omeomorfismi che definiscono i cambi di carta possono essere presi lineari a pezzi.*

Ricordiamo che ogni varietà topologica è semilocalmente semplicemente connessa e quindi ammette rivestimento universale.
Chiameremo una tale varietà **esotica** se il suo rivestimento universale non è omeomorfo allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ (con $n$ l'unico possibile, ovvero la dimensione della varietà). Anzitutto osserviamo che se il rivestimento universale è omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, o più in generale contrattile, la varietà è sferica, perché il rivestimento induce sempre un isomorfismo tra i gruppi di

omotopia di dimensione maggiore di 1. L'esistenza di varietà compatte asferiche che siano esotiche, invece, non è garantita in tutte le dimensioni. In particolare è noto (e niente affatto banale; ma non ne parleremo) che in dimensione minore o uguale a 3 non ne esistono, vale a dire ogni $1, 2, 3$-varietà connessa, compatta e sferica ha rivestimento universale omeomeorfo ad $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$.
In dimensione superiore, invece, andremo a mostrare il contrario:

**Teorema** (Risultato finale)**.** *Per ogni $n \geq 4$ esiste una $n$-varietà PL chiusa e asferica il cui rivestimento universale non è omeomorfo allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.*

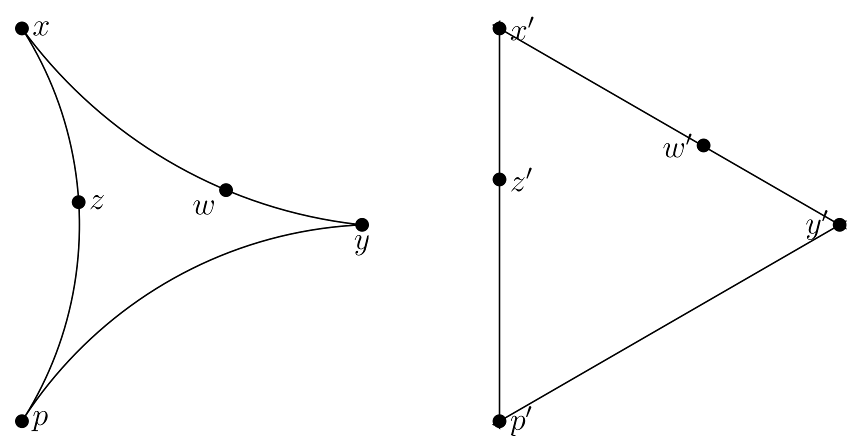
Una costruzione è dovuta a Michael Davis, di cui queste varietà portano il nome. La dimostrazione che prendiamo in esame se ne discosta in parte, coinvolgendo la teoria degli spazi CAT(0) e CAT(1) e i complessi cubici. Entrambe, però, prendono le mosse dall'esistenza delle cosiddette "sfere di omologia" non semplicemente connesse.

**Definizione.** *Una "sfera di omologia" è una varietà topologica di dimensione $m$ avente la stessa omologia della sfera $\mathbb{S}^m$: $H_\bullet(X) \cong H_\bullet(\mathbb{S}^m)$.*

Spazi del genere che non siano semplicemente connessi esistono solo in dimensione maggiore o uguale di 4: si tratta di un risultato non banale, la cui dimostrazione è stata data separatamente in dimensione maggiore o uguale di 5 e in dimensione 4. Non lo affronteremo. Cfr. [Maz61], [Ker69].

# 1 Spazi CAT(0) e CAT(1)

**Definizione 1.1.** *Dato un triangolo $[pxy]$ in uno spazio metrico $X$ definiamo il suo triangolo modello euclideo $\mathcal{E}([pxy]) = [p'x'y']$ come il triangolo nel piano euclideo aventi lati di lunghezza rispettivamente $d_X(p,x), d_X(x,y)$ e $d_X(p,y)$: questo esiste perché, essendo i lati geodetici, le loro lunghezze soddisfano la disuguaglianza triangolare, ed è unico. Sia $\mathcal{E}_{[pxy]} : [pxy] \longrightarrow [p'x'y']$ la mappa che porta $p$ in $p'$, $x$ in $x'$, $y$ in $y'$ e un punto $z$ ad es. in $[px]$ nel punto del lato $[p'x']$ a distanza $d_X(p,z)$ da $p$ (e analogamente per punti sugli altri lati).*
*Lo spazio $X$ è **CAT(0)** se per ogni triangolo $[pxy]$ la mappa $\mathcal{E}$ non diminuisce le distanze. Vale a dire:*



*per ogni* $z, w$ *vale* $d_X(z,w) \leq d_{\mathcal{E}}(z', w')$.
*Un triangolo* $[pxy]$ *in* $X$ *che soddisfa la condizione sopra descritta è detto* ***stretto***.

**Definizione 1.2.** *Consideriamo sulla sfera* $\mathbb{S}^2$ *la distanza* $d_{\mathcal{S}}(p,q) = arccos(\langle p, q\rangle)$. *Dato un triangolo geodetico* $[pxy]$*, se la somma delle lunghezze dei lati è minore di* $2\pi$*, definiamo il suo triangolo modello sferico come l'unico triangolo sulla sfera* $\mathbb{S}^2$ *(a meno di isometrie) avente lati geodetici delle lunghezze corrispondenti (senza la condizione data non esiste o, nel caso limite, non è unico). Uno spazio metrico è detto CAT(1) se ogni suo triangolo geodetico è tale che la mappa* $\mathcal{S} : [pxy] \longrightarrow \mathbb{S}^2$*, definita analogamente al caso del modello euclideo, non diminuisce le distanze.*

**Nota 1.3.** La terminologia CAT, introdotta da Mikhail Gromov, è un acronimo per "Élie Cartan, Aleksandr Alexandrov e Victor Topogonov".

Una connessione fra CAT(0) e CAT(1), che ci sarà utilissima, la fornisce il cono metrico.

**Definizione 1.4** (Cono metrico)**.** *Dato uno spazio metrico* $X$*, il cono* $Cone(X)$ *è lo spazio* $[0, \infty] \times X$ *quozientato per* $(0, p) \sim (0, q)$ $\forall p, q \in X$*, con la distanza*

$$d_{Cone(X)}((p, s), (q, t)) = \sqrt{s^2 + t^2 - 2st\cos\alpha}$$

*dove* $\alpha = \min\{\pi, d_X(p, q)\}$.

**Proposizione 1.5.** *Se* $Y = Cone(X)$*, allora* $Y$ *è CAT(0) se e solo se* $X$ *è CAT(1).*

Infine, enunciamo il lemma fondamentale di questa prima parte elementare della teoria:

**Lemma 1.6** (Lemma di ereditarietà)**.** *Sia* $[pxy]$ *un triangolo geodetico in uno spazio metrico, e sia* $z$ *un punto sul lato* $[xy]$. *Se i triangoli con un lato in comune* $[pxz]$ *e* $[pyz]$ *sono entrambi stretti, allora lo è anche* $[pxy]$*: ciò nel senso del confronto con i modelli euclidei e, nel caso in cui* $[pxy]$ *abbia perimetro minore di* $2\pi$*, anche nel senso del confronto con i modelli sferici.*

# 2 Spazi localmente CAT(0)

**Definizione 2.1.** *Uno spazio metrico è localmente CAT(0) se ogni punto ammette una palla chiusa centrata in esso che sia CAT(0) come sottospazio metrico.*

Specularmente al caso globale, si studiano qui le proprietà delle geodetiche *locali*, ovvero curve che localmente hanno la proprietà sulla preservazione delle distanze che definisce una geodetica. È questa la chiave delle dimostrazioni di molti dei risultati che troveremo.

**Osservazione 2.2.** La nozione "localmente CAT(0)" ha un'interpretazione in termini di "curvatura": essa misura infatti l'allontanarsi delle geodetiche uscenti da un punto, e in particolare assicura che queste si allontanano almeno tanto lentamente quanto nello spazio euclideo (es. nello spazio iperbolico, etc.). Si parla, per gli spazi localmente CAT(0), di "spazi metrici a curvatura non positiva" ([Dav01]).
Il parallelo con la geometria Riemanniana si prolunga idealmente nel seguente

**Teorema 2.3** (Teorema di globalizzazione, B. Bowditch, 1995)**.** *Ogni spazio proprio localmente CAT(0) che sia di lunghezze e semplicemente connesso è CAT(0).*

**Proposizione 2.4.** *Uno spazio proprio, di lunghezze e CAT(0) è contraibile.*

Dimostrazione: Risulta infatti, a partire dalla disuguaglianza CAT(0), che uno spazio del genere è univocamente geodetico con dipendenza continua delle geodetiche dagli estremi. Pertanto si può retrarre lo spazio su un punto collegando questo a tutti gli altri punti via geodetiche e sfruttando la continuità per definire una retrazione per deformazione lungo quelle geodetiche. □

Alla luce di quest'ultimo risultato possiamo mettere in relazione il Teorema di globalizzazione con il Teorema di Hadamard:

**Teorema 2.5** (Hadamard)**.** *Una varietà Riemanniana $(M^n, g)$ a curvatura sezionale mai positiva e semplicemente connessa è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (e dunque contraibile).*

# 3 Metrica sferica su triangolazioni

Sia dato un complesso simpliciale finito $S$ (nel nostro caso sarà una triangolazione di una varietà compatta). Ogni $n$-simplesso è in bigezione con il simplesso standard di $\mathbb{R}^n$.
Consideriamo invece un altro tipo di "rappresentazione standard" dei simplessi, portando in maniera canonica il simplesso euclideo su un triangolo di $\mathbb{S}^n$ che abbia tutti gli angoli retti (in $\mathbb{S}^2$, un "quarto di calotta"). Ciò fa sì che sia definita, sul complesso di partenza, la lunghezza di ogni curva, andando a considerare le lunghezze su $\mathbb{S}^n$ dei tratti di curva contenuti nei simplessi (per $n$ opportuno, a seconda della dimensione del simplesso considerato: ma risulta tutto coerente rispetto al contenimento fra simplessi) . Osserviamo ad esempio che con questa definizione i lati di tutti i simplessi hanno lunghezza $\frac{\pi}{2}$.
È quindi possibile definire una *metrica di lunghezze* sul complesso $S$:

$$d(p, q) = \inf\{lungh(\gamma) \mid \gamma \text{ congiungente } p \text{ e } q\}.$$

**Osservazione 3.1.** Se il complesso ha una certa proprietà di "finezza", la distanza risultante è CAT(1). La proprietà è la seguente:

**Definizione 3.2.** *Un complesso è detto* ***a bandiera*** *se dati $\{v_0, \dots, v_k\}$ vertici collegati a due a due da lati, questi sono vertici di uno stesso $k$-simplesso.*

**Proposizione 3.3.** *Un complesso con la metrica sferica "degli angoli retti" definita sopra è CAT(1) se e solo se è a bandiera.*

**Lemma 3.4.** *La prima suddivisione baricentrica di una qualsiasi triangolazione è a bandiera.*

Nel seguito, quindi, a meno di considerare la prima suddivisione baricentrica supporremo tutti i complessi a bandiera e quindi CAT(1) con la metrica sopra definita.

# 4 Analogo cubico di un complesso simpliciale finito

Sia $S$ un complesso simpliciale finito con $N$ vertici, e di dimensione $n$. Consideriamo $C^N \subset \mathbb{R}^N$ il cubo unitario. Quel che faremo è selezionare alcune delle sue facce (intese in senso generalizzato, quindi di varie dimensioni) mediante il seguente criterio: per ogni

$k$-simplesso di $S$ $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$ consideriamo il $(k+1)$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$ dato da $Span(e_{i_0}, \ldots, e_{i_k})$, e selezioniamo tutte le $(k+1)$-facce di $C^N$ parallele a tale sottospazio.
Facendo variare $k$ da $0, \ldots, n$ e considerando quindi tutti i simplessi di $S$ otteniamo un sottoinsieme $Q$ di $C^N$ che definiamo **analogo cubico** di $S$. Esso è in effetti un complesso cubico, in quanto unione di facce di $C^N$.

**Osservazione 4.1.** Se $S$ ha dimensione $n$, $Q$ ha dimensione $n+1$ come complesso cubico. Inoltre, poiché ogni faccia può essere decomposta in simplessi, $Q$ ammette una naturale struttura di complesso simpliciale.

**Osservazione 4.2.** È possibile porre una struttura metrica naturale su $Q$, che è la metrica di lunghezze indotta da $\mathbb{R}^N$: $d(p,q)$ sarà l'inf delle lunghezze delle curve (es. lineari a tratti) che li congiungono in $Q$: tali lunghezze sono quelle indotte dalla metrica di $\mathbb{R}^N$.

**Lemma 4.3.** *Dato $S$ complesso simpliciale finito a bandiera, il link* Lk $v$ *di ogni vertice di $Q$ è isometrico a $S$ con le distanze rispettivamente definite.*

Questa è una verifica diretta, a partire dalle definizioni, ma è il cuore dei ragionamenti che seguiremo nel proseguo della discussione.

**Corollario 4.4.** *Dato $S$ complesso simpliciale finito a bandiera, $Q$ è localmente CAT(0).*

<u>*Dimostrazione:*</u> $Q$ è ricoperto dalle stelle aperte $st(v)$ dei propri vertici; ma valgono le isometrie

$$st(v) \cong Cone(\mathrm{Lk}\ v) \cong Cone(S)$$

che è CAT(0) per la Proposizione 1.5. □

# 5 Costruzione di una varietà esotica

**Teorema 5.1.** *Per ogni $n \geq 4$ esiste una $n$-varietà PL compatta asferica il cui rivestimento universale non è omeomorfo allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.*

<u>*Dimostrazione:*</u> Siano $Z^{n-1}, W^n$ due varietà lisce compatte tali che:

- $W$ è una varietà con bordo, ed è contraibile
- $Z$ è il bordo di $W$
- $H_\bullet(X) \cong H_\bullet(\mathbb{S}^{n-1})$ ($Z$ è una sfera di omologia)
- $\pi_1(Z) \neq 0$.

Come detto, assumiamo per vera l'esistenza di tali $Z, W$ ([Maz61],[Ker69]).
$W$ è triangolabile: sia $S$ la restrizione di una triangolazione (finita) di $W$ al bordo $Z$. A meno di passare alla prima suddivisione baricentrica $S^{(1)}$, $S$ è un complesso a bandiera. Con la struttura metrica sferica ad angoli retti, è CAT(1).
Sia $Q$ il suo analogo cubico con la metrica di lunghezze indotta da $\mathbb{R}^N$. Valgono le seguenti proprietà:

- $Q$ è localmente CAT(0), pertanto è uno spazio topologico asferico.
  <u>*Dimostrazione:*</u> Abbiamo visto in precedenza (Corollario 4.4) che $Q$ è localmente CAT(0).

Il suo rivestimento universale $\tilde{Q}$ eredita tramite pull-back (si trasportano su $\widetilde{Q}$ le lunghezze delle curve e si considera la metrica di lunghezze indotta) una struttura metrica anch'essa localmente CAT(0), di lunghezze (per costruzione) e propria (lo spazio base $Q$ è compatto). Per il Teorema di globalizzazione 2.3 $\widetilde{Q}$ è CAT(0) e contraibile. Pertanto $Q$ è asferico.

- $\pi_1(Z) \neq 0 \Longrightarrow \widetilde{Q}$ non è semplicemente connesso all'infinito (cenno della dimostrazione in appendice).

  **Definizione 5.2.** *Uno spazio topologico $X$ si dice* ***semplicemente connesso all'infinito*** *se $\forall K$ compatto esiste $K' \supset K$ compatto tale che ogni laccio in $\pi_1(X \setminus K')$ è banale in $\pi_1(X \setminus K)$.*

  **Osservazione 5.3.** $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso all'infinito per ogni $n \geq 3$, prendendo per ogni $K$ il compatto $K'$ dato da una palla chiusa che lo contiene.

  **Corollario 5.4.** *Poiché $\widetilde{Q}$ non è semplicemente connesso all'infinito, non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

- $Q$ è una *"homology n-manifold"*, in particolare è una varietà PL fuori dai propri vertici.
  Dimostrazione: Segue dal fatto che il link di ogni vertice è omeomorfo a $Z$, e dal fatto che $H_\bullet(X) \cong H_\bullet(\mathbb{S}^{n-1})$, via un teorema relativo alle varietà poliedrali.

- Esiste una $n$-varietà poliedrale compatta $M$ omotopicamente equivalente a $Q$. $M$ è asferica ed esotica della dimensione voluta.
  Dimostrazione: Abbiamo già osservato che il link di ogni vertice di $Q$ è omeomorfo a $Z$. Possiamo pertanto incollare copie di $W$ sul bordo $Z$ lungo i bordi di intorni dei vertici di $Q$. Tale incollamento dà origine ad una varietà PL compatta e induce una equivalenza di omotopia, in quanto $W$ è contraibile e quindi le coppie $(W, Z)$ soddisfano la Proprietà di Estensione dell'Omotopia.
  Si verifica che le mappe che inducono l'equivalenza omotopica si sollevano a mappe proprie tra i rivestimenti universali di $Q$ ed $M$. Quindi $M$ è asferica ed esotica.

  □

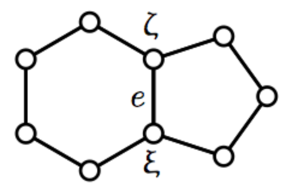
# 6 Appendice

**Proposizione 6.1.** *Se $S$ è un complesso simpliciale finito e $Q$ è il suo analogo cubico, $\pi_1(S) \neq 0 \Longrightarrow \widetilde{Q}$ non è semplicemente connesso all'infinito.*

Dimostrazione: Consideriamo un laccio non banale $\gamma$ in $S$. A meno di deformare, possiamo supporre che esso sia formato da lati del complesso. Tra tutti i lacci non banali formati da lati del complesso scegliamo $\gamma$ di lunghezza minima, e consideriamo $\gamma$ come sottocomplesso unidimensionale di $S$. È definito pertanto l'analogo cubico $G$ di $\gamma$ che sarà un sottocomplesso cubico (di dimensione 2) di $Q$. Sia $v$ un vertice in $G$ e $G_v$ la componente connessa di $G$ che lo contiene. Sia invece $\widetilde{G}_v$ una componente connessa dell'immagine inversa di $G_v$ nel rivestimento universale $\widetilde{Q}$, e $\widetilde{v} \in \widetilde{G}_v$ nella fibra di $v$.

**Lemma 6.2.** *$\widetilde{G}_v$ è convesso in $\widetilde{Q}$, e pertanto CAT(0) (visto che $\widetilde{Q}$ lo è).*

<u>*Dimostrazione:*</u> Alla luce di un lemma elementare riguardante gli spazi CAT(0), ogni chiuso connesso e localmente convesso in un CAT(0) è convesso. Mostriamo pertanto che $\widetilde{G}_v$ è localemente convesso in $\widetilde{Q}$, o alternativamente che $G$ è localmente convesso in $Q$.
Se non lo fosse, non è difficile rendersi conto del fatto che ci si può ricondurre ad una situazione del tipo




con $\gamma$ il laccio esterno e un lato $e$ non contenuto in $\gamma$ che però congiunge due suoi vertici. Ricordiamo che con la metrica sferica tutti i lati hanno lunghezza $\frac{\pi}{2}$. Del resto almeno uno fra i due lacci interni è non banale, altrimenti lo sarebbe $\gamma$. Ma ognuno dei due lacci interni ha lunghezza minore di quella di $\gamma$, assurdo. $\square$

Quindi $\widetilde{G}_v$ è una varietà di dimensione 2 senza bordo convessa in $\widetilde{Q}$, quindi CAT(0), quindi contraibile. Si osserva che per i teoremi di classificazione delle superfici $\widetilde{G}_v$ è omeomorfo al piano euclideo.
Sia ora $C_R$ la circonferenza di raggio $R$ su "su" $\widetilde{G}_v$ centrata in $\widetilde{v}$. Tutti i $C_R$ sono omotopicamente equivalenti fra loro in $\widetilde{G}_v \setminus \{\widetilde{v}\}$ e quindi in $\widetilde{Q} \setminus \{\widetilde{v}\}$. Il punto è che possiamo definire una mappa $\widetilde{Q} \setminus \{\widetilde{v}\} \longrightarrow S$ che associa a $x \neq \widetilde{v}$ il punto corrispondente su $Q$ e a questo la direzione $[xv]$. Per direzione si intende un concetto molto preciso, che riguarda la "velocità in uscita" di una geodetica da un punto; in questa sede si può interpretare la mappa in questo modo: preso $x$ in $Q \setminus \{v\}$, gli si può associare un unico punto in $Lk_Q\ v$, in maniera continua. Se $x \in G_v$, in particolare, questo punto sarà in $Lk_G\ v$. La mappa è di tipo "radiale": ad esempio, sul piano $\widetilde{G}_v$ del rivestimento può essere pensata come una retrazione di $\widetilde{G} \setminus \{\widetilde{v}\}$ su un qualsiasi $C_R$. Pertanto $C_R$ va a finire surgettivamente sull'immagine della mappa ristretta a $\widetilde{G} \setminus \{\widetilde{v}\}$, che è tutto il $Lk_G\ v$. Si ha quindi che l'immagine di $C_R$ è omeomorfa a $\gamma$, dato che lo è $Lk_G\ v$ (perché $G$ è l'analogo cubico di $G$) dentro l'immagine di tutta la mappa, ovvero $Lk_Q\ v$, il quale è omeomorfo al'intero $S$ (perché $Q$ è l'analogo cubico di $S$). In conclusione, dunque, l'immagine di $C_R$ è omotopa a $\gamma$ dentro $S$.
Si ottiene pertanto che $C_R$ non è banale non solo in $\widetilde{G}_v \setminus \{\widetilde{v}\}$, ma nemmeno in $\widetilde{Q} \setminus \{\widetilde{v}\}$ (altrimenti la sua immagine via una mappa continua lo sarebbe).
Si può dunque concludere. Supponiamo che $\widetilde{Q}$ sia semplicemente connesso all'infinito: allora preso $K = \{\widetilde{v}\}$ esiste un compatto $K' \ni \widetilde{v}$ tale che ogni laccio fuori da $\widetilde{Q} \setminus K'$ si scioglie in $\widetilde{Q} \setminus \{\widetilde{v}\}$. Tuttavia per $R$ abbastanza grande $C_R$ è interamente fuori da $K'$ ($K' \cap \widetilde{G}$ è compatto), e non si scioglie in $\widetilde{Q} \setminus \{\widetilde{v}\}$ per quanto detto sopra. $\square$

# Riferimenti bibliografici

[AKP17] S. Alexander, V. Kapovitch, and A. Petrunin. *Invitation to Alexandrov geometry: CAT[0] spaces*. https://arxiv.org/pdf/1701.03483.pdf, 2017.

[Dav01] M. Davis. Exotic aspherical manifolds, 2001.

[Ker69] M. Kervaire. Smooth homology spheres and their fundamental groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 144 67-72*, 1969.

[Lee95] B. Leeb. 3-manifolds with(out) metrics of nonpositive curvature. *Invent. Math. 122, no.2, 277-289.*, 1995.

[Maz61] B. Mazur. A note on some contractible 4-manifolds. *Annals of Mathematics Vol. 73, No.1, January*, 1961.