Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Appunti del corso di

Equazioni Ellittiche

Frutto della libera rielaborazione delle lezione tenute
dal professor Antonio Tarsia durante l'Anno Accademico 2019/2020

Marco Inversi

Data ultima modifica: 22/04/2020

Indice

Notazione

Adotteremo la notazione dei multi-indici. Per la precisione, dato un multi-indice $p \in \mathbb{N}^n$, si pone

$$|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i, \quad p! = \prod_{i=1}^{n} p_i!.$$

Dato $\xi \in \mathbb{N}^n$, si pone

$$\xi^p = \prod_{i=1}^{n} \xi_i^{p_i};$$

Dati due multi-indici $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, diremo che $\alpha \leq \beta$ se la disuguaglianza vale componente per componente; diremo che $\alpha < \beta$ c'è almeno una componente in cui la disuguaglianza è stretta. Dati due multi-indici $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tali che $\alpha \leq \beta$, si pone

$$\binom{\beta}{\alpha} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\beta_i}{\alpha_i}.$$

Dato un multi-indice α, denoteremo con D^α l'operatore di derivata di ordine α; per le derivate di ordine 1 o 2, adotteremo la notazione D_i, D_{ij}.

Utilizzeremo ampiamente la teoria sugli spazi di Sobolev. Dati un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ e $m \in \mathbb{N}$, sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$; denoteremo con

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

$$|u|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

La quantità $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ è la norma di $W^{m,p}(\Omega)$; la quantità $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ è la seminorma su $W^{m,p}(\Omega)$ che considera soltanto le norme L^p delle derivate di ordine massimo.

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, denoteremo con d_Ω il suo diametro. Per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ poniamo $\Omega_r(x) := B_r(x) \cap \Omega$. Per ogni $u \in L^1(\Omega)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ denotiamo con

$$u_{x,r} := \fint_{\Omega_r(x)} u(y)\, dy.$$

Capitolo 1

Definizioni e prime proprietà

1.1 Definizioni di base

1.1.1 Equazioni

Definizione 1.1.1 (Operatore differenziale)**.** Denotiamo un generico operatore differenziale di ordine l su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ come

$$A(x, D)u(x) = \sum_{|p| \leq l} a_p(x) D^p u(x),$$

assumendo che $p \in \mathbb{N}^n$ sia un multi-indice, i coefficienti a_p siano definiti in Ω e u sia una funzione definita su Ω per la quale abbia senso calcolare la derivata di ordine β. Si denota

$$A_0(x, D)u(x) = \sum_{|p|=l} a_p(x) D^p u(x)$$

la parte principale dell'operatore A. Si dice che

$$A_0(x; \xi) = \sum_{|p|=l} a_p(x) \xi^p$$

è il polinomio caratteristico associato all'operatore A, con ξ un vettore in $\mathbb{R}^n$.

A volte ometteremo i simboli x, D, denotando semplicemente con Au l'applicazione dell'operatore A ad una funzione u.

Definizione 1.1.2 (Ordine di un operatore)**.** Sia A un operatore differenziale su un aperto Ω; si dice che A ha ordine l se non ci sono coefficienti a_p con $|p| > l$ e se c'è almeno un coefficiente a_p con $|p| = l$ che non sia identicamente nullo.

Definizione 1.1.3. Un operatore differenziale A si presenta in forma di divergenza o variazionale se è del tipo

$$Au = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [A_{\alpha\beta} D^\beta u].$$

Un operatore differenziale si presenta in forma di non divergenza o non variazionale se è del tipo

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq 2m} A_\alpha D^\alpha u.$$

Osservazione 1.1.4. Le formulazioni in forma di divergenza o di non divergenza (vedi 1.1.3) sono equivalenti (almeno a livello formale) se i coefficienti sono abbastanza regolari da supportare la derivazione. Tuttavia, lo studio di tali operatori viene svolto in maniera completamente diversa nei due casi.

Le definizioni date vanno intese soltanto in senso formale (servono soprattutto per fissare una terminologia); il loro significato sarà perfettamente chiarito di volta in volta.

Definizione 1.1.5 (Operatore ellittico)**.** Sia A un operatore differenziale. Si dice che A è ellittico in x se $A_0(x;\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Possiamo mostrare un primo semplice risultato sugli operatori ellittici.

Teorema 1.1.6. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, A un operatore differenziale su Ω di ordine l ellittico in x (vedi 1.1.5). Supponiamo che i coefficienti siano tutti reali, oppure sono a valori complessi e $n \geq 3$. Allora l è pari.*

Dimostrazione. Siccome l'operatore ha ordine l, esiste un coefficiente di ordine massimo che non è identicamente nullo. Per semplicità, possiamo supporre che esista $x \in \Omega$ tale che $a_{(0,\ldots,0,l)}(x) \neq 0$ (se così non fosse, potremmo ricondurci a questo caso effettuando un cambio di coordinate). Dato $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ posto $\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, sia

$$P(x, \xi', \xi_n) \coloneqq A_0(x, \xi) = \sum_{|p|=l} a_p(x) \xi_1^{p_1} \cdots \xi_n^{p_n}.$$

Step 1): Supponiamo che i coefficienti siano reali. Prendiamo $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Detto e_n l'n-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$, notiamo che

$$A_0(x, e_n) = P(x, 0, 1) = a_{(0,\cdots,0,l)}(x) = b_0(x).$$

Poniamo

$$P(x, \xi', \xi_n) \coloneqq b_0(x)\xi_n^l + b_i(x, \xi)\xi_n^{l-1} + \cdots + b_l(x, \xi),$$

dove $b_i(x, \xi')$ è un polinomio in i di grado ξ. Se l è dispari, essendo $b_0(x) \neq 0$, vale

$$\lim_{\xi_n \to \pm\infty} P(x, \xi', \xi_n) = \pm\infty$$

oppure

$$\lim_{\xi_n \to \pm\infty} P(x, \xi', \xi_n) = \mp\infty$$

a seconda del segno di $b_0(x)$. In ogni caso, per continuità, deve esiste $\xi_n \in \mathbb{R}$ tale che $P(x, \xi', \xi_n) = 0$ e questo è assurdo.

Step 2): Supponiamo che $n \geq 3$ e che i coefficienti siano (eventualmente) in $\mathbb{C}$. Denotiamo con $N^+(x, \xi')$ e $N^-(x, \xi)$ il numero delle soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$P(x, \xi', \xi_n) = 0$$

rispettivamente con parte immaginaria positiva e negativa, contate con molteplicità. Per l'ipotesi di ellitticità (vedi 1.1.5) non ci sono soluzioni reali, quindi vale che

$$N^+(x, \xi') + N^-(x, \xi') = l.$$

Per concludere la dimostrazione è sufficiente provare che

$$N^+(x, \xi') = N^-(x, \xi').$$

Utilizziamo il teorema di Rouchè; fissato $\xi'_0 \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, sia Γ una curva contenente tutti gli zeri di $P(x,\xi'_0,\xi_n)$ nel semipiano dei numeri complessi con parte immaginaria positiva. Allora $P(x,\xi'_0,\xi_n) \neq 0$ su Γ; essendo $P(x,\xi',\xi_n)$ continuo in ξ', se ξ' è abbastanza vicino a ξ'_0, vale che

$$|P(x,\xi'_0,\xi_n) - P(x,\xi',\xi_n)| < |P(x,\xi'_0,\xi_n)| \quad \forall \xi_n \in \Gamma.$$

Applicando il teorema di Rouchè (la regione circondata da Γ è compatta), deduciamo che $P(x,\xi',\xi_n)$ e $P(x,\xi'_0,\xi_n)$ hanno lo stesso numero di zeri nella porzione di piano circondata da Γ; quindi, se ξ' è abbastanza vicino a ξ'_0, vale che

$$N^+(x,\xi') \geq N^+(x,\xi'_0).$$

Scambiando ξ' e ξ'_0, deduciamo che se ξ' e ξ'_0 sono abbastanza vicini, vale che

$$N^+(x,\xi') = N^+(x,\xi'_0);$$

in altri termini, abbiamo provato che la funzione $\xi' \to N^+(x,\xi')$ è localmente costante in $\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$; inoltre, tale mappa assume chiaramente valori interi. Se $n \geq 3$, allora $\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ è connesso, quindi la quantità $N^+(x,\xi')$ è costante al variare di $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$. In modo totalmente analogo, verifichiamo che $N^-(x,\xi')$ è costante al variare di $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$. Notiamo anche che

$$P(x,-\xi',-\xi_n) = (-1)^l P(x,\xi',\xi_n).$$

Quindi, vale che

$$N^+(x,\xi') = N^-(x,-\xi');$$

concludiamo che

$$l = N^+(x,\xi') + N^-(x,\xi') = N^+(x,\xi') + N^-(x,-\xi') = 2N^+(x,\xi').$$

□

Osservazione 1.1.7. Se non sono verificate le ipotesi del teorema 1.1.6, è possibile costruire dei controesempi.

Esempio 1.1.8. L'operatore di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial x_2}$$

è ellittico in $\mathbb{R}^2$ ed ha ordine uno. Infatti, il suo polinomio caratteristico è

$$A_0(x;\xi) = \xi_1 + i\xi_2 \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \; \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

L'operatore di Laplace

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

è ellittico in $\mathbb{R}^n$ ed ha ordine due; infatti il suo polinomio caratteristico è

$$A_0(x;\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

L'operatore bilaplaciano
$$\Delta\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Delta$$
è ellittico su $\mathbb{R}^n$ di ordine quattro. Infatti il suo polinomio caratteristico è
$$A_0(x;\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^2 = |\xi|^4 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D'ORA IN AVANTI, CI LIMITEREMO ALLO STUDIO DI OPERATORI DIFFERENZIALI DI TIPO ELLITTICO A COEFFICIENTI REALI.

Definizione 1.1.9 (Uniforme ellitticità)**.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto; un operatore differenziale A di ordine l si dice uniformemente ellittico in Ω se esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che
$$A_0(x;\xi) \geq \nu \, |\xi|^l \, .$$

Osservazione 1.1.10. Nel caso di operatori ellittici del secondo ordine, i coefficienti formano una matrice $n \times n$. Possiamo scrivere
$$A(x,D)u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{i,j} u(x),$$
se l'operatore si presenta in forma non variazionale. La condizione di ellitticità uniforme (vedi 1.1.9) equivale a richiedere che esista $\nu > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ valga
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu \, |\xi|^2 \, .$$
Se l'operatore è applicato ad una funzione regolare (C^2 o H^2), si può supporre che la matrice dei coefficienti sia simmetrica. Denotiamo con $A = (a_{i,j})$ la matrice dei coefficienti. Poniamo $A^+ := (a_{i,j}^+)$, $A^- := (a_{i,j}^-)$ rispettivamente la parte simmetrica e antisimmetrica di A, cioè
$$a_{i,j}^+(x) := \frac{a_{i,j}(x) + a_{j,i}(x)}{2}, \quad a_{i,j}^-(x) := \frac{a_{i,j}(x) - a_{j,i}(x)}{2}.$$
Si nota immediatamente che
$$\left\| \sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{i,j}^+ \right|^2 \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{i,j} \right|^2 \right\|_{L^\infty(\Omega)};$$
questa proprietà è utile perchè supporremo spesso che la matrice dei coefficienti sia limitata. Inoltre, per ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^+(x) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^-(x) \xi_i \xi_j = 0.$$

Quindi, se A è uniformemente ellittica con costante ν, la sua parte simmetrica A^+ gode della stessa proprietà; inoltre, $A^+(x)$ ha tutti gli autovalori reali positivi e uniformemente limitati dal basso. Infine, osserviamo che per ogni funzione u regolare (per la quale abbia senso calcolare due derivate e farle commutare), vale che
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^+(x) D_{ij} u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^-(x) D_{ij} u(x) = 0.$$

1.1.2 Sistemi

Definizione 1.1.11 (Sistema in forma di divergenza)**.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ e $A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (eventualmente dipendenti da x) multi-indici di lunghezza n. Introduciamo l'operatore (in forma di divergenza)

$$A(x, D)u = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha[A_{\alpha,\beta} D^\beta u].$$

L'operatore suddetto definisce un sistema di equazioni differenziali; se $N = 1$, ovviamente, definisce un'equazione.

Supponiamo assegnato un operatore differenziale A in forma di divergenza come nella definizione 1.1.11. Introduciamo le seguenti condizioni algebriche sui coefficienti, che generalizzano quelle imposte in 1.1.5 e 1.1.9 al caso dei sistemi.

Definizione 1.1.12 (Condizione di Legendre)**.** Si dice che un operatore A soddisfa la condizione di Legendre su Ω se esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ vale che

$$\nu \left|\xi\right|^2 \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta}(x)\xi \mid \xi >,$$

dove $|\cdot|$ e $< \cdot \mid \cdot >$ sono la norma euclidea e il prodotto scalare di matrici in $N \times n$.

Definizione 1.1.13 (Condizione di Legendre-Hadamard)**.** Si dice che un operatore A soddisfa la condizione di Legendre-Hadamard su Ω se esiste una costante $\nu > 0$ tale che per ogni $\eta \in \mathbb{R}^n$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\nu \left|\lambda\right|^{2m} \left|\eta\right|^2 \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta}(x)\eta, \eta > \lambda^{\alpha+\beta}.$$

Osservazione 1.1.14. Se un operatore A soddisfa la condizione di Legendre-Hadamard (vedi 1.1.13), tutti gli operatori della diagonale principale sono uniformemente ellittici (vedi 1.1.9); scegliendo η l'h-esimo vettore della base canonica di R^N, si deduce che

$$\nu \left|\lambda\right|^{2m} \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A^{h,h}_{\alpha,\beta} \lambda^{\alpha+\beta} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}^n \ \forall x \in \Omega.$$

Osservazione 1.1.15. Nel caso di operatori del secondo ordine, la condizione di Legendre (vedi 1.1.12) si esprime come

$$\nu \sum_{i=1}^{N} \left|\tau^i\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} A^{h,k}_{i,j}(x)\tau^h_i \tau^k_i \quad \forall\tau \in \mathbb{R}^{n\times N} \ \forall x \in \Omega;$$

la condizione di Legendre-Hadamard (vedi 1.1.13) si esprime come

$$\nu \left|\xi\right|^2 \left|\eta\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} A^{h,k}_{i,j}(x)\xi_i\xi_j\eta_h\eta_k \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \ \forall\eta \in \mathbb{R}^N \ \forall x \in \Omega.$$

Osservazione 1.1.16. La condizione di Legendre (vedi 1.1.12) implica quella di Legendre-Hadamard (vedi 1.1.13): basta scegliere $\tau^h_i = \xi_i\eta_h$ (cioè una matrice di rango 1); quest'ultima implica l'uniforme ellitticità degli operatori diagonali. Se $N = 1$, queste condizioni sono tutte equivalenti. Altrimenti è possibile costruire dei controesempi.

Esempio 1.1.17. Siano $n = N = 2$; consideriamo gli operatori

$$A := \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix};$$

$$A := \begin{pmatrix} \Delta & \varepsilon D_1^2 \\ \varepsilon D_2^2 & \Delta \end{pmatrix}, \quad |\varepsilon| < 2;$$

$$A := \begin{pmatrix} \Delta & \alpha(D_1^2 - D_2^2) \\ \alpha(D_1^2 - D_2^2) & \Delta \end{pmatrix}, \quad |\alpha| < 1.$$

Tali operatori soddisfano la condizione di Legendre, ma gli operatori fuori dalla diagonale non sono ellittici.

1.2 Definizioni di soluzione

Vogliamo precisare che genere di soluzioni di problemi ellittici ha senso ricercare.

Siano dati un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e un operatore differenziale

$$A(x, D)u(x) := \sum_{|\alpha| \leq 2m} A_\alpha(x) D^\alpha u.$$

Definizione 1.2.1 (Soluzione classica)**.** Se $A_\alpha \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^{N\times N})$ e $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, si dice che $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è soluzione classica del problema

$$A(x, D)u(x) = f(x)$$

se è di classe $C^{2m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e soddisfa puntualmente la relazione differenziale. In tal caso, si dice che il problema è formulato in senso classico.

Definizione 1.2.2 (Soluzione forte)**.** Se $A_\alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N\times N})$ e $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ per un certo $p \in [1, +\infty]$, si dice che $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è soluzione forte del problema

$$A(x, D)u(x) = f(x)$$

se $u \in W^{2m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e soddisfa la relazione differenziale per quasi ogni $x \in \Omega$, intendendo le derivate in senso debole.

In ogni contesto ragionevole, una soluzione classica è anche una soluzione in senso forte. In ogni caso, introdurre definizioni di soluzione ancora più deboli, che si applicano bene allo studio dei problemi variazionali.

Definizione 1.2.3 (Soluzione debole)**.** Sia $p \in (1, +\infty)$; siano $f_\beta \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $A_\alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N\times N})$. Si dice che $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è soluzione debole del problema

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [A_{\alpha,\beta} D^\beta u] = \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^\beta f_\beta$$

se $u \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e per ogni funzione test $\varphi \in W_0^{m,p'}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale che

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha \varphi > \; dx = \int_\Omega \sum_{|\beta| \leq m} < f_\beta, D^\beta \varphi > \; dx.$$

Questa scrittura è detta formulazione variazionale del problema differenziale.

Osservazione 1.2.4. Nella definizione di soluzione debole (vedi 1.2.3), si richiede che u abbiamo soltanto m derivate (in senso debole); in tal caso, però, si riesce a dire in che senso u è soluzione di un problema di ordine $2m$. La formulazione debole si ottiene a partire da quella forte moltiplicando per una qualsiasi funzione $\varphi \in W_0^{m,p'}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (basta restringere la classe delle funzioni test a $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$) e integrando per parti m volte. I termini $(-1)^{|\alpha|}$ e $(-1)^{|\beta|}$ si inseriscono affinché si cancellino nei passaggi di integrazione per parti che portano dalla formulazione classica a quella variazionale del problema.

Definizione 1.2.5 (Soluzione distribuzionale)**.** Siano $A_\alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N\times N})$ e $F \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^N)$ una distribuzione. Si dice che $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è soluzione distribuzionale del problema

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [A_{\alpha,\beta} D^\beta u] = F$$

se $u \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e per ogni funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale che

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha \varphi > \ dx =< F, \varphi > .$$

Questa scrittura è nota come formulazione distribuzionale del problema.

Osservazione 1.2.6. La nozione di soluzione distribuzionale è nello stesso spirito di quella di soluzione debole. Tuttavia, è ancora più debole della precedente; in effetti, generalizza l'idea alla base del concetto di soluzione debole ad un ambito in cui il termine forzante f non è una funzione, ma soltanto una distribuzione.

1.3 Condizioni al contorno

Generalmente si studiano problemi differenziali con condizioni al contorno di qualche genere. Siano dati un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, un operatore differenziale $A(x, D)$ definito su una certa classe di funzioni in Ω e un operatore di frontiera B definito su una classe di funzioni su $\partial\Omega$. Vogliamo studiare il problema differenziale

$$\begin{cases} A(x, D)u = f & \text{in } \Omega \\ B(u) = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases} . \tag{1.1}$$

Si dice che un problema differenziale (1.1) è ben posto secondo Hadamard se per ogni ogni coppia di dati f, g esiste un'unica soluzione che dipende in qualche modo continuo dai dati f, g.

Esempio 1.3.1. Il problema differenziale

$$\begin{cases} u'' - 3u' + 2u = 0 \\ u(0) = a, \\ u'(0) = b, \end{cases}$$

ha soluzione unica che dipende con continuità (rispetto alla convergenza uniforme) dai dati iniziali, cioè dai parametri $a, b \in \mathbb{R}$; quindi, tale problema è ben posto. Se rimuoviamo una condizione al contorno, troviamo un problema sottodeterminato che ammette infinite soluzioni; tale problema non è ben posto. Se aggiungiamo una condizione sulla derivata seconda in 0 (per esempio), otteniamo un problema sovradeterminato, che ammette soluzione soltanto per una precisa scelta dei parametri; tale problema non è ben posto. Queste semplici osservazioni dicono che, in un certo senso, per studiare l'equazione

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

è "naturale" imporre il valore al tempo iniziale della funzione e della sua derivata prima.

Esempio 1.3.2 (Hadamard). Consideriamo l'equazione di Laplace con condizioni al contorno

$$\begin{cases} \Delta u = \mathcal{D}_{tt} u + D_{xx} u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = \psi(x) & x \in \mathbb{R}, \\ D_t u(0,x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.2}$$

dove $\psi, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni assegnate. Abbiamo imposto il valore della funzione e la sua derivata normale al tempo 0; notiamo che queste condizioni sono la naturale generalizzazione di quelle che si impongono nei problemi di Cauchy. In questo caso, però, non c'è dipendenza continua dai dati iniziali in nessun contesto ragionevole. Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione

$$u_n(t,x) \coloneqq e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \sin(nx)$$

risolve l'equazione di Laplace con condizioni iniziali

$$\varphi_n(x) = D_t u_n(0,x) = n e^{-\sqrt{n}} \sin(nx), \quad \varphi_n(x) = u_n(0,x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx).$$

Ovviamente, le successioni $(\varphi_n)_n$ e $(\psi_n)_n$ tendono uniformemente a 0 su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia, per ogni $t_0 > 0$, vale che

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{\mathbb{R}} |u_n(t_0, x)| = \lim_{n \to +\infty} e^{nt_0 - \sqrt{n}} = +\infty.$$

Quindi, il problema (1.2) non è ben posto nel senso di Hadamard. Questo dice che, in qualche senso, le condizioni al bordo imposte non sono quelle "naturali" per lo studio dell'equazione di Laplace.

Esaminiamo brevemente il tipo di condizioni al contorno che si pongono generalmente nello studio dei problemi ellittici, cioè quale genere di operatori di frontiera è usuale considerare per avere problemi ellittici ben posti. Generalmente si impongono condizioni di Dirichlet. Se cerchiamo soluzioni deboli (o distribuzionali) di un operatore di ordine $2m$, si richiede che la soluzione sia in qualche spazio di Sobolev di ordine m; possiamo eventualmente imporre il valore di u e delle derivate di ordine al più $m-1$ al bordo. Questa informazione può essere codificata in questo contesto in termini di traccia di funzioni di Sobolev. Se imponiamo condizioni omogenee, per esempio, possiamo cercare soluzioni deboli (o distribuzionali) in $H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Se imponiamo condizioni non omogenee, invece, è necessario che l'aperto Ω sia regolare, per dare senso alla traccia delle funzioni di Sobolev. Se, invece, cerchiamo soluzioni classiche, possiamo dare un senso puntuale a questo genere di condizioni imponendo, per esempio, che la soluzione u sia di classe $C^{2m}(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^{m-1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e u e tutte le derivate di ordine $m-1$ coincidano con certe funzioni continue sul bordo. In ogni caso, è fondamentale notare che in un problema di ordine $2m$ imponiamo condizioni fino alle derivate di ordine al più $m-1$. In ogni caso, esiste una teoria (che non illustreremo) che si occupa di studiare le condizioni sugli operatori di frontiera che ha senso imporre a seconda della forma del problema che si considera.

Concludiamo questa introduzione con un esempio motivazionale di estrema importanza.

Esempio 1.3.3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $f \in L^2(\Omega)$; consideriamo il funzionale di Dirichlet

$$D_f(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu\right] dx$$

in $H_0^1(\Omega)$. Tramite una semplice applicazione del metodo diretto, è facile mostrare che D_f ammette un unico punto di minimo in $H_0^1(\Omega)$, diciamo u. Allora, è semplice notare che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ la derivata direzionale di D_f in u nella direzione v si annulla, cioè

$$0 = \frac{d}{dt}[D_f(u+tv)]\bigg|_{t=0};$$

allora troviamo che u soddisfa la seguente relazione

$$\int_\Omega [< \nabla u, \nabla v > + fv]\ dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

nota come equazione di Eulero-Lagrange del funzionale di Dirichlet D_f. Abbiamo ottenuto che u è soluzione debole del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.3}$$

Viceversa, per la convessità del funzionale D_f, vale che se $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione $\Delta u = f$, allora u è punto di minimo di D_f in $H_0^1(\Omega)$. Si può dire che u è più regolare di quanto prescritto, cioè appartiene a qualche spazio funzionale contenuto in $H_0^1(\Omega)$? Si può dire che la relazione $\Delta u = f$ vale in senso puntuale? Proveremo a rispondere a queste domande.

Abbiamo ottenuto che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica soluzione del problema (1.3) che è caratterizzata dal fatto di essere l'unico punto di minimo del funzionale D_f in $H_0^1(\Omega)$. Dal punto di vista dell'Analisi Funzionale, abbiamo definito un operatore da $L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, di cui è interessante studiarne le proprietà. Tale operatore, visto a valori in $L^2(\Omega)$ è simmetrico e compatto; allora, per il teorema spettrale ammette una base ortonormale di autovettori. Se $\Omega = (0, \pi)$, si ottiene proprio la base di Fourier in seni. Tuttavia, questo discorso vale per ogni aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e il teorema spettrale produce un analogo della base di Fourier. Dal punto di vista della Fisica, abbiamo legato le soluzioni un problema ellittico ai punti di minimo di un funzionale che rappresenta l'energia di un sistema fisico. Per questa ragione, studiare la regolarità del profilo ottimale può essere estremamente interessante.

Capitolo 2

Esistenza delle soluzioni

Vogliamo studiare il problema dell'esistenza di soluzioni di problemi differenziali ellittici. Svilupperemo alcuni metodi abbastanza generali, che applicheremo nel nostro contesto. Nel caso di equazioni non variazionali presenteremo la teoria degli operatori vicini in tutta generalità e mostreremo come può essere usata per provare l'esistenza di soluzioni di problemi non variazionali (eviteremo alcune dimostrazioni).

In secondo luogo, esamineremo il caso delle equazioni variazionali: presenteremo la teoria astratta e poi la applicheremo nel nostro contesto, procedendo in maniera del tutto rigorosa. Gli strumenti sviluppati ci consentiranno di esaminare anche il caso dei sistemi.

2.1 Teoria degli operatori vicini

In questo paragrafo, assumiamo che $\mathbb{X}$ sia un insieme e $\mathbb{Y}$ sia uno spazio di Banach.

Definizione 2.1.1 (Operatori vicini)**.** Siano $A, B : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ due operatori. Si dice che A è vicino a B se esistono due costanti $\alpha > 0$ e $K \in (0,1)$ tali che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ vale che

$$\|[B(x_2) - B(x_1)] - \alpha[A(x_2) - A(x_1)]\| \leq K \|B(x_2) - B(x_1)\|.$$

Possiamo immediatamente dimostrare i risultati principali sugli operatori vicini.

Teorema 2.1.2. *Siano $A, B : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ operatori tali che A è vicino a B (vedi 2.1.1).*

- *Se B è iniettivo, anche A è iniettivo.*
- *Se B è surgettivo, anche A è surgettivo.*

In particolare, se B è una bigezione, anche A è una bigezione.

Dimostrazione. Siano $\alpha > 0$ e $K \in (0,1)$ tali che ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ vale che

$$\|[B(x_2) - B(x_1)] - \alpha[A(x_2) - A(x_1)]\| \leq K \|B(x_2) - B(x_1)\|.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare e riordinando i termini, troviamo che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ vale che

$$\|B(x_1) - B(x_2)\| \leq \frac{\alpha}{1-K} \|A(x_1) - A(x_2)\|, \tag{2.1}$$

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| \leq \frac{k+1}{\alpha} \|B(x_1) - B(x_2)\|. \tag{2.2}$$

Dalla stima (2.1) segue che se B è iniettivo, anche A è iniettivo.

Supponiamo che B sia surgettivo e mostriamo che anche A è surgettivo. Definiamo in $\mathbb{X}$ la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $u \sim v$ se e solo se $B(u) = B(v)$. Sia $\tilde{\mathbb{X}} := \mathbb{X}/_\sim$ l'insieme quoziente; l'operatore B si fattorizza ad un operatore $\tilde{B} : \tilde{\mathbb{X}} \to \mathbb{Y}$ tale che $\tilde{B}([u]) := B(u)$, dove u è un qualsiasi rappresentante in $[u]$. La stima (2.2) implica che anche A si fattorizza ad un operatore $\tilde{A} : \tilde{\mathbb{X}} \to \mathbb{Y}$ tale che $\tilde{A}([u]) := A(u)$, dove u è un qualsiasi rappresentante in $[u]$ (notiamo che se $B(u) = B(v)$, allora $A(u) = A(v)$, quindi $\tilde{A}$ è ben definito). Abbiamo che $\tilde{A}$ è vicino a $\tilde{B}$ (vedi 2.1.1); inoltre $\tilde{B}$ è una bigezione. Se mostriamo che l'operatore $\tilde{A}$ è surgettivo, allora deduciamo che anche A è surgettivo.

Innanzitutto mostriamo che l'insieme $\tilde{\mathbb{X}}$ con la distanza

$$d([u],[v]) := \left\| \tilde{B}([u]) - \tilde{[B]}([v]) \right\|$$

è uno spazio di Banach. La funzione d è una distanza perchè $\tilde{B}$ è iniettivo; verifichiamo che $(\tilde{X}, d)$ è uno spazio metrico completo. Sia $([u_n])_n$ una successione di Cauchy in $(\tilde{\mathbb{X}}, d)$; per costruzione, $(\tilde{B}([u_n]))_n$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{Y}$; essendo $\mathbb{Y}$ uno spazio di Banach, esiste $v \in \mathbb{Y}$ tale che $\tilde{B}([u_n]) \to v$ in $\mathbb{Y}$. Essendo $\tilde{B}$ surgettivo, esiste $[u] \in \tilde{\mathbb{X}}$ tale che $\tilde{B}([u]) = v$. Per costruzione, vale che $[u_n] \to [u]$ in $(\tilde{\mathbb{X}}, d)$.

Per provare che $\tilde{A}$ è surgettivo, dobbiamo mostrare che per ogni $f \in \mathbb{Y}$ l'equazione $\tilde{A}([u]) = f$ ha soluzione. Fissato $f \in \mathbb{Y}$, poniamo

$$F([u]) := \tilde{B}([u]) - \alpha \tilde{A}([u]) + \alpha f;$$

notiamo che $\tilde{A}([u]) = f$ se e solo se $F([u]) = \tilde{B}([u])$. Sappiamo che per ogni $[u] \in \tilde{\mathbb{X}}$ esiste unico $[U] = T([u]) \in \tilde{\mathbb{X}}$ tale che $F([u]) = \tilde{B}([U])$; in altri termini, è ben definita un'applicazione $T := \tilde{B}^{-1} \circ F : \tilde{\mathbb{X}} \to \tilde{\mathbb{X}}$. Verifichiamo che T è una contrazione dello spazio di Banach $(\tilde{\mathbb{X}}, d)$. Siano $[u], [v] \in \tilde{\mathbb{X}}$; valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
d(T([u]), T([v])) &= \left\| \tilde{B}(T([u])) - \tilde{B}(T([v])) \right\| \\
&= \|F([u]) - F([v])\| \\
&= \left\| [\tilde{B}([u]) - \tilde{B}([v])] - \alpha[\tilde{A}([u]) - \tilde{A}([v])] \right\| \\
&\leq K \left\| \tilde{B}([u]) - \tilde{B}([v]) \right\| \\
&= d([u],[v]).
\end{aligned}$$

Ricordando che $K \in (0,1)$, otteniamo che T ha un unico punto fisso $[u] \in \tilde{\mathbb{X}}$; in altri termini, esiste ed è unico un punto $[u] \in \tilde{\mathbb{X}}$ tale che $T([u]) = [u]$, che è equivalente a dire che $F([u]) = \tilde{B}([u])$, cioè $\tilde{A}([u]) = f$. □

Presentiamo una semplice conseguenza del teorema 2.1.2.

Teorema 2.1.3 (Metodo di continuità). *Sia $(A_t)_{t \in [0,1]}$ una famiglia di operatori da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$. Supponiamo che*

- *esiste $r \in [0,1]$ tale che A_r è una bigezione,*

- *esiste $c > 0$ tale che per ogni $s, t \in [0,1]$ per ogni $u, v \in \mathbb{X}$ vale che*

$$\|[A_t(u) - A_t(v)] - [A_s(u) - A_s(v)]\| \leq c\,|t-s|\,\|A_t(u) - A_t(v)\|\,. \tag{2.3}$$

Allora A_s è una bigezione per ogni $s \in [0,1]$.

Dimostrazione. Definiamo l'insieme

$$I \coloneqq \{t \in [0,1] \mid A_t \text{ è una bigezione}\};$$

per ipotesi, I non è vuoto. Per mostrare che coincide con $[0,1]$, è sufficiente mostrare che è aperto e chiuso. Sia $t \in [0,1]$; esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap [0,1]$ vale che $c\,|t-s| < 1$. La condizione (2.3) dice che A_s è vicino ad A_t (vedi 2.1.1) per ogni $s \in [0,1] \cap (t-\delta, t+\delta)$; applicando il teorema 2.1.2, deduciamo che A_s è una bigezione per ogni $s \in [0,1] \cap (t-\delta, t+\delta)$. Questo è sufficiente a concludere che I è aperto in $[0,1]$.

Per mostrare che I è chiuso in $[0,1]$, notiamo che se $(t_n)_n$ è una successione in I che converge a t, allora definitivamente vale che $c\,|t_n - t| < 1$; allora l'operatore A_t è vicino ad A_{t_n} definitivamente. Applicando il teorema 2.1.2, deduciamo che A_t è una bigezione, quindi $t \in I$. □

Osservazione 2.1.4. La condizione (2.3) è una sorta di lipschitzianità della famiglia di operatori $(A_t)_t$.

2.1.1 Un esempio di applicazione delle teoria

Presentiamo un primo esempio di applicazione della teoria degli operatori vicini nel contesto del calcolo differenziale tra spazi di Banach. Richiamiamo velocemente alcune nozioni fondamentali.

Siano $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ spazi di Banach.

Definizione 2.1.5 (Derivata di Gateaux)**.** Siano $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{X}$ un aperto, $u_0 \in \mathcal{U}$ e $F : \mathcal{U} \to \mathbb{Y}$. Si dice che F è derivabile secondo Gateaux in u_0 se per ogni $v \in \mathbb{X}$ esiste ed è finita la derivata direzionale

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u_0) \coloneqq \frac{d}{dt} F(u_0 + tv)\bigg|_{t=0}.$$

L'operatore $v \to \frac{\partial F}{\partial v}(u_0)$ è detto derivata di Gateaux di F in u_0.

Definizione 2.1.6 (Differenziale di Fréchet)**.** Siano $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{X}$ un aperto, $u_0 \in \mathcal{U}$ e $F : \mathcal{U} \to \mathbb{Y}$. Si dice che F è differenziabile secondo Fréchet in u_0 se è derivabile secondo Gateaux in u_0 ed esiste un'applicazione lineare e continua $dF_{u_0} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tale che per ogni $v \in \mathbb{X}$ vale

$$dF_{u_0}(v) = \frac{\partial F}{\partial v}(u_0).$$

dF_{u_0} è detto differenziale di Fréchet di F in u_0.

Osservazione 2.1.7. Nel contesto della definizione 2.1.6, valgono le seguenti proprietà, che non dimostriamo:

- se esiste, il differenziale di Fréchet è univocamente determinato;

- se F è una mappa tra aperti di $\mathbb{R}^n$, il differenziale di Frechet coincide con l'usuale differenziale;
- se F è differenziabile secondo Fréchet in u_0, allora F è continua in u_0.

Definizione 2.1.8. Siano $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{X}$ un aperto e $F : \mathcal{U} \to \mathbb{Y}$. Si dice che F è di classe $C^1(\mathcal{U})$ se per ogni $u_0 \in \mathcal{U}$ si ha che F è differenziabile secondo Fréchet in u_0 e la mappa $dF : \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ è continua (rispetto alla norma operatoriale in $\mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$).

I seguenti teoremi valgono come nell'analogo contesto finito-dimensionale.

Teorema 2.1.9 (Differenziale della funzione composta)**.** *Siano $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ spazi di Banach, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{X}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{Y}$ aperti tali che $u_0 \in \mathcal{U}$; siano $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $G : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ differenziabili secondo Fréchet in u_0 e in $F(u_0)$ rispettivamente. Allora $G \circ F$ è differenziabile secondo Fréchet in u_0 e vale la chain rule*

$$d(G \circ F)_{u_0} = dG_{F(u_0)} \circ dF_{u_0}.$$

Teorema 2.1.10 (Media)**.** *Siano $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{X}$ un aperto convesso, $u, v \in \mathcal{U}$, γ il segmento che unisce u e v e $F : \mathcal{U} \to \mathbb{Y}$ un operatore di classe $C^1(\mathcal{U})$. Supponiamo che γ sia contenuto in $\mathcal{U}$. Vale che*

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathbb{Y}} \leq \left(\sup_{w \in \gamma} \|dF_w\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} \right) \|u - v\|_{\mathbb{X}} .$$

Definizione 2.1.11 (Integrale alla Riemann)**.** Sia $G : [a, b] \to \mathbb{X}$; si dice che G è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se esiste $x \in \mathbb{X}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni partizione

$$a = t_0 < t_1 \cdots < t_n = b$$

di ampiezza al più δ per ogni scelta di $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ vale che

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} G(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - x \right\| \leq \varepsilon.$$

In tal caso, si pone

$$x := \int_a^b G(t)\ dt.$$

Osservazione 2.1.12. Nel contesto della definizione 2.1.11, l'integrale di G su $[a, b]$ se esiste è univocamente definito.

Osservazione 2.1.13. L'integrale definito in 2.1.11 gode delle usuali proprietà di linearità. Inoltre, tutte le funzioni continue da $G : [a, b] \to \mathbb{X}$ sono integrabili e vale la stima

$$\left\| \int_a^b G(t)\ dt \right\|_{\mathbb{X}} \leq \int_a^b \|G(t)\|_{\mathbb{X}}\ dt.$$

Teorema 2.1.14 (Fondamentale del calcolo integrale)**.** *Siano $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{X}$ un aperto convesso e $G : \mathcal{U} \to \mathbb{Y}$ di classe $C^1(\mathcal{U})$. Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, vale la formula*

$$G(x_2) - G(x_1) = \int_0^1 dG_{x_1 + t(x_2 - x_1)}(x_2 - x_1)\ dt;$$

possiamo anche scrivere

$$G(x_2) - G(x_1) = \left[\int_0^1 dG_{x_1 + t(x_2 - x_1)}\ dt \right] (x_2 - x_1);$$

Precisiamo che tutti questi risultati si ottengono a partire da quelli in dimensioni 1, utilizzando la caratterizzazione duale della norma negli spazi di Banach.

Possiamo finalmente mostrare un esempio di applicazione della teoria degli operatori vicini.

Teorema 2.1.15. *Siano $x_0 \in \mathbb{X}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{X}$ un aperto contenente x_0 e $F : \mathcal{U} \to \mathbb{Y}$ un operatore tale che*

- $F \in C^1(\mathcal{U})$,
- dF_{x_0} *è invertibile come applicazione lineare da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$.*

Allora esiste un intorno convesso W di x_0 con le seguenti proprietà:

- *per ogni $x \in W$ la mappa dF_x è invertibile;*
- *F è localmente vicina a dF_{x_0}, cioè esiste $k \in (0,1)$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in W$ vale che*

$$\|dF_{x_0}(x_1 - x_2) - [F(x_1) - F(x_2)]\|_{\mathbb{Y}} \leq k \, \|dF_{x_0}(x_1 - x_2)\|_{\mathbb{X}} .$$

Dimostrazione. Per il teorema dell'applicazione aperta, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $v \in \mathbb{X}$ vale che

$$\delta \, \|v\|_{\mathbb{X}} \leq \|dF_{x_0}(v)\|_{\mathbb{Y}} .$$

Essendo $F \in C^1(\mathcal{U})$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno W_ε di x_0 (che possiamo assumere convesso) tale che per ogni $x \in W_\varepsilon$ per ogni $v \in \mathbb{X}$ vale che

$$\|dF_{x_0} v - dF_x v\|_{\mathbb{Z}} \leq \|dF_{x_0} - dF_x\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} \|v\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon \, \|v\|_{\mathbb{X}} .$$

Scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\frac{\varepsilon}{\delta} < 1$; è immediato notare che abbiamo provato che per ogni $x \in W_\varepsilon$ si ha che dF_x è vicino a dF_{x_0}; essendo dF_{x_0} invertibile, anche dF_x è invertibile per il teorema 2.1.2. Per il secondo enunciato, dati $x_1, x_2 \in W_\varepsilon$, vale che

$$\begin{aligned}
&\|dF_{x_0}(x_1 - x_2) - [F(x_1) - F(x_2)]\|_{\mathbb{Y}} \\
&\quad = \left\| dF_{x_0}(x_1 - x_2) - \int_0^1 dF_{x_1 + t(x_2 - x_1)}(x_1 - x_2) \, dt \right\|_{\mathbb{Y}} \\
&\quad = \left\| \int_0^1 \left[dF_{x_0} - dF_{x_1 + t(x_2 - x_1)} \right] (x_1 - x_2) \, dt \right\|_{\mathbb{Y}} \\
&\quad \leq \int_0^1 \left\| \left[dF_{x_0} - dF_{x_1 + t(x_2 - x_1)} \right] (x_1 - x_2) \right\|_{\mathbb{Y}} \, dt \\
&\quad \leq \int_0^1 \left\| dF_{x_0} - dF_{x_1 + t(x_2 - x_1)} \right\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{X}} \, dt \\
&\quad \leq \varepsilon \, \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{X}} \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \, \|dF_{x_0}(x_1 - x_2)\|_{\mathbb{Y}} .
\end{aligned}$$

La tesi segue dal fatto che abbiamo scelto ε in modo che $\frac{\delta}{\varepsilon} < 1$. □

2.2 Esistenza di soluzioni per problemi non variazionali

La teoria degli operatori vicini si può applicare per mostrare risultati di esistenza e unicità della soluzione di problemi non variazionali del tipo

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_{ij} u = f. \end{cases} \tag{2.4}$$

Sarebbe naturale studiare l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del problema (2.4) imponendo che l'aperto Ω sia limitato e regolare (per esempio con bordo di classe C^1) e che la matrice $A = (a_{i,j})$ sia uniformemente ellittica e con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$. Tuttavia, in questo caso, il problema (2.4) non è generalmente ben posto (vedi 2.2.8), nel senso che la soluzione può non essere unica. Per questa ragione, bisogna introdurre condizioni più forti sui coefficienti. Presentiamo due possibili approcci: il primo è basato sull'imposizione di condizioni di tipo algebrico e consente di provare soluzioni in forti $H^2 \cap H_0^1$ (vedi 1.2.2); nel secondo approccio, invece, prescriviamo maggiore regolarità sui coefficienti e troviamo soluzioni classiche in C^2 continue fino al bordo (vedi 1.2.1). In entrambi i casi, però, supponiamo che il risultato valga per l'operatore laplaciano (che è il prototipo di operatore ellittico) e con la teoria degli operatori vicini riusciamo a trattare gli altri operatori ellittici.

2.2.1 Condizioni algebriche

Definizione 2.2.1 (Condizione di Cordes)**.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $A(x) = (a_{i,j}(x))$ una matrice tale che $|A(x)| \neq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Si dice che A soddisfa la condizione di Cordes in Ω se esiste $\varepsilon \in (0,1)$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(x) \right)^2 (\geq n - 1 - \varepsilon) \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)^2 \right).$$

Definizione 2.2.2 (Condizione di Campanato)**.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $A(x) = (a_{i,j}(x))$ una matrice. Si dice che A soddisfa la condizione di Campanato in Ω se esistono $\sigma > 0, \gamma > 0, \delta \geq 0$ tali che $\gamma + \delta < 1$ ed esiste una funzione $a \in L^\infty(\Omega)$ tali che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$a(x) \geq \sigma > 0,$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,i} - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \xi_{i,j} \right| \leq \gamma \left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \delta \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,i} \right| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Osservazione 2.2.3. Si può verificare che le condizioni di Cordes e di Campanato (vedi 2.2.1 e 2.2.2) sono equivalenti.

Osservazione 2.2.4. La condizione di Campanato implica l'ellitticità uniforme. Supponiamo che A soddisfi la condizione di Campanato (vedi 2.2.2) e sia $\xi = (\eta_i \eta_j)_{i,j}$ una matrice $n \times n$ di rango 1. Vale che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\eta_i\eta_j &\leq \left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\eta_i\eta_j \right| \\ &\leq \gamma \left(\sum_{i,j=1}^{n} \eta_i^2\eta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \delta \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \\ &= (\gamma+\delta) \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2.\end{aligned}$$

Riordinando i termini, otteniamo che

$$[1-(\gamma+\sigma)] \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \leq a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\eta_i\eta_j \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\eta_i\eta_j;$$

allora A è uniformemente ellittica con coefficiente

$$\nu := \frac{1-(\gamma+\delta)}{\|a\|_{L^\infty(\Omega)}};$$

infatti, ricordiamo che $\gamma + \delta < 1$, quindi $\nu > 0$.

A un primo esame, la condizione di Campanato sembra molto tecnica; in realtà, è l'ipotesi necessaria per provare che l'operatore differenziale associato alla matrice che la soddisfa è vicino a un operatore che è una bigezione.

Prima di mostrare il risultato di esistenza e unicità delle soluzioni del problema (2.4), enunciamo un risultato di cui faremo uso e che dimostreremo nel seguito (vedi 3.4.1).

Teorema 2.2.5. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e con bordo di classe C^2. Consideriamo $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'operatore che associa ad u il suo laplaciano. Tale mappa è una bigezione tra $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ed $L^2(\Omega)$.*

Abbiamo anche bisogno di un altro risultato (che enunciamo senza riportarne la dimostrazione) noto come maggiorazione di Miranda-Talenti che, in un certo senso, raffina la stima del teorema 2.2.5.

Teorema 2.2.6 (Disuguaglianza di Miranda-Talenti)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e limitato. Per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ vale che*

$$|u|_{2,2,\Omega}^2 \leq \|\Delta u\|_{0,2,\Omega}^2 .$$

Siamo pronti per mostrare un risultato di esistenza e unicità delle soluzioni del problema (2.4).

Teorema 2.2.7. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, convesso e con bordo di classe C^2. Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice che soddisfa la condizione di Campanato in Ω (o equivalentemente quella di Cordes) e con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$. Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ il problema (2.4) ammette soluzione unica.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^2(\Omega)$ fissata. Siano $\sigma > 0, \gamma > 0, \delta \geq 0$ e $a \in L^\infty(\Omega)$ come nella definizione 2.2.2. Consideriamo gli operatori

$$\tilde{A}(u) := a \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_{i,j} u : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

$$B(u) := \Delta u : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

supponiamo di aver verificato che $\tilde{A}$ è vicino a B (vedi 2.1.1); dal fatto che B una bigezione (per il teorema 2.2.5) deduciamo che anche $\tilde{A}$ è una bigezione (per il teorema 2.1.2). Allora otteniamo che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste ed è unica $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tale che

$$a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{i,j} u(x) = f(x)$$

per quasi ogni $x \in \Omega$. Essendo $a \in L^\infty(\Omega)$ e $a(x) \geq \sigma > 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$, deduciamo che $f/a \in L^2(\Omega)$ e vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{i,j} u(x) = \frac{f(x)}{a(x)}$$

per quasi ogni $x \in \Omega$. Osservando che al variare di f le funzioni f/a descrivono tutti gli elementi di $L^2(\Omega)$, otteniamo che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste ed è unica $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{i,j} u(x) = f(x).$$

Quindi, dobbiamo soltanto provare che l'operatore $\tilde{A}$ è vicino all'operatore B. Siano $u_1, u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Osserviamo che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale la stima

$$(\gamma a + \delta b)^2 \leq \gamma(\gamma + \delta) a^2 + \delta(\gamma + \delta) b^2.$$

Da questa stima e dal fatto che A rispetta la condizione di Campanato in Ω, deduciamo che vale

$$\begin{aligned}
&\left\| B(u_1 - u_2) - \tilde{A}(u_1 - u_2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{n} D_{ii}(u_1 - u_2) - a \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_{ij}(u_1 - u_2) \right|^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \left\{ \gamma \left[\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}(w_1 - w_2))^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \delta \left| \Delta(w_1 - w_2) \right| \right\}^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\gamma(\gamma + \delta) \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}(u_1 - u_2))^2 + \delta(\gamma + \delta) \left| \Delta(u_1 - u_2) \right|^2 \right\} dx \\
&\leq (\gamma + \delta)^2 \left\| \Delta(u_1 - u_2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq (\gamma + \delta)^2 \left\| B(u_1 - u_2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Precisiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Miranda-Talenti (vedi 2.2.6). Siccome $\gamma + \delta \in (0, 1)$, deduciamo che $\tilde{A}$ è vicino a B. □

L'esempio seguente, dovuto a Talenti, mostra che il problema (2.4) non ben posto sotto le ipotesi di ellitticità uniforme e limitatezza della matrice dei coefficienti in dimensione $n \geq 3$.

Esempio 2.2.8 (Talenti). Sia $\Omega = B_1$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$; cerchiamo una funzione $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ non identicamente nulla ed una matrice A uniformemente ellittica in Ω con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) = 0$$

per quasi ogni $x \in \Omega$. Se riusciamo a costruire u e A con queste proprietà, deduciamo che il problema (2.4) non ben posto, perchè anche la funzione identicamente nulla è soluzione. Proviamo a cercare u tra le funzioni radiali; in particolare, preso $\lambda \in (0,1)$, proviamo a scegliere

$$u(x) := |x|^\lambda - 1.$$

Un semplice calcolo mostra che le derivate classiche di u in $\Omega \setminus \{0\}$ sono

$$D_i u(x) = \lambda |x|^{\lambda-2} x_i,$$
$$D_{i,j} u(x) = \lambda |x|^{\lambda-4} \left[(\lambda - 2) x_i x_j + \delta_{i,j} |x|^2 \right].$$

Osserviamo che $D_i u \in L^2(\Omega)$ se $2 < \frac{n}{1-\lambda}$ e che $D_{i,j} u \in L^2(\Omega)$ se $2 < \frac{n}{2-\lambda}$. Se scegliamo $\lambda \in (0,1)$ in modo che $2 < \frac{n}{2-\lambda}$, otteniamo che $D_i u, D_{i,j} u \in L^2(\Omega)$. Osserviamo che se $n = 2$ il sistema

$$\begin{cases} \lambda \in (0,1) \\ 2 < \frac{n}{2-\lambda} \end{cases} \tag{2.5}$$

non ha soluzione; invece, se $n \geq 3$ esiste una soluzione del sistema (2.5). Utilizzando il teorema di convergenza dominata e la definizione di spazio di Sobolev, è facile vedere che $u \in H^2(\Omega)$ e che le derivate classiche sono anche in senso debole in Ω. Inoltre, è ovvio che $u \in H_0^1(\Omega)$ (infatti è nulla sul bordo). Allora prendiamo $n \geq 3$ e λ soluzione del sistema (2.5). Poniamo

$$a_{i,j}(x) := \delta_{i,j} + b \frac{x_i x_j}{|x|^2}, \quad b := -1 + \frac{n-1}{1-\lambda}.$$

Verifichiamo che la matrice $A = (a_{i,j})$ è uniformemente ellittica e limitata in Ω: la limitatezza dei coefficienti $a_{i,j}$ in Ω è ovvia; per quanto riguarda l'ellitticità uniforme, presi $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{i,j} + b \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \xi_i \xi_j &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b \frac{x_i x_j \xi_i \xi_j}{|x|^2} \\ &= |\xi|^2 \left(1 + b \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j \xi_i \xi_j}{|x|^2 |\xi|^2} \right) \\ &\geq |\xi|^2, \end{aligned}$$

perchè $b \geq 0$ e inoltre

$$0 \leq \sum_{i,j} x_i x_j \xi_i \xi_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \right)^2 \leq |x|^2 |\xi|^2.$$

Una verifica diretta mostra che u risolve l'equazione (2.4).

Osservazione 2.2.9. Il teorema 2.2.7 consente di provare che il problema (2.4) ammette una soluzione unica in dimensione 2 assumendo che l'aperto Ω sia limitato, di classe C^2 e convesso e, soprattutto, che la matrice $A = (a_{i,j})$ sia uniformemente ellittica con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$. Infatti, in dimensione 2, la condizione di Campanato (vedi 2.2.2) è equivalente all'uniforme ellitticità (vedi 1.1.9). Abbiamo già mostrato che la condizione di Campanato implica l'ellitticità uniforme (vedi 2.2.4). Mostriamo che in dimensione 2 vale l'implicazione opposta, almeno nel caso delle matrici simmetriche e limitate. Sia $A(x)$ una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ e simmetrica. Siano $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ gli autovalori di $A(x)$; per il teorema spettrale sono reali e, dall'ipotesi di ellitticità uniforme, è facile dedurre che $\lambda_1(x) \geq \nu, \lambda_2(x) \geq \nu$ (infatti $A(x)$ è si diagonalizza tramite il teorema spettrale). Poniamo

$$\Gamma(x) := \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}$$

Fissiamo una funzione $a \in L^\infty(\Omega)$ e $\sigma > 0$ (che sceglieremo in seguito) tali che $a(x) \geq \sigma > 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$; per costruzione le matrici $I - a(x)\Gamma(x)$ e $I - a(x)A(x)$ sono congruenti. Allora vale che

$$|I - a(x)A(x)|_{\mathbb{R}^4} = |I - a(x)\Gamma(x)|_{\mathbb{R}^2} = \left(\sum_{i=1}^{2} (1 - a(x)\lambda_i(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dobbiamo mostrare che esistono $a \in L^\infty(\Omega)$ e $\sigma > 0$ tali che per quasi ogni $x \in \Omega$ valga $a(x) \geq \sigma > 0$ e inoltre per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ si abbia

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{2} \xi_{i,i} - a(x) \sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(x)\xi_{i,j} \right| &=< I - a(x)A(x) \mid \xi > \\ &\leq |I - a(x)A(x)|_{\mathbb{R}^4} |\xi|_{\mathbb{R}^4} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2} (1 - a(x)\lambda_i(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\xi|_{\mathbb{R}^4} \\ &\leq \rho |\xi|_{\mathbb{R}^4} \end{aligned}$$

per un certo $\rho \in (0, 1)$ (indipendente da x). Precisiamo che $< \cdot \mid \cdot >$ è il prodotto scalare tra matrici in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ intese come elementi di $\mathbb{R}^4$. Quindi, dobbiamo cercare $a \in L^\infty(\Omega)$, $\sigma > 0$ e $\rho \in (0, 1)$ tali che per quasi ogni $x \in \Omega$ si abbia

$$a(x) \geq \sigma > 0, \quad \left(\sum_{i=1}^{2} (1 - a(x)\lambda_i(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho < 1.$$

La seconda condizione è equivalente a richiedere che

$$a(x)^2 \left[\lambda_1(x)^2 + \lambda_2(x)^2 \right] - 2a(x) \left[\lambda_1(x) + \lambda_2(x) \right] + 2 - \rho^2 \leq 0$$

Osserviamo che una soluzione reale esiste se e solo se vale

$$\frac{2\lambda_1(x)\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)^2 + \lambda_2(x)^2} \geq 1 - \rho^2.$$

Essendo A limitata, anche i suoi autovalori λ_1, λ_2 lo sono. Se poniamo

$$M := \max_{i=1,2} \|\lambda_i\|_{L^\infty(\Omega)},$$

vale che

$$\frac{2\lambda_1(x)\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)^2 + \lambda_2(x)^2} \geq \frac{\nu^2}{M^2};$$

otteniamo la tesi scegliendo

$$a(x) := \frac{\lambda_1(x)\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)^2 + \lambda_2(x)^2} \geq \frac{\nu^2}{2M^2} > 0, \quad \rho := \left[1 - \left(\frac{\nu}{M}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < 1.$$

2.2.2 Condizioni di regolarità

La seconda tecnica che presentiamo si basa su delle stime a priori, cioè disuguaglianze che riguardano soluzioni delle quali assumiamo l'esistenza. Ci concentriamo sulle idee principali, tralasciando alcune dimostrazioni e certi dettagli di natura tecnica.

Principio del massimo

Innanzitutto presentiamo una versione del principio del massimo. Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.2.10 (Soprasoluzione)**.** Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in $H^2(\Omega)$ si dice soprasoluzione in Ω per il problema (2.4) se per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) \geq 0$$

Teorema 2.2.11 (Principio del massimo)**.** *Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice simmetrica e uniformemente ellittica in Ω con coefficienti di classe $C^0(\overline{\Omega})$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ è soprasoluzione dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_{ij} u = 0$$

in Ω (vedi 2.2.10), allora vale che

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che u ammette massimo in $\overline{\Omega}$ e $\partial\Omega$. Supponiamo che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) > 0$$

per ogni $x \in \Omega$. Se esistesse un punto di massimo relativo x_0 interno ad Ω, allora avremmo che la matrice hessiana di u in x_0, che denotiamo con $H(x_0)$, sarebbe definita negativa. Sia V una matrice ortogonale che diagonalizza $H(x_0)$, ovvero

$$V^T H(x_0) V = \Lambda_H := \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$$

con $\beta_i \leq 0$ per ogni i. Precisiamo che $A(x_0)$ è definita positiva (come segue dall'ipotesi di ellitticità uniforme); sia U una matrice ortogonale che diagonalizza $A(x_0)$, ovvero

$$U^T A(x_0) U = \Lambda_A := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

con $\alpha_i > 0$ per ogni i. Denotiamo

$$Q := U^T V = (q_{i,j})$$

e $< \cdot \mid \cdot >$ il prodotto scalare tra matrici, intese come vettori in $\mathbb{R}^{n^2}$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x_0) D_{ij} u(x_0) &=< A(x_0) \mid H(x_0) > \\ &=< U\Lambda_A U^T \mid V\Lambda_H V^T >=< \Lambda_A U^T V \mid U^T V \Lambda_H > \\ &=< \Lambda_A Q \mid Q \Lambda_H >= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i q_{i,j}^2 \beta_j \leq 0. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato le ipotesi sul segno degli autovalori di $A(x_0)$ e $H(x_0)$. Abbiamo ottenuto l'assurdo.

Nel caso in cui

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{i,j} u(x) \geq 0$$

in Ω, per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon \left| x \right|^2.$$

Notiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ per ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{i,j} u_\varepsilon(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{i,j} u(x) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon a_{i,i}(x) > 0.$$

Allora per u_ε vale che

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Osservando che $u_\varepsilon \to u$ uniformemente in $\overline{\Omega}$, deduciamo che vale la tesi per u. □

Osservazione 2.2.12. Nel teorema 2.2.11, l'ipotesi che A abbia coefficienti continui serve soltanto perchè lavoriamo con i valori puntuali di A e può essere chiaramente indebolita.

Corollario 2.2.13. *Nel contesto del teorerma 2.2.11, se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ è soluzione dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_{ij} u = 0$$

in Ω allora u raggiunge il massimo e il minimo sul bordo; in altri termini, vale che

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema 2.2.11 alle funzioni u e $-u$. □

Possiamo finalmente mostrare che se la soluzione del problema di Dirichlet esiste, allora è unica.

Corollario 2.2.14. *Nel contesto del teorerma 2.2.11, siano $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzioni del problema differenziale con condizioni al bordo di Dirichlet*

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) = f(x) \quad x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) \ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue fissate. Allora $v = w$.

Dimostrazione. Osserviamo che $v - w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ è soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) = 0 \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0 \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Per il corollario 2.2.13, vale che $v - w \equiv 0$ in Ω. □

Si può formulare una versione del principio del massimo per operatori con coefficienti L^∞, che enunciamo senza dimostrare. Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice uniformemente ellittica in Ω con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$; poniamo

$$D^*(x) := [\det(A(x))]^{\frac{1}{n}} ;$$

notiamo che $D^*(x)$ è la media geometrica degli autovalori di $A(x)$ (che, per l'ipotesi di uniforme ellitticità, sono tutti positivi). Se denotiamo con $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ rispettivamente il più piccolo e il più grande autovalore di $A(x)$, vale ovviamente che

$$\lambda(x) \leq D^*(x) \leq \Lambda(x).$$

Vale il risultato seguente.

Teorema 2.2.15 (Principio del massimo di Aleksandrov-Bakel'man-Pucci)**.** *Sia $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) \geq f(x).$$

Supponiamo che $A = (a_{i,j})$ sia uniformemente ellittica in Ω con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$; poniamo

$$D^*(x) := [\det(A(x))]^{\frac{1}{n}} ,$$
$$b(x) := \sup\{|b_i(x)| \mid i \in \{1, \dots, n\}\},$$
$$u^\pm(x) := \max\{\pm u(x), 0\}.$$

Supponiamo che $b/D^*, f/D^* \in L^n(\Omega)$ e che $c(x) \leq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Allora esiste una costante $C > 0$ dipendente esclusivamente da n, dal diametro di Ω e da $\|b/D^*\|_{L^n(\Omega)}$ tale che

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \left\| \frac{f}{D^*} \right\|_{L^n(\Omega)} .$$

Osservazione 2.2.16. Dal principio del massimo di Aleksandrov-Bakel'man-Pucci (vedi 2.2.15) ricaviamo l'unicità della soluzione in $C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ del problema differenziale con condizioni al bordo di Dirichlet: basta procedere come nella dimostrazione del corollario 2.2.14.

Esistenza via stime a priori

Il primo passo per studiare l'esistenza delle soluzioni di problemi ellittici utilizzando delle stime a priori è dato dal teorema seguente, che enunciamo senza dimostrare (rientra nella teoria di Schauder).

Teorema 2.2.17. *Sia $\alpha \in (0,1)$; supponiamo che Ω sia un aperto limitato con bordo di classe $C^{2,\alpha}$; sia $A = (a_{i,j})$ una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) con coefficienti di classe $C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Supponiamo che $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ sia soluzione in Ω dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_{ij} u = f.$$

Allora $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ ed esiste una costante $c > 0$ dipendente soltanto da ν, Ω e $\|a_{i,j}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ (vedi 4.1.5) tale che

$$\|u\|^2_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c \left[\|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + |u|^2_{2,2,\Omega} \right].$$

A questo punto, possiamo anche mostrare il risultato seguente.

Teorema 2.2.18. *Nel contesto del teorema 2.2.17, esiste una costante $c > 0$ dipendente soltanto da ν, Ω e $\|a_{i,j}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ (vedi 4.1.5) tale che*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \, \|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo e supponiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistano $(f_k)_k \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $(u_k)_k \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ tali che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_{ij} u_k = f_k$$

per ogni $x \in \Omega$ e inoltre valga

$$|u_k|^2_{2,2,\Omega} \geq k^2 \, \|f_k\|^2_{C^{0,\alpha}}.$$

A meno di dividere u_k e f_k per la quantità $|u_k|_{2,2,\Omega}$, possiamo supporre che per ogni $k \in \mathbb{N}$ valga

$$1 = |u_k|^2_{2,2,\Omega} \geq k^2 \, \|f_k\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Allora $f_k \to 0$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Dal teorema 2.2.17 deduciamo che la successione $(u_k)_k$ è limitata in $C^{2,\alpha}(\Omega)$; per il teorema di Ascoli-Arzelà, esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tali che $u_k \to u$ in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Notiamo che u risolve il problema differenziale

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) = 0 & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Per il principio del massimo (vedi 2.2.13) vale che $u \equiv 0$ in Ω. Tuttavia, questo è assurdo perchè

$$1 = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{i,j} u_k\|^2_{0,2,\Omega} \leq \lim_{k \to +\infty} n^2 \, |\Omega| \max\{\|D_{ij} u_k\|^2_{L^\infty(\Omega)} \mid i,j = 1, \ldots, n\} = 0,$$

perchè $u_k \to u \equiv 0$ in $C^{2,\alpha}(\Omega)$. $\square$

A questo punto, possiamo raffinare la stima ottenuta nel teorema 2.2.18

Corollario 2.2.19. *Nel contesto del teorema 2.2.17, esiste una costante $c > 0$ dipendente soltanto da ν, Ω e $\|a_{i,j}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ (vedi 4.1.5) tale che*

$$\|u\|^2_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c\,\|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\,.$$

Dimostrazione. La tesi è una conseguenza immediata dei teoremi 2.2.17 e 2.2.18. □

Infine, possiamo mostrare un risultato di esistenza della soluzione per problemi differenziali con condizioni al bordo di Dirichlet e coefficienti regolari. Abbiamo bisogno di un risultato (non dimostrato) in cui enunciamo la tesi nel caso modello; estenderemo lo stesso risultato agli altri operatori ellittici con la teoria degli operatori vicini.

Teorema 2.2.20. *Siano $\alpha \in (0,1)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo di classe $C^{2,\alpha}$; l'operatore $\Delta : C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ è una bigezione.*

Teorema 2.2.21. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo di classe $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $A = (a_{i,j})$ uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) e con coefficienti in $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ il problema differenziale*

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_{ij} u(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ha soluzione unica in $C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ed esiste una costante $c > 0$ dipendente soltanto da ν, Ω e $\|a_{i,j}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ (vedi 4.1.5) tale che

$$\|u\|^2_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c\,\|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\,.$$

Dimostrazione. Utilizziamo il metodo di continuità (vedi 2.1.3) per gli operatori vicini. Per ogni $t \in (0,1)$ per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ nulla al bordo, poniamo

$$A_t(u) := (1-t)\nu\Delta u + t \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} D_{ij} u.$$

I coefficienti dell'operatore A_t sono

$$a^{(t)}_{i,j} := (1-t)\nu\delta_{ij} + t a_{i,j}.$$

Notiamo che per ogni $t \in [0,1]$ per ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^n a^{(t)}_{i,j} \xi_i \xi_j \geq (1-t)\nu\,|\xi|^2 + \nu t\,|\xi|^2 = \nu\,|\xi|^2\,.$$

Quindi, la matrice $A^{(t)} = (a^{(t)}_{i,j})$ è uniformemente ellittica in Ω e ha i coefficienti in $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Inoltre la costante di ellitticità è indipendente da t. Dal corollario 2.2.19 deduciamo che esiste una costante $c > 0$ dipendente soltanto da ν, Ω e $\|a_{i,j}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ tale che per ogni $t \in [0,1]$ per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ nulla al bordo vale che

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c\,\|A_t(u)\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\,.$$

Siano $\mathbb{X} := C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $\mathbb{Y} := C^{0,\alpha}(\Omega)$. Sappiamo che l'operatore Δ è una bigezione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$ (vedi 2.2.20). Inoltre, usando il fatto che i coefficienti $a_{i,j}$ sono limitati e in $C^{0,\alpha}$, deduciamo che per ogni $t, s \in [0,1]$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ vale che

$$\begin{aligned}
\|A_t(u) - A_s(u)\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= |t-s| \left\| \nu\Delta u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_{ij} u \right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\
&\leq c\,|t-s|\, \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} . \\
&\leq c\,|t-s|\, \|A_t(u)\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Precisiamo che costante c può cambiare da linea a linea, ma è indipendente da t, s e u. Siamo nelle condizioni di applicare il metodo di continuità degli operatori vicini (vedi 2.1.3), ottenendo che A_t è una bigezione per ogni $t \in [0,1]$, da cui segue la tesi. $\square$

Osservazione 2.2.22. Possiamo schematizzare la dimostrazione del teorema 2.2.21 come segue: sappiamo che un certo risultato vale per l'operatore laplaciano; riusciamo a connettere un qualsiasi operatore uniformemente ellittico con il laplaciano tramite un cammino di operatori uniformemente ellittici e a due a due vicini. Allora l'operatore uniformemente ellittico in esame gode delle stesse proprietà dell'operatore laplaciano.

2.3 Esistenza di soluzioni per problemi variazionali

Vogliamo studiare l'esistenza di soluzioni per i problemi variazionali. D'ora in avanti, a differenza dei paragrafi precedenti, procederemo in maniera del tutto rigorosa.

2.3.1 Disuguaglianze di Poincarè

Iniziamo presentando per completezza un risultato fondamentale.

Proposizione 2.3.1 (Disuguaglianza di Poincarè)**.** *Siano $n \geq 1$, p in $[1, +\infty)$ e Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^n$ limitato. Esiste una costante $c(n; p; \Omega) > 0$ tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c(n; p; \Omega)\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} .$$

Dimostrazione. Notiamo che è sufficiente mostrare la disuguaglianza per funzioni $u \in C_c^\infty(\Omega)$ e poi estenderla a tutte le funzioni in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per densità.

Step 1: Sia $u \in C_c^1(\Omega)$ e supponiamo che $\Omega \subseteq (-M, M)^d$. Ovviamente, possiamo estendere u ad una funzione in $C_c^1((-M, M)^d)$ in modo che valga 0 fuori da Ω. Denotiamo con $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ le variabili da cui dipende u. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, per ogni $x \in [-M, M]$ vale che

$$u(x; y) = \int_{-M}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(t; y)\, dt.$$

Segue che

$$|u(x; y)| \leq \int_{-M}^{M} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t; y) \right|\, dt.$$

Integrando entrambi i membri rispetto a $(x; y) \in [-M, M] \times [-M, M]^{d-1}$ otteniamo che

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{[-M,M]^d} |u(x;y)| \; dxdy \\
&\leq 2M \int_{[-M,M]^{d-1}} \left(\int_{-M}^{M} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t;y) \right| \; dt \right) \; dy \\
&= 2M \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Osservando che M dipende dall'ampiezza di Ω, abbiamo ottenuto la disuguaglianza nel caso $p = 1$.

Step 2: Analizziamo, invece, il caso in cui $p > 1$. Fissato $r > 0$ definiamo la funzione $\varphi_r(\sigma) := |\sigma|^r \sigma$; notiamo che $\varphi_r \in C^1(\mathbb{R})$. Data $u \in C_c^\infty(\Omega)$, vale che $\varphi_r \circ u \in C_c^1(\Omega)$. Per quanto mostrato nel passo precedente, vale che

$$\|\varphi_r \circ u\|_{L^1(\Omega)} \leq c(\Omega) \left\| \frac{\partial(\varphi_r \circ u)}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)} ,$$

per una costante $C(\Omega)$ opportuna (dipendente solo da Ω). Notiamo che

$$\|\varphi_r \circ u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^{r+1} \; dxdy = \|u\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} .$$

Osserviamo che $\varphi_r'(\sigma) = (r+1)|\sigma|^r$; allora segue che

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial(\varphi_r \circ u)}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega \left| \varphi_r'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right| \; dxdy \\
&= (r+1) \int_\Omega |u|^r \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \; dxdy \\
&\leq (r+1) \left(\int_\Omega |u|^{r+1} \; dxdy \right)^{\frac{r}{r+1}} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{r+1} \; dxdy \right)^{\frac{1}{r+1}} \\
&= (r+1) \|u\|_{L^{r+1}(\Omega)}^r \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^{r+1}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Precisiamo che abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{r+1}{r}$ e $r+1$. Otteniamo che

$$\|u\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \leq C(\Omega)(r+1) \|u\|_{L^{r+1}(\Omega)}^r \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^{r+1}(\Omega)} ;$$

semplificando e scegliendo $r = p - 1$ (ricordiamo che $p > 1$), abbiamo che

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq pC(\Omega) \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

□

Osservazione 2.3.2. Dati un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $p \in [1, +\infty)$, è ovvio che la costante c nella disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1) è quella che verifica

$$\frac{1}{c} = \inf \left\{ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Se $p \in (1, +\infty)$ è possibile mostrare tramite il metodo diretto che l'estremo inferiore è un minimo. Se $p = 2$, si può mostrare tramite il teorema spettrale (per operatori compatti) che

$$c = \frac{1}{\lambda_1}$$

dove λ_1 è il più grande autovalore dell'operatore inverso del laplaciano.

Corollario 2.3.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $p \in [1, +\infty)$ e $m \in \mathbb{N}^+$; esiste una costante $c(p, \Omega, m, n) > 0$ tale che per ogni $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ vale che*

$$\sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \; dx \leq c \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \; dx.$$

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per induzione a partire dalla disuguaglianza di Poincarè base (vedi 2.3.1) ed è una conseguenza immediata del fatto che se $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ allora $\nabla u \in W_0^{m-1,p}(\Omega)$. □

Osservazione 2.3.4. Le disuguaglianze di Poincarè dicono che, nel contesto del corollario 2.3.3, la quantità $\|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)}$ è una norma su $W_0^{m,p}(\Omega)$ equivalente alla norma di Sobolev. In particolare, se $p = 2$, $H_0^m(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$< u, v > := \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \; dx.$$

2.3.2 Applicazioni all'esistenza di soluzioni

Abbiamo tutti gli strumenti per mostrare l'esistenza di soluzioni deboli per problemi ellittici variazionali. L'osservazione 2.3.4 sarà cruciale in questo contesto. Iniziamo ricordando il teorema di rappresentazione di Riesz in spazi di Hilbert, di cui faremo largo uso nel seguito.

Teorema 2.3.5 (Riesz)**.** *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert reale con prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ e $\mathbb{H}'$ il suo duale topologico. La mappa $J : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ che associa ad ogni elemento $v \in \mathbb{H}$ il funzionale*

$$J_v(w) := < v, w >$$

è un'isometria lineare e bigettiva, lineare.

Questo risultato di rappresentazione del duale di uno spazio di Hilbert consente immediatamente di provare l'esistenza di soluzioni deboli per problemi non variazionali nel caso simmetrico.

Definizione 2.3.6. Dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, denotiamo con $H^{-1}(\Omega)$ il duale topologico di $H_0^1(\Omega)$ con la norma operatoriale indotta dalla norma $\|\nabla u\|_{0,2,\Omega}$.

Osservazione 2.3.7. Sia Ω un aperto limitato; in virtù dell'osservazione 2.3.4, del teorema di rappresentazione di Riesz (vedi 2.3.5) e della definizione 2.3.6, per ogni $F \in H^{-1}(\Omega)$ esiste unica $f \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\|\nabla f\|_{0,2,\Omega} = \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}\,, \quad F(\varphi) = \int_\Omega < \nabla f, \nabla\varphi > \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 2.3.8. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $F \in H^{-1}(\Omega)$, $A = (a_{i,j})$ una matrice simmetrica, uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) e con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$. Esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema*

$$\sum_{i,j=1}^n -D_i[a_{i,j}D_j u] = F. \tag{2.6}$$

Inoltre vale che

$$\|\nabla u\|_{0,2,\Omega} \le \frac{1}{\nu}\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo la forma bilineare $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{A}(u,v) := \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j} D_i v D_j u \, dx.$$

Essendo $A \in L^\infty(\Omega)$, la forma $\mathcal{A}$ è ben definita e vale

$$|\mathcal{A}(u,v)| \le \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{0,2,\Omega} \|\nabla v\|_{0,2,\Omega}\,.$$

Essendo A simmetrica, anche la forma $\mathcal{A}$ è simmetrica; inoltre, dall'ipotesi di uniforme ellitticità in Ω si deduce che

$$\mathcal{A}(u,u) \ge \nu \|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega}\,.$$

Deduciamo che $\mathcal{A}$ è un prodotto scalare su $H_0^1(\Omega)$ (definito positivo) che induce una norma equivalente a quella $\|\nabla u\|_{0,2,\Omega}$. Deduciamo che $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ è continua anche rispetto alla norma indotta da $\mathcal{A}$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz (applicato allo spazio di Hilbert $H_0^1(\Omega)$ con il prodotto scalare indotto da $\mathcal{A}$), esiste unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ vale che

$$\mathcal{A}(u,\varphi) = F(\varphi).$$

In altri termini, abbiamo che

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j} D_j u D_i \varphi \, dx = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Quindi u è soluzione debole del problema (2.6); precisiamo anche che $v \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione del problema (2.6) se e solo se

$$\mathcal{A}(v,\varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

e u è l'unico elemento di $H_0^1(\Omega)$ con questa proprietà. Concludiamo osservando che

$$\nu \|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega} \le \mathcal{A}(u,u) = F(u) \le \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla u\|_{0,2,\Omega}\,,$$

da cui segue la stima

$$\|\nabla u\|_{0,2,\Omega} \le \frac{1}{\nu}\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}\,.$$

□

Nel contesto del teorema 2.3.8, l'ipotesi di limitatezza dei coefficienti è fondamentale per dare senso a tutti gli integrali; l'ipotesi di ellitticità uniforme è strutturale perchè caratterizza questa classe di problemi. L'ipotesi che la matrice A sia simmetrica può essere rimossa. Tuttavia, è necessario utilizzare uno strumento più raffinato del teorema di rappresentazione di Riesz (vedi 2.3.5), noto come lemma di Lax-Milgram, che enunciamo. Omettiamo la dimostrazione perchè si ottiene dal teorema di rappresentazione di Riesz con argomentazioni elementari e anche perchè mostreremo un risultato ancora più generale, noto come teorema di Stampacchia.

Lemma 2.3.9 (Lax-Milgram)**.** *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert reale e $\mathcal{A} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ una forma bilineare con le seguenti proprietà:*

- *esiste $M > 0$ tale che per ogni $u, v \in \mathbb{H}$ vale che $|\mathcal{A}(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|$ (limitatezza);*
- *esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $u \in \mathbb{H}$ vale che $\mathcal{A}(u,u) \geq \nu \|u\|^2$ (coercività).*

Allora, per ogni $F \in \mathbb{H}'$ esiste un unico elemento $u \in \mathbb{H}$ tale che

$$\mathcal{A}(u,v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbb{H}.$$

Inoltre vale la stima

$$\|u\|_{\mathbb{H}} \leq \frac{1}{\nu} \|F\|_{\mathbb{H}'} .$$

A questo punto, otteniamo la versione del teorema 2.3.8 senza l'ipotesi che la matrice dei coefficienti A sia simmetrica. Riportiamo per completezza l'enunciato.

Corollario 2.3.10. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $F \in H^{-1}(\Omega)$, $A = (a_{i,j})$ una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) e con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$. Esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema*

$$\sum_{i,j=1}^{n} -D_i[a_{i,j} D_j u] = F.$$

Inoltre vale che

$$\|\nabla u\|_{0,2,\Omega} \leq \frac{1}{\nu} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} .$$

Passiamo alla dimostrazione del teorema di Stampacchia, che consente di provare l'esistenza di soluzioni deboli anche per certi problemi non lineari. La dimostrazione di questo risultato è basata sul teorema di rappresentazione di Riesz (vedi 2.3.5) e sulla teoria degli operatori vicini (vedi 2.1.2).

Teorema 2.3.11 (Stampacchia)**.** *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert reale e $\mathcal{A} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ un operatore con le seguenti proprietà:*

1. *$\mathcal{A}(0,v) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{H}$;*
2. *per ogni $u \in \mathbb{H}$, la mappa $v \to \mathcal{A}(u,v)$ è lineare;*
3. *esiste $M > 0$ tale che per ogni $u_1, u_2, v \in \mathbb{H}$ vale che*

$$|\mathcal{A}(u_1,v) - \mathcal{A}(u_2,v)| \leq M \|u_1 - u_2\| \|v\| ;$$

4. esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ vale che

$$\mathcal{A}(u_1, u_1 - u_2) - \mathcal{A}(u_2, u_1 - u_2) \geq \nu \left\| u_1 - u_2 \right\|^2 .$$

Allora per ogni $F \in \mathbb{H}'$ esiste unico $u \in \mathbb{H}$ tale che per ogni $v \in \mathbb{H}$ vale che

$$\mathcal{A}(u, v) = F(v);$$

inoltre, si ha che

$$\left\| u \right\|_{\mathbb{H}} \leq \frac{1}{\nu} \left\| F \right\|_{\mathbb{H}'} .$$

Dimostrazione. Per ogni $u \in \mathbb{H}$, sia $\mathcal{A}_u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ l'operatore tale che $\mathcal{A}_u(v) := \mathcal{A}(u, v)$. Per le prime tre ipotesi, $\mathcal{A}_u$ è lineare e continuo; inoltre, vale che

$$|\mathcal{A}_u(v)| \leq M \left\| u \right\|_{\mathbb{H}} \left\| v \right\|_{\mathbb{H}} ,$$

da cui segue che

$$\left\| \mathcal{A}_u \right\|_{\mathbb{H}'} \leq M \left\| u \right\|_{\mathbb{H}} .$$

Allora è ben definita una mappa $\bar{\mathcal{A}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ tale che $\bar{\mathcal{A}}(u) := \mathcal{A}_u$. Denotiamo con $J : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ l'isomorfismo di Riesz (vedi 2.3.5). La tesi (nelle parti di esistenza e unicità) è equivalente a provare che $\bar{A}$ è una bigezione tra $\mathbb{H}$ e $\mathbb{H}'$. Sappiamo che J gode di questa proprietà; allora, se mostriamo che $\bar{\mathcal{A}}$ è un operatore vicino a J, otteniamo la tesi per il teorema 2.1.2. Dobbiamo soltanto mostrare che esistono $\alpha > 0$ e $k \in (0, 1)$ tali che per ogni $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ vale che

$$\left\| [J(u_1) - J(u_2)] - \alpha[\bar{A}(u_1) - \bar{A}(u_2)] \right\|_{\mathbb{H}'} \leq k \left\| J(u_1) - J(u_2) \right\|_{\mathbb{H}'} .$$

Essendo J un'isometria lineare bigettiva, possiamo equivalentemente mostrare che esistono $\alpha > 0$ e $k \in (0, 1)$ tali che per ogni $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ vale che

$$\left\| [u_1 - u_2] - \alpha[J^{-1} \circ \bar{A}(u_1) - J^{-1} \circ \bar{A}(u_2)] \right\|_{\mathbb{H}} \leq k \left\| u_1 - u_2 \right\|_{\mathbb{H}} .$$

Sia $\alpha > 0$ (lo sceglieremo in seguito); usando le proprietà di J e J^{-1} e le ipotesi su $\mathcal{A}$ (in particolare la terza e la quarta), troviamo che per ogni $u \in \mathbb{H}$ vale

$$\begin{aligned}
\left\| [u_1 - u_2] - \alpha[J^{-1}(\bar{A})(u_1) - J^{-1}(\bar{A}(u_2))] \right\|_{\mathbb{H}} &= \left\| u_1 - u_2 \right\|_{\mathbb{H}}^2 \\
&\quad + \alpha^2 \left\| J^{-1}(\bar{A}(u_1)) - J^{-1}(\bar{A}(u_2)) \right\|_{\mathbb{H}}^2 - 2\alpha < u_1 - u_2, J^{-1}(\bar{A}(u_1)) - J^{-1}(\bar{A}(u_2)) > \\
&\leq \left\| u_1 - u_2 \right\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^2 \left\| \bar{A}(u_1) - \bar{A}(u_2) \right\|_{\mathbb{H}'}^2 - 2\alpha[\mathcal{A}(u_1, u_1 - u_2) - \mathcal{A}(u_2, u_1 - u_2)] \\
&\leq (1 + M^2\alpha^2 - 2\alpha\nu) \left\| u_1 - u_2 \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Allora, è sufficiente scegliere $\alpha > 0$ in modo che $0 < 1 + M^2\alpha^2 - 2\alpha\nu < 1$; osservando che $\nu < M$, notiamo che è sufficiente scegliere $\alpha \in \left(0, \frac{2\nu}{M^2}\right)$ per dedurre che $\bar{A}$ è vicino a J.

Per stimare la norma di u, prendendo $u_1 = u, u_2 = 0$ nella quarta ipotesi del teorema, otteniamo che

$$\nu \left\| u \right\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \mathcal{A}(u, u) = F(u) \leq \left\| F \right\|_{\mathbb{H}'} \left\| u \right\|_{\mathbb{H}}$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 2.3.12. Nel contesto del teorema 2.3.11, se la mappa $u \to \mathcal{A}(u, v)$ è lineare per ogni $v \in \mathbb{H}$, la quarta ipotesi equivale alla coercività di $\mathcal{A}$ (vedi 2.3.9).

Corollario 2.3.13. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e dei coefficienti boreliani $a_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*

- $a_i(x, 0) = 0$ *per ogni* $x \in \Omega$;
- *esiste* $\nu > 0$ *tale che per ogni* $p, \bar{p} \in \mathbb{R}^n$ *per ogni* $x \in \Omega$ *vale che*

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, p_i) - a_i(x, \bar{p}_i)](p_i - \bar{p}_i) \geq \nu \left| p - \bar{p} \right|^2,$$

- *esiste* $M > 0$ *tale che per ogni* $p, \bar{p} \in \mathbb{R}^n$ *per ogni* $x \in \Omega$ *vale che*

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, p) - a_i(x, \bar{p})]^2 \leq M^2 \left| p - \bar{p} \right|^2.$$

Allora per ogni $F \in H^{-1}(\Omega)$ *esiste ed è unica* $u \in H_0^1(\Omega)$ *soluzione debole dell'equazione*

$$\sum_{i=1}^{n} -D_i[a_i(x, \nabla u)] = F. \tag{2.7}$$

Inoltre, vale che

$$\left\| \nabla u \right\|_{0,2,\Omega} \leq \frac{1}{\nu} \left\| F \right\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Per definizione, $u \in H_0^1(\Omega)$ risolve il problema (2.7) se e solo se per ogni funzione test $v \in H_0^1(\Omega)$ vale che

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, \nabla u) D_i v \; dx = F(v).$$

Definiamo l'operatore $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{A}(u, v) := \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, \nabla u) D_i v \; dx.$$

Se mostriamo che $\mathcal{A}$ verifica le ipotesi del teorema di Stampacchia (vedi 2.3.11), otteniamo la tesi. Osserviamo che per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$ vale che

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{A}(u, v) \right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| a_i(x, \nabla u) \right| \left| D_i v \right| \; dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| a_i(x, \nabla u) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| D_i v \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \; dx \\
&\leq \left\| \nabla v \right\|_{0,2,\Omega} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| a_i(x, \nabla u) \right|^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M \left\| \nabla v \right\|_{0,2,\Omega} \left\| \nabla u \right\|_{0,2,\Omega}.
\end{aligned}$$

Precisiamo che nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato le ipotesi sui coefficienti. In altri termini, la forma $\mathcal{A}$ è ben definita. Verifichiamo che valgono le quattro ipotesi del teorema 2.3.11. Per quanto riguarda la prima ipotesi, per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ vale che

$$\mathcal{A}(0, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, 0) D_i v \; dx = 0.$$

Inoltre, per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ la mappa $v \to \mathcal{A}(u, v)$ è chiaramente lineare. Ragionando come in precedenza, la terza ipotesi garantisce che per ogni $u_1, u_2, v \in H_0^1(\Omega)$ vale che

$$|\mathcal{A}(u_1, v) - \mathcal{A}(u_2, v)| \leq M \left\| \nabla v \right\|_{0,2,\Omega} \left\| \nabla u_1 - \nabla u_2 \right\|_{0,2,\Omega}.$$

Per la seconda ipotesi, per ogni $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ vale che

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(u_1, u_1 - u_2) - \mathcal{A}(u_2, u_1 - u_2) &= \sum_{i=1}^{n} [a_i(x, \nabla u_1) - a_i(x, \nabla u_2)][D_i u_1 - D_i u_2] \; dx \\
&\geq \int_{\Omega} \nu \left| \nabla u_1 - \nabla u_2 \right|^2 \; dx \\
&= \nu \left\| \nabla u_1 - \nabla u_2 \right\|_{0,2,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.3.14. Nel contesto del corollario 2.3.13, se i coefficienti a_i sono tali che

$$a_i(x, p) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x) p_j,$$

si trova il problema lineare descritto dal corollario 2.3.10.

2.4 Esistenza di soluzioni per sistemi variazionali

Vogliamo studiare l'esistenza di soluzioni per i sistemi variazionali.

Definizione 2.4.1. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto $m \in \mathbb{N}^+$; denotiamo con $H^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ il duale topologico dello spazio di Hilbert $H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ (eventualmente a valori vettoriali), $A_{\alpha,\beta}$ matrici di taglia $\mathbb{R}^{N \times N}$ (non necessariamente costanti) e $F \in H^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Per mostrare che il problema

$$\begin{cases} u \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} [A_{\alpha,\beta}(x) D^{\beta} u] = F \end{cases} \tag{2.8}$$

ha soluzione, dobbiamo provare che esiste $u \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tale che per ogni funzione test $v \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale che

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \int_{\Omega} < A_{\alpha,\beta} D^{\beta} u, D^{\alpha} v > \; dx = F(v). \tag{2.9}$$

Per applicare il lemma di Lax-Milgram (vedi 2.3.9), bisogna dare ipotesi sulle matrici $A_{\alpha,\beta}$ in modo che la forma bilineare

$$\mathcal{A}(u, v) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \int_{\Omega} < A_{\alpha,\beta} D^{\beta} u, D^{\alpha} v > \; dx \tag{2.10}$$

risulti limitata e coerciva.

2.4.1 Sistemi a coefficienti costanti

Iniziamo dallo studio dei sistemi a coefficienti costanti (che preludono a quelli a coefficienti continui). Il primo passo in questa direzione è dato dalla disuguaglianza di Garding. La sua dimostrazione si basa su alcune note proprietà della trasformata di Fourier, che richiamiamo brevemente.

Definizione 2.4.2 (Spazio di Schwartz)**.** Denotiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio di Schwartz dato dalle funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ a decrescita più che polinomiale, cioè tali che per ogni multi-indice α e per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ vale che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^N)\,|D^\alpha f(x)| < +\infty.$$

Osservazione 2.4.3. Si nota banalmente che $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lo spazio di Schwartz è l'ambiente ideale in cui definire la trasformata di Fourier.

Definizione 2.4.4 (Trasformata di Fourier)**.** Data una funzione di Schwartz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (vedi 2.4.2) si definisce la trasformata di Fourier di f come la funzione $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tale che

$$\hat{f}(\xi) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<x,\xi>}\,dx.$$

Valgono le seguenti proprietà, che ci limitiamo a enunciare.

Proposizione 2.4.5. *Data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la sua trasformata di Fourier $\hat{f}$ è ancora una funzione di Schwartz. Inoltre, tutte le derivate di f sono funzioni di Schwartz per ogni multi-indice α vale che*

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Teorema 2.4.6 (Formula di Plancherel)**.** *Siano date $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a valori in $\mathbb{C}^n$; vale la formula:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} < \hat{f}(\xi), \overline{\hat{g}(\xi)} > \,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} < f(x), \overline{g(x)} > \,dx;$$

in particolare, vale la formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \,dx.$$

Possiamo finalmente enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Garding. Poniamo

$$\mathcal{A}_0(u,v) \coloneqq \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha v > \,dx \tag{2.11}$$

la parte principale dell'operatore $\mathcal{A}$. Vogliamo studiare la coercività di questa forma bilineare.

Lemma 2.4.7 (Disuguaglianza di Garding)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $m \in \mathbb{N}^+$ e $A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matrici costanti; supponiamo che valga la condizione di Legendre-Hadamard con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.13). Allora esiste una costante $c(\nu, m) > 0$ tale che per ogni $u \in H_0^m(\Omega;\mathbb{R}^N)$ vale che*

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \,dx \geq c\,|u|^2_{0,m,\Omega}\,. \tag{2.12}$$

Dimostrazione. **Step 1)**: Mostriamo che è possibile supporre che le matrici $A_{\alpha,\beta}$ siano simmetriche; infatti, ponendo

$$A^{+}_{\alpha,\beta} := \frac{A_{\alpha,\beta} + A^{T}_{\alpha,\beta}}{2}, \quad A^{-}_{\alpha,\beta} := \frac{A_{\alpha,\beta} - A^{T}_{\alpha,\beta}}{2}$$

rispettivamente la parte simmetrica e antisimmetrica di $A_{\alpha,\beta}$, notiamo che per ogni $u \in H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale che

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A^{-}_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > - < A^{T}_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > - < D^\beta u, A_{\alpha,\beta} D^\alpha u > \right] dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Inoltre, con calcoli analoghi, si verifica che le matrici $A^{+}_{\alpha,\beta}$ verificano la condizione di Legendre-Hadamard ancora con la costante ν.

Step 2): Procediamo sotto l'assunzione ulteriore che le matrici $A_{\alpha,\beta}$ siano simmetriche. Per ipotesi (vedi 1.1.13), esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $\eta \in \mathbb{R}^N$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$\nu \left|\lambda\right|^{2m} \left|\eta\right|^2 \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta}\eta, \eta > \lambda^{\alpha+\beta}. \tag{2.13}$$

Nel dimostrare la disuguaglianza (2.12), possiamo supporre che $u \in C^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^N)$; allora, estendendola a 0 fuori da Ω, possiamo pensare che sia definita sia $C^\infty_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$

identicamente nulla fuori da Ω. Allora abbiamo che

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\mathbb{R}^n} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\mathbb{R}^n} < A_{\alpha,\beta} \widehat{D^\beta u}, \overline{\widehat{D^\alpha u}} > \ d\xi \tag{2.14}$$

$$= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\mathbb{R}^n} < A_{\alpha,\beta} (i\xi)^\beta \hat{u}(\xi), \overline{(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)} > \ d\xi \tag{2.15}$$

$$= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|\alpha|} (i)^{|\alpha|+|\beta|} \xi^{\alpha+\beta} < A_{\alpha,\beta} \hat{u}(\xi), \overline{\hat{u}}(\xi) > \ d\xi$$

$$= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\alpha+\beta} < A_{\alpha,\beta} \hat{u}(\xi), \overline{\hat{u}}(\xi) > \ d\xi$$

$$= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\alpha+\beta} \left[< A_{\alpha,\beta} \Re(\hat{u}), \Re(\hat{u}) > + < A_{\alpha,\beta} \Im(\hat{u}), \Im(\hat{u}) > \right] \ d\xi \tag{2.16}$$

$$\geq \nu \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\Re(\hat{u})|^2 + |\Im(\hat{u})|^2 \right] |\xi|^{2m} \ d\xi \tag{2.17}$$

$$= \nu \int_{\mathbb{R}^n} < \hat{u}(\xi), \overline{\hat{u}(\xi)} > |\xi|^{2m} \ d\xi$$

$$\geq c(\nu, m) \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha} < \hat{u}(\xi), \overline{\hat{u}(\xi)} > \ d\xi \tag{2.18}$$

$$= c \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 \ dx. \tag{2.19}$$

In (2.14) abbiamo usato la formula di Plancherel (vedi 2.4.6); in (2.15) abbiamo usato le formule della trasformata di Fourier (vedi 2.4.5); in (2.16) abbiamo usato il fatto che le matrici $A_{\alpha,\beta}$ sono simmetriche; in (2.17) abbiamo usato la condizione di Legendre-Hadamard (vedi 1.1.13); la costante in (2.18) dipende esclusivamente da ν, m; in (2.19) abbiamo usato ancora una volta la formula di Plancherel (vedi 2.4.6). Questo conclude la dimostrazione. □

La disuguaglianza di Garding (vedi 2.4.7) dice che la forma bilineare $\mathcal{A}_0$ definita in (2.11) è coerciva se è a coefficienti costanti e vale la condizione di Legendre-Hadamard (vedi 1.1.13). Allora possiamo ottenere l'esistenza di soluzioni deboli come una semplice conseguenza del lemma di Lax-Milgram (vedi 2.3.9).

Teorema 2.4.8. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $m \in \mathbb{N}^+$, $A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matrici costanti; supponiamo che valga la condizione di Legendre-Hadamard con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.13). Per ogni $F \in H^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ esiste ed è unica una soluzione debole in $H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ del problema*

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [A_{\alpha,\beta} D^\beta u] = F. \tag{2.20}$$

Inoltre esiste una costante $c(\nu, m, \Omega) > 0$ (indipendente da u e da F) tale che

$$\|u\|_{m,2,\Omega} \leq c \, \|F\|_{H^{-m}(\Omega)} \, .$$

Dimostrazione. Per semplicità, denotiamo con $c(\nu, m, \Omega) > 0$ una costante indipendente da ogni altro parametro, che può cambiare da linea a linea.

Consideriamo la forma bilineare

$$\mathcal{A}(u,v) := \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha v > \; dx$$

definita su $H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N) \times H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N)$; per la disuguaglianza di Garding (vedi 2.4.7), esiste una costante $c(\nu,m) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che

$$\mathcal{A}(u,u) \geq c\,|u|^2_{m,2,\Omega}\,.$$

Ricordiamo che, essendo Ω limitato, la quantità $|u|_{m,2,\Omega}$ è una norma equivalente (vedi 2.3.4) su $H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N)$. In altri termini, la forma bilineare $\mathcal{A}$ è coerciva. Essendo i coefficienti costanti, $\mathcal{A}$ è chiaramene limitata. Possiamo applicare il lemma di Lax-Milgram e otteniamo che per ogni $F \in H^{-m}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ esiste ed è unica una funzione $u \in H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha v > \; dx = F(v) \quad \forall v \in H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N).$$

In altri termini, u è soluzione del problema (2.20) Scegliendo $u = v$ come funzione test e utilizzando la disuguaglianza di Poincarè generalizzata (vedi 2.3.3), otteniamo

$$c\,\|u\|^2_{m,2,\Omega} \leq c\,|u|^2_{m,2,\Omega} \leq \mathcal{A}(u,u) = F(u) \leq \|F\|_{H^{-m}(\Omega,\mathbb{R}^N)}\,\|u\|_{m,2,\Omega}\,.$$

□

2.4.2 Sistemi a coefficienti continui

Possiamo ottenere gli stessi risultati nel caso in cui i coefficienti siano continui. Tuttavia, questo richiede alcune stime piuttosto delicate.

Lemma 2.4.9. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $m \in \mathbb{N}^+$ e $A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matrici a coefficienti in $C^0(\overline{\Omega})$; supponiamo che valga la condizione di Legendre-Hadamard con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.13). Denotiamo con d_Ω il diametro di Ω; siano $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $r \in (0, d_\Omega]$. Indichiamo con*

$$\Omega_r(x_0) := B_r(x_0) \cap \Omega.$$

Poniamo

$$\omega(r) := \sup\{|A_{\alpha,\beta}(x) - A_{\alpha,\beta}(y)| \;\mid\; x, y, \overline{\Omega},\; |x-y| \leq r,\; |\alpha| = |\beta| = m\}$$

il modulo di continuità (uniforme) delle matrici $A_{\alpha,\beta}$ in $\overline{\Omega}$ (notiamo che $\omega(r)$ è finito perchè le matrici $A_{\alpha,\beta}$ sono funzioni continue su $\overline{\Omega}$ che è compatto). Allora esiste una costante $c(\nu,m) > 0$ (indipendente da r e da x_0) tale che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega)$ $u \in H_0^m(\Omega_r(x_0);\mathbb{R}^N)$ vale che

$$\int_{\Omega_r(x_0)} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \; dx \geq c[1-\omega(r)]\,|u|^2_{m,2,\Omega_r(x_0)}\,. \tag{2.21}$$

Dimostrazione. Per semplicità, denotiamo con $c(\nu, m) > 0$ una costante indipendente da ogni altro parametro, che può cambiare da linea a linea.

Data $u \in H_0^m(\Omega_r(x_0); \mathbb{R}^N)$ vale che

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r(x_0)} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} &< A_{\alpha,\beta}(x) D^\beta u(x), D^\alpha u(x) > \; dx \\
&= \int_{\Omega_r(x_0)} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta}(x_0) D^\beta u(x), D^\alpha u(x) > \; dx \\
&\quad + \int_{\Omega_r(x_0)} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < [A_{\alpha,\beta}(x) - A_{\alpha,\beta}(x_0)] D^\beta u(x), D^\alpha u(x) > \; dx \qquad (2.22) \\
&\geq c\,|u|^2_{m,2,\Omega_r(x_0)} - \int_{\Omega_r(x_0)} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} |A_{\alpha,\beta}(x) - A_{\alpha,\beta}(x_0)| \left|D^\beta u(x)\right| |D^\alpha u(x)| \; dx \\
&\qquad (2.23) \\
&\geq c\,|u|^2_{m,2,\Omega_r(x_0)} - \omega(r) \int_{\Omega_r(x_0)} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right| |D^\alpha u(x)| \; dx \\
&= c\,|u|^2_{m,2,\Omega_r(x_0)} - \omega(r) \int_{\Omega_r(x_0)} \left(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)| \right)^2 \; dx \\
&\geq c[1 - \omega(r)]\,|u|^2_{m,2,\Omega_r(x_0)} \, . \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

In (2.22) abbiamo stimato il primo addendo con la disuguaglianza di Garding (vedi 2.4.7) e il secondo con la disuguaglianza triangolare e con la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz; in (2.23) abbiamo usato la definizione di $\omega(r)$. □

Possiamo estendere il risultato del lemma 2.21 al caso di funzioni definite su tutto l'aperto Ω; utilizzeremo un risultato di interpolazione di natura generale, che presentiamo brevemente.

Teorema 2.4.10 (Interpolazione di Lions)**.** *Siano $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ spazi di Banach, tali che le immersioni $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ sono continue e $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ è anche compatta. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $c(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $u \in \mathbb{X}$ vale che*

$$\|u\|_{\mathbb{Y}} \leq \varepsilon \|u\|_{\mathbb{X}} + c(\varepsilon) \|u\|_{\mathbb{Z}} \, .$$

Dimostrazione. Si procede per assurdo; supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in \mathbb{X}$ tale che

$$\|u_n\|_{\mathbb{Y}} > \varepsilon \|u_n\|_{\mathbb{X}} + n \|u_n\|_{\mathbb{Z}} \, .$$

Sostituendo u_n con $\frac{u_n}{\|u_n\|_{\mathbb{X}}}$, si può assumere che $\|u_n\|_{\mathbb{X}} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\|u_n\|_{\mathbb{Y}} > \varepsilon + n \|u_n\|_{\mathbb{Z}} \, .$$

Per continuità, la successione $(u_n)_n$ è limitata in $\mathbb{Y}$; deduciamo che $u_n \to 0$ in $\mathbb{Z}$. Per compattezza, a meno di passare a sottosuccessioni, si può supporre che $u_n \to u$ in $\mathbb{Y}$; allora, per continuità, $u_n \to u$ in $\mathbb{Z}$; deduciamo che $u = 0$. Abbiamo trovato che

$$0 \geq \varepsilon + \lim_{n \to +\infty} n \|u_n\|_{\mathbb{Z}} \, ,$$

che è chiaramente assurdo. □

Lemma 2.4.11. *Nel contesto del lemma 2.4.9, esiste una costante* $c(\nu, m, \Omega, A_{\alpha,\beta}) > 0$ *indipendente da ogni altro parametro tale che per ogni* $u \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *vale che*

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx \geq c \left[|u|^2_{m,2,\Omega} - |u|^2_{0,2,\Omega} \right]. \tag{2.25}$$

Dimostrazione. Per semplicità, denotiamo con $c(\nu, m, \Omega, A_{\alpha,\beta}) > 0$ una costante indipendente da ogni altro parametro, che può cambiare da linea a linea.

Possiamo scegliere un raggio $r > 0$ abbastanza piccolo in modo tale che $1 - \omega(r) \geq \frac{1}{2}$ (notiamo che se $1 - \omega(r) > 0$ la stima data nel lemma 2.4.9 è particolarmente significativa). Ricopriamo $\overline{\Omega}$ con palle $B_r(x_1), \ldots, B_r(x_h)$ centrate in punti contenuti in $\overline{\Omega}$. Prendiamo una partizione dell'unità $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,h}$ relativa a tale ricoprimento, cioè $\varphi_k \in C_c^\infty(B_r(x_k), [0,1])$ e inoltre

$$\sum_{i=1}^h \varphi_k(x)^2 = 1 \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Osserviamo che per dimostrare la tesi, possiamo supporre che $u \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (infatti, se vale per le funzioni lisce, la disuguaglianza (2.4.11) si estende per densità a tutte le funzioni in $H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$). Possiamo eventualmente pensare che u sia definita su tutto $\mathbb{R}^n$ estendendola a 0 fuori da Ω. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale l'identità

$$u(x) = \sum_{k=1}^h u(x) \varphi_k(x)^2;$$

ricordiamo anche che, utilizzando la notazione dei multi-indici, vale che

$$\varphi_k D^\alpha u = D^\alpha[\varphi_k u] - \sum_{\gamma \leq \alpha, \gamma \neq 0} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\alpha-\gamma} u.$$

Segue che

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx \\
&\quad = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{k=1}^h < A_{\alpha,\beta} \varphi_k^2 D^\beta u, D^\alpha u > \ dx \\
&\quad = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{k=1}^h \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} \varphi_k D^\beta u, \varphi_k D^\alpha u > \ dx \\
&\quad = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{k=1}^h \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta [\varphi_k u], D^\alpha [\varphi_k u] > \ dx \qquad (2.26) \\
&\qquad + \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{k=1}^h \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} \sum_{0 < \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\beta-\gamma} u, \sum_{0<\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\alpha-\gamma} u > \ dx \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

$$-\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega} < A_{\alpha,\beta}D^{\beta}[u\varphi_k], \sum_{0<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\gamma}\varphi_k D^{\alpha-\gamma}u > \, dx \tag{2.28}$$

$$-\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega} < A_{\alpha,\beta}\sum_{0<\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}D^{\gamma}\varphi_k D^{\beta-\gamma}u, D^{\alpha}[u\varphi_k] > \, dx \tag{2.29}$$

Stimiamo separatamente i quattro addendi, iniziando dal primo. Osserviamo che per ogni $k \in \{1, \ldots, h\}$ la funzione $\varphi_k \cdot u \in H_0^m(\Omega_r(x_k))$; possiamo applicare la disuguaglianza data dal lemma 2.4.9 e otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega} < A_{\alpha,\beta}D^{\beta}[\varphi_k u], D^{\alpha}[\varphi_k u] > \, dx \\
&\qquad \geq c[1-\omega(r)]\sum_{|\alpha|=m}\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega_r(x_k)} |D^{\alpha}[\varphi_k u]|^2 \, dx \qquad (2.30)\\
&\qquad \geq \frac{c}{2}\sum_{|\alpha|=m}\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega_r(x_k)} |D^{\alpha}[\varphi_k u]|^2 \, dx. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Sviluppiamo le derivate con la regola di Leibniz e eleviamo al quadrato; otteniamo che

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha}[\varphi_k u]|^2 &= \left|\varphi_k D^{\alpha}u + \sum_{0<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\gamma}\varphi_k D^{\alpha-\gamma}u\right|^2 \\
&= |\varphi_k D^{\alpha}u|^2 + 2 < \varphi_k D^{\alpha}u, \sum_{0<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\gamma}\varphi_k D^{\alpha-\gamma}u > \\
&\quad + \left|\sum_{0<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\gamma}\varphi_k D^{\alpha-\gamma}u\right|^2;
\end{aligned}$$

utilizziamo le disuguaglianze triangolare, di Hölder e di Cauchy-Schwartz e otteniamo

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{|\alpha|=m}\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega} 2 < \varphi_k D^{\alpha}u, \sum_{0<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\gamma}\varphi_k D^{\alpha-\gamma}u > \, dx\right| \\
&\leq 2\sum_{|\alpha|=m}\left(\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega}[\varphi_k |D^{\alpha}u|]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega}\left(\sum_{0<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}|D^{\gamma}\varphi_k|\left|D^{\alpha-\gamma}u\right|\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\sum_{|\alpha|=m}\left(\int_{\Omega}|D^{\alpha}u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=1}^{h}\int_{\Omega}\sum_{0<\gamma\leq\alpha}\left|D^{\alpha-\gamma}u\right|^2\left[\binom{\alpha}{\gamma}D^{\gamma}\varphi_k\right]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\sum_{|\alpha|=m}\left(\int_{\Omega}|D^{\alpha}u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{0<\gamma\leq\alpha}\int_{\Omega}\left|D^{\alpha-\gamma}u\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\,|u|_{m,2,\Omega}\,\|u\|_{m-1,2,\Omega}\,. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Osserviamo che l'immersione $H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow H_0^{m-1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è compatta e che possiamo considerare in $H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ la norma $|u|_{m,2,\Omega}$ come norma equivalente a quella di Sobolev (vedi 3.4.4). Allora possiamo utilizzare la stima di interpolazione di Lions (vedi 2.4.10) trovando che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $c(\varepsilon) > 0$ (dipendente esclusivamente da ε) tale che per ogni $u \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale che

$$\|u\|_{m-1,2,\Omega} \leq \varepsilon \, |u|_{m,2,\Omega} + c(\varepsilon) \, \|u\|_{0,2,\Omega} .$$

Fissiamo $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ (saranno scelti in seguito); applichiamo la disuguaglianza di Young pesata

$$ab \leq \frac{\varepsilon' a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon'} \quad \forall a, b \geq 0$$

e troviamo che

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^{h} \int_\Omega 2 < \varphi_k D^\alpha u, \sum_{0<\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\alpha-\gamma} u > \; dx \right| \\
&\qquad \leq c \, |u|_{m,2,\Omega} \, \|u\|_{m-1,2,\Omega} \\
&\qquad \leq c \left[\varepsilon \, |u|_{m,2,\Omega}^2 + c(\varepsilon) \, |u|_{m,2,\Omega} \, |u|_{0,2,\Omega} \right] \\
&\qquad \leq c \left[\left(\varepsilon + c(\varepsilon) \frac{\varepsilon'}{2} \right) |u|_{m,2,\Omega}^2 + \frac{c(\varepsilon)}{2\varepsilon'} \, |u|_{0,2,\Omega}^2 \right] .
\end{aligned}$$

Ricordando la stima (2.31), otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{k=1}^{h} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta[\varphi_k u], D^\alpha[\varphi_k u] > \; dx \\
&\quad \geq \frac{c}{2} \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^{h} \int_\Omega |D^\alpha[\varphi_k u]|^2 \; dx \\
&\quad = \frac{c}{2} \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^{h} \int_\Omega \left[|\varphi_k D^\alpha u|^2 + 2 < \varphi_k D^\alpha u, \sum_{0<\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\alpha-\gamma} u > \right] \; dx \\
&\qquad + \frac{c}{2} \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^{h} \int_\Omega \left| \sum_{0<\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\alpha-\gamma} u \right|^2 \; dx \\
&\quad \geq c \left[|u|_{m,2,\Omega}^2 - c \left[\left(\varepsilon + c(\varepsilon) \frac{\varepsilon'}{2} \right) |u|_{m,2,\Omega}^2 + \frac{c(\varepsilon)}{2\varepsilon'} \, |u|_{0,2,\Omega}^2 \right] \right] \\
&\quad = c \left[|u|_{m,2,\Omega}^2 \left(1 - c \cdot \varepsilon - c \cdot c(\varepsilon) \frac{\varepsilon'}{2} \right) - \frac{c \cdot c(\varepsilon)}{\varepsilon'} \, |u|_{0,2,\Omega}^2 \right] .
\end{aligned}$$

Possiamo scegliere $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ in modo che

$$1 - c \cdot \varepsilon - c \cdot c(\varepsilon) \frac{\varepsilon'}{2} > \frac{1}{2} .$$

Allora otteniamo che

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{k=1}^{h} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta[\varphi_k u], D^\alpha[\varphi_k u] > \; dx \geq c \left[|u|_{m,2,\Omega}^2 - |u|_{0,2,\Omega}^2 \right] . \tag{2.33}$$

Questo è sufficiente a stimare l'addendo (2.27).

Analizziamo il secondo addendo (vedi (2.28)). Poniamo

$$M := \max\{|A_{\alpha,\beta}(x)| \mid x \in \overline{\Omega},\ |\alpha| = |\beta| = m\}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{k=1}^{h} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} \sum_{0<\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\beta-\gamma} u, \sum_{0<\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\alpha-\gamma} u > \ dx \right| \\
&\quad \le M \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{k=1}^{h} \int_\Omega \left| \sum_{0<\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\beta-\gamma} u \right| \left| \sum_{0<\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k D^{\alpha-\gamma} u \right| \ dx \\
&\quad \le Mc \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_\Omega \left| \sum_{0<\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} D^{\beta-\gamma} u \right| \left| \sum_{0<\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma} u \right| \ dx \\
&\quad \le Mc \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=m} \left| \sum_{0<\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma} u \right| \right)^2 \ dx \\
&\quad \le cM \, \|u\|^2_{m-1,2,\Omega} \\
&\quad \le cM \left(\varepsilon \, |u|^2_{m,2,\Omega} + c(\varepsilon) \, |u|^2_{0,2,\Omega} \right).
\end{aligned}$$

Precisiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato ancora il teorema di interpolazione di Lions (vedi 2.4.10) con $\varepsilon > 0$ da scegliere in seguito. Consideriamo la disuguaglianza (2.33); abbiamo mostrato che la somma dei primi due addendi (vedi (2.27) e (2.28)) si stima dal basso con la quantità

$$c \left[|u|^2_{m,2,\Omega} - |u|^2_{0,2,\Omega} \right] - cM \left(\varepsilon \, |u|^2_{m,2,\Omega} + c(\varepsilon) \, |u|_{0,2,\Omega} \right)^2;$$

possiamo scegliere ε abbastanza piccolo in modo da assorbire la stima del secondo addendo in quella del primo, cioè in modo che la somma dei primi due addendi sia stimata dal basso con

$$c \left[|u|^2_{m,2,\Omega} - |u|^2_{0,2,\Omega} \right].$$

Ricordiamo che la costante c cambia da riga a riga, ma dipende solo da $\nu, m, A_{\alpha,\beta}, \Omega$ ed è strettamente positiva. Il terzo e il quarto addendo (vedi (2.29) e (2.33)) si stimano dal basso come in (2.32) e, pesando opportunamente i vari termini, si possono assorbire le costanti che servono per le stime dal basso in quelle presenti nella stima del primo addendo. In questo modo, si ottiene la tesi. □

Lemma 2.4.12. *Nel contesto del lemma 2.4.9, supponiamo che l'operatore*

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [A_{\alpha,\beta} D^\beta u]$$

soddisfi la condizione di Legendre-Hadamard (vedi 1.1.13) con costante $\nu > 0$, che i coefficienti $A_{\alpha,\beta}$ siano in $C^0(\overline{\Omega})$ se $|\alpha| = |\beta| = m$ e che tutti gli altri coefficienti siano in $L^\infty(\Omega)$. Allora esiste una costante $c(m, \nu, \Omega, A_{\alpha,\beta}) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni $u \in H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale la stima

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx \ge c \left[|u|^2_{m,2,\Omega} - |u|^2_{0,2,\Omega} \right]. \tag{2.34}$$

Dimostrazione. Data $u \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$, scriviamo

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} & \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx \\ &= \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx \\ &\quad + \sum_{|\alpha|<m,|\beta|\le m} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m,|\beta|<m} \int_\Omega < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > \ dx.\end{aligned}$$

Per stimare dal basso il primo addendo possiamo utilizzare il lemma 2.25; gli altri due addendi, invece, si trattano con le stesse tecniche presentate nel dettaglio nella dimostrazione del lemma 2.4.11 (vedi 2.32: sono presenti le derivate di ordine più basso derivate e l'assunzione che i coefficienti $A_{\alpha,\beta}$ siano soltanto limitati è sufficiente). □

Possiamo finalmente presentare un risultato di esistenza per sistemi a coefficienti continui.

Teorema 2.4.13. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $m \in \mathbb{N}^+$, $A_{\alpha,\beta}$ matrici $N \times N$ (eventualmente non costanti). Supponiamo che l'operatore*

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [A_{\alpha,\beta} D^\beta u]$$

soddisfi la condizione di Legendre-Hadamard (vedi 1.1.13) con costante $\nu > 0$, che i coefficienti $A_{\alpha,\beta}$ siano in $C^0(\overline{\Omega})$ se $|\alpha| = |\beta| = m$ e che tutti gli altri coefficienti siano in $L^\infty(\Omega)$. Sia $F \in H^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Sia $\gamma \ge 0$; consideriamo il problema

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [A_{\alpha,\beta} D^\beta u] + \gamma u = F. \tag{2.35}$$

Valgono le seguenti conclusioni:

- *se γ è abbastanza grande, allora esiste ed è unica la soluzione debole u del problema* (2.35)*;*
- *se la costante della disuguaglianza di Poincarè iterata (vedi 2.3.3) è abbastanza piccola, allora per ogni $\gamma \ge 0$ esiste è unica una soluzione debole u del problema* (2.35).

In ogni caso, se il problema ha soluzione, esiste una costante $c(m, \nu, A_{\alpha,\beta}, \Omega, \gamma) > 0$ (indipendente da u e da F) tale che

$$\|u\|_{m,2,\Omega} \le c \|F\|_{H^{-m}(\Omega,\mathbb{R}^N)}.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\gamma \ge 0$; consideriamo la forma bilineare su $H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N) \times H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definita da

$$\mathcal{A}(u, v) := \int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha v > + \gamma u v \right] \ dx.$$

Essendo tutti i coefficienti limitati in Ω, $\mathcal{A}$ è ben definita ed è limitata. Se riusciamo a provare che $\mathcal{A}$ è coerciva, allora otteniamo immediatamente la tesi applicando il lemma di Lax-Milgram (vedi 2.3.9) e procedendo come nella dimostrazione del teorema 2.4.8. Utilizzando la disuguaglianza (2.34), possiamo affermare che esiste una costante $c(m, \nu, \Omega, A_{\alpha,\beta}) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni $u \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale la stima

$$\int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > +\gamma u^2 \right] dx \geq c \left[|u|^2_{m,2,\Omega} - |u|^2_{0,2,\Omega} \right] + \gamma \, |u|^2_{0,2,\Omega}$$
$$= c\, |u|^2_{m,2,\Omega} + [\gamma - c]\, |u|^2_{0,2,\Omega}\,. \tag{2.36}$$

Se $\gamma > c$ (c è la costante data dal lemma 2.4.12), allora la forma bilineare $\mathcal{A}$ è coerciva e, come discusso in precedenza, otteniamo la tesi.

Supponiamo, invece, che $0 < \gamma < c$; applicando la disuguaglianza di Poincarè generalizzata (vedi 2.3.3), deduciamo che esiste una costante $c(\Omega, m, N) > 0$ tale che

$$\int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} < A_{\alpha,\beta} D^\beta u, D^\alpha u > +\gamma u^2 \right] dx \geq c\, |u|^2_{m,2,\Omega} + [\gamma - c]\, |u|^2_{0,2,\Omega}\,. \tag{2.37}$$
$$\geq [c + (\gamma - c) c(\Omega, m, N)]\, |u|^2_{m,2,\Omega}\,. \tag{2.38}$$

Se la costante della disuguaglianza di Poincarè iterata (vedi 2.3.3) è abbastanza piccola, allora per ogni $0 < \gamma$, la quantità

$$c + (\gamma - c) c(\Omega, n, N)$$

è strettamente positiva. Allora la forma bilineare $\mathcal{A}$ è coerciva e, come discusso in precedenza, otteniamo la tesi. $\square$

Nel teorema 2.4.13, l'ipotesi che la costante nella disuguaglianza di Poincarè iterata (vedi 2.3.3) sia piccola può essere rimossa. Non mostreremo come percorrere questa strada.

Capitolo 3

Regolarità negli spazi di Sobolev

In questo capitolo vogliamo studiare la regolarità delle soluzioni di problemi uniformemente ellittici del secondo ordine in forma variazionale negli spazi di Sobolev. Utilizzeremo il metodo dei rapporti incrementali (derivate discrete) introdotto da Nirenberg. Consideriamo il problema uniformemente ellittico

$$\sum_{i,j=1}^{n} -D_i[a_{i,j} D_j u] = f;$$

il metodo che illustreremo ci consentirà di dimostrare risultati di regolarità interna del tipo

$$f \in H^k_{\mathrm{loc}}, a_{i,j} \in C^{k+1} \Rightarrow u \in H^{k+2}_{\mathrm{loc}}$$

e implicazioni analoghe di regolarità fino al bordo, supponendo che l'aperto Ω sia regolare. Per la formulazione debole, u è soltanto una funzione in H^1; in certi casi, riusciamo a dimostrare che u ammette anche derivate di ordine superiore, dandone stime opportune.

Nel seguito Ω denoterà un aperto di $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Indicheremo con $\{e_1; \ldots; e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Dati $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $i \in \{1; \ldots; n\}$ poniamo

$$\Omega_h := \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > h\},$$

$$\Omega_{i,h} := \{x \in \Omega \mid x + he_i \in \Omega\}.$$

Osserviamo che Ω_h e $\Omega_{i,h}$ sono insiemi aperti (eventualmente vuoti, se h è troppo grande).

3.1 Le derivate discrete

Definizione 3.1.1 (Derivata discreta)**.** Siano dati una funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $i \in \{1; \ldots; n\}$. Si pone

$$\mathcal{T}_{i,h} u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}.$$

Se u è definita soltanto in Ω, la definizione è analoga, dopo aver esteso u a 0 fuori da Ω.

Enunciamo alcune semplici proprietà dei rapporti incrementali discreti. Siano dati $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $i \in \{1; \ldots; n\}$.

Lemma 3.1.2 (Regola di Leibniz)**.** *Siano* $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Vale che*

$$\mathcal{T}_{i,h}(uv)(x) = \mathcal{T}_{i,h}u(x)v(x + he_i) + u(x)\mathcal{T}_{i,h}v(x).$$

Dimostrazione. Vale che

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{i,h}(uv)(x) &= \frac{u(x + he_i)v(x + he_i) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{[u(x + he_i) - u(x)]v(x + he_i) + [v(x + he_i) - v(x)]u(x)}{h} \\
&= \mathcal{T}_{i,h}u(x)v(x + he_i) + u(x)\mathcal{T}_{i,h}v(x).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.3 (Integrazione per parti discreta)**.** *Date* $u \in L^p(\mathbb{R}^n), v \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$*, con* p, p' *esponenti coniugati, vale la formula di integrazione per parti discreta*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\mathcal{T}_{i,h}v \; dx = -\int_{\mathbb{R}^n} v\mathcal{T}_{i,-h}u \; dx.$$

Dimostrazione. Precisiamo che tutti i passaggi seguenti sono ben giustificati per le ipotesi di sommabilità su u e v. Vale che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u\mathcal{T}_{i,h}v \; dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\frac{v(x + he_i) - v(x)}{h} \; dx \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x + he_i) \; dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x) \; dx\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{\mathbb{R}^n} u(y - he_i)v(y) \; dy - \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x) \; dx\right] \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{[u(x - he_i) - u(x)]v(x)}{-h} \; dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} v\mathcal{T}_{i,-h}u \; dx.
\end{aligned}$$

Precisiamo che è fondamentale che il dominio di integrazione sia $\mathbb{R}^n$ perchè è invariante per traslazione. Infatti, abbiamo eseguito un cambio di variabile $y = x + he_i$ soltanto nel primo addendo. □

Lemma 3.1.4. *Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, con* $p \in [1, +\infty]$*, allora* $\mathcal{T}_{i,h}u \in W^{1,p}(\Omega_{i,h})$ *e in tale aperto vale la formula*

$$\nabla\mathcal{T}_{i,h}u = \mathcal{T}_{i,h}\nabla u.$$

Dimostrazione. Sia data $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_{i,h})$; notiamo che $\mathcal{T}_{i,h}\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e che l'operatore $\mathcal{T}_{i,h}$ commuta con le derivate classiche. Adottando la notazione vettoriale, troviamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{i,h}} \mathcal{T}_{i,h}u(x)\nabla\varphi(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{T}_{i,h}u(x)\nabla\varphi(x)\ dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\mathcal{T}_{i,-h}\nabla\varphi(x)\ dx \\
&= -\int_{\Omega} u(x)\nabla\mathcal{T}_{i,-h}\varphi(x)\ dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla u(x)\mathcal{T}_{i,-h}\varphi(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x)\mathcal{T}_{i,-h}\varphi(x)\ dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{T}_{i,h}\nabla u(x)\varphi(x)\ dx \\
&= -\int_{\Omega_{i,h}} \mathcal{T}_{i,h}\nabla u(x)\varphi(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Precisiamo che abbiamo applicato due volte la formula di integrazione per parti discreta (vedi 3.1.3) che vale in $\mathbb{R}^n$ (possiamo cambiare il dominio di integrazione a seconda delle necessità) e il fatto che $\mathcal{T}_{i,h}\varphi$ è una funzione test ammissibile per u. □

Possiamo caratterizzare le funzioni di Sobolev in termini di derivate discrete.

Lemma 3.1.5. *Siano $p \in [1, +\infty)$, $\sigma > 0$ e $t \in (0, 1)$. Supponiamo che $|h| \leq (1-t)\sigma$. Allora per ogni $u \in W^{1,p}(B_\sigma)$ vale la stima*

$$\|\mathcal{T}_{i,h}u\|_{L^p(B_{t\sigma})} \leq \|D_i u\|_{L^p(B_\sigma)}\,. \tag{3.1}$$

La disuguaglianza (3.1) *vale anche se $p = +\infty$ e u è una funzione di classe $C^1(\overline{B_\sigma})$.*

Dimostrazione. Notiamo che $B_{t\sigma} \subseteq (B_\sigma)_{i,h}$ per la scelta di h. Possiamo supporre che u sia anche di classe $C^\infty(B_\sigma)$. Infatti, è immediato osservare che l'operatore $\mathcal{T}_{i,h}$ è lineare e continuo; quindi, se mostriamo che la stima (3.1) vale per le funzioni regolari, allora vale per tutte le funzioni in $W^{1,p}(B_\sigma)$. Per ogni $x \in B_{t\sigma}$ vale che

$$\mathcal{T}_{i,h}u(x) = \frac{1}{h}\int_0^1 \left(\frac{d}{ds}u(x + she_i)\right)\ ds = \int_0^1 D_i u(x + she_i)\ ds. \tag{3.2}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Hölder e scambiando gli integrali, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{B_{t\sigma}} |\mathcal{T}_{i,h}u(x)|^p \, dx &= \int_{B_{t\sigma}} \left| \int_0^1 D_i u(x + she_i) \, ds \right|^p \, dx \\
&\leq \int_{B_{t\sigma}} \int_0^1 |D_i u(x + she_i)|^p \, ds \, dx \\
&= \int_0^1 \int_{B_{t\sigma}} |D_i u(x + she_i)|^p \, dx \, ds \\
&= \int_0^1 \int_{B_{t\sigma}(she_i)} |D_i u(y)|^p \, dx \, ds \\
&\leq \int_0^1 \int_{B_\sigma} |D_i u(y)|^p \, dx \, ds \\
&= \int_{B_\sigma} |D_i u(y)|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Precisiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che per ogni $s \in (0,1)$ vale che

$$B_{t\sigma}(she_i) \subseteq B_\sigma.$$

Se $p = +\infty$ e $u \in C^1(\overline{B_\sigma})$ si procede in modo analogo (basta la stima (3.2)). □

Lemma 3.1.6. *Siano $p \in (1, +\infty]$, $\sigma > 0$ e $u \in L^p(B_\sigma)$. Supponiamo che esista $M > 0$ tale che per ogni $t \in (0,1)$ per ogni $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $|h| \leq (1-t)\sigma$ vale*

$$\|\mathcal{T}_{i,h}u\|_{L^p(B_{t\sigma})} \leq M.$$

Allora u ammette derivata debole i-esima in $L^p(B_\sigma)$ e vale la stima

$$\|D_i u\|_{L^p(B_\sigma)} \leq M. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Fissiamo $t \in (0,1)$. Per ipotesi, la successione $(\mathcal{T}_{i,h})_h$ è limitata in $L^p(B_{t\sigma})$. Essendo $p \in (1, +\infty]$ esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $v_{i,t}$ in $L^p(B_{t\sigma})$ a cui $(\mathcal{T}_{i,h}u)_h$ converge debolmente in $L^p(B_{t\sigma})$ (o debole* se $p = +\infty$) per $h \to 0$. In particolare, per ogni funzione test $\varphi \in C_c^\infty(B_{t\sigma})$ vale che

$$\lim_{h \to 0} \int_{B_{t\sigma}} \mathcal{T}_{i,h}u(x)\varphi(x) \, dx = \int_{B_{t\sigma}} v_{i,t}(x)\varphi(x) \, dx.$$

Per la formula di integrazione per parti discreta (vedi 3.1.3), vale che

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \int_{B_{t\sigma}} \mathcal{T}_{i,h}u(x)\varphi(x) \, dx &= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{T}_{i,h}u(x)\varphi(x) \, dx \\
&= -\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\mathcal{T}_{i,-h}\varphi(x) \, dx \\
&= -\lim_{h \to 0} \int_{B_\sigma} u(x)\mathcal{T}_{i,-h}\varphi(x) \, dx \\
&= -\int_{B_\sigma} u(x) D_i\varphi(x) \, dx \\
&= -\int_{B_{t\sigma}} u(x) D_i\varphi(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Nella penultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che per le funzioni C^∞ i rapporti incrementali convergono uniformemente alle derivate classiche. Deduciamo che $v_{i,t}$ è la derivata debole i-esima di u in $B_{t\sigma}$. Per la precisione, per l'unicità della derivata debole, abbiamo mostrato che tutta la successione $(\mathcal{T}_{i,h}u)_h$ converge debolmente in $L^p(B_{t\sigma})$ a $v_{i,t}$ (infatti ogni sottosuccessione ammette una ulteriore sottosuccessione per cui vale questo risultato). Dalla convergenza debole, segue anche che

$$\|v_{i,t}\|_{L^p(B_{t\sigma})} \leq \liminf_{h\to 0} \|\mathcal{T}_{i,h}u\|_{L^p(B_{t\sigma})} \leq M.$$

Per l'unicità della derivata debole, se $t_1 \leq t_2$, deduciamo che $v_{i,t_1}(x) = v_{i,t_2}(x)$ quasi ovunque in $B_{t_1\sigma}$. Allora possiamo ben definire una funzione v_i in B_σ in modo che coincida con $v_{i,t}$ in $B_{t\sigma}$ per ogni $t \in (0,1)$. Per il teorema di Beppo Levi (se $p < +\infty$, altrimenti è ovvio) vale che

$$\|v_i\|_{L^p(B_\sigma)} \leq M.$$

Deduciamo immediatamente che v_i è la derivata debole i-esima di u in B_σ; infatti, per ogni $t \in (0,1)$ la funzione v_i è la derivata debole i-esima di u in $B_{t\sigma}$. □

3.2 Regolarità interna L^2

Per iniziare studiamo la regolarità interna delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a_{i,j}D_j u] = -f. \tag{3.4}$$

Teorema 3.2.1. *Sia $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ soluzione debole del problema (3.4). Supponiamo che $A = (a_{i,j})$ sia una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante ν (vedi 1.1.9), che i coefficienti $a_{i,j}$ siano in $C^1(\Omega)$ e che $f \in L^2_{loc}(\Omega)$. Per ogni coppia di aperti Ω', Ω'' tali che $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ vale che $u \in H^2(\Omega')$ ed esiste una costante $c(n, a_{i,j}, \nu, \Omega', \Omega'') > 0$ (indipendente da u e da f) tale che*

$$|u|_{2,2,\Omega'} \leq c\left[\|f\|_{0,2,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}\right].$$

Dimostrazione. Fissiamo $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$. Per semplicità, denotiamo con $c > 0$ una generica costante che dipende soltanto da $n, \Omega', \Omega'', \nu, a_{i,j}$ (indipendente da u e da f) che può cambiare da linea a linea. Se mostriamo la tesi assumendo che Ω' e Ω'' siano palle concentriche, deduciamo che vale per ogni coppia di aperti $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$. In altri termini, possiamo supporre che $\Omega' = B_\sigma(x_0)$ e $\Omega'' = B_{\sigma+\delta}(x_0)$, per opportuni $\sigma, \delta > 0$. A meno di effettuare una traslazione, possiamo assumere che $x_0 = 0$. Per semplicità di notazione, poniamo

$$A' := B_{\sigma+\delta/3}, \quad A'' := B_{\sigma+2\delta/3}.$$

Per riassumere, abbiamo che

$$\Omega' \Subset A' \Subset A'' \Subset \Omega'' \Subset \Omega.$$

Sia $\theta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n, [0,1])$ una funzione cut-off tale che

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega', \\ 0 & x \in (A')^c. \end{cases}$$

Per ipotesi, sappiamo che per ogni funzione test $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j u D_i \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Data $\psi \in H^1(\Omega)$, osserviamo che $\varphi = \theta\psi$ è una funzione test ammissibile (infatti appartiene a $H_0^1(\Omega)$). Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\theta\psi \, dx &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j u D_i(\theta\psi) \, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j u (D_i\theta)\psi \, dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j u (D_i\psi)\theta \, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j u (D_i\theta)\psi \, dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j (u\theta)(D_i\psi) \, dx \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j \theta (D_i\psi) u \, dx.
\end{aligned}$$

Per semplicità di notazione poniamo

$$F(x) \coloneqq f(x)\theta(x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i\theta(x), \quad \mathcal{U}(x) \coloneqq \theta(x)u(x). \tag{3.5}$$

Possiamo equivalentemente scrivere che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j \mathcal{U} D_i\psi \, dx = \int_\Omega F\psi \, dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j\theta (D_i\psi) u \, dx \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Fissiamo $r \in \{1; \ldots; n\}$; data $\psi \in H_0^1(A'')$, possiamo estenderla a 0 fuori da A'' e otteniamo ancora una funzione in $H_0^1(\mathbb{R}^n)$. Dato $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $|h| < \delta/3$, notiamo che $\mathcal{T}_{r,h}\psi \in H_0^1(\Omega'')$ per la scelta di h; possiamo utilizzarla come funzione test in (3.6) e otteniamo che per ogni $\psi \in H_0^1(A'')$ per ogni $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $|h| < \delta/3$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j \mathcal{U} D_i[\mathcal{T}_{r,h}\psi] \, dx = \int_\Omega F[\mathcal{T}_{r,h}\psi] \, dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_j\theta (D_i[\mathcal{T}_{r,h}\psi]) u \, dx. \tag{3.7}$$

Osserviamo anche che per costruzione tutti gli integrali sono su Ω''; notiamo che se $|h| < \delta/3$, allora $A'' + h \subseteq \Omega''$. Applicando la formula di Leibniz (vedi 3.1.2) otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} \mathcal{T}_{r,h}(a_{i,j} D_j \mathcal{U}) D_i\psi \, dx &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} a_{i,j}(x + he_r) \mathcal{T}_{r,h}(D_j\mathcal{U})(x) D_i\psi(x) \, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} \mathcal{T}_{r,h} a_{i,j}(x) D_j \mathcal{U}(x) D_i\psi(x) \, dx.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Deduciamo che

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} a_{i,j}(x+he_r)\mathcal{T}_{r,h}(D_j\mathcal{U})(x)D_i\psi(x)\;dx \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} \mathcal{T}_{r,h}(a_{i,j}D_j\mathcal{U})D_i\psi\;dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} \mathcal{T}_{r,h}a_{i,j}(x)D_j\mathcal{U}(x)D_i\psi(x)\;dx && (3.9)\\
&\quad = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''} a_{i,j}D_j\mathcal{U}\mathcal{T}_{r,-h}(D_i\psi)\;dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} \mathcal{T}_{r,h}a_{i,j}(x)D_j\mathcal{U}(x)D_i\psi(x)\;dx && (3.10)\\
&\quad = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''} a_{i,j}D_j\mathcal{U}D_i(\mathcal{T}_{r,-h}\psi)\;dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} \mathcal{T}_{r,h}a_{i,j}(x)D_j\mathcal{U}(x)D_i\psi(x)\;dx && (3.11)\\
&\quad = -\int_{A''} F\mathcal{T}_{r,-h}\psi\;dx \\
&\qquad\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} a_{i,j}D_j\theta D_i(\mathcal{T}_{r,-h}\psi)u\;dx \\
&\qquad\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A''} \mathcal{T}_{r,h}a_{i,j}D_j\mathcal{U}D_i\psi\;dx. && (3.12)
\end{aligned}
$$

In (3.9) abbiamo usato la formula di integrazione per parti discreta (vedi 3.1.3): scriviamo il primo addendo come integrale su tutto $\mathbb{R}^n$ (estendendo a 0 i coefficienti fuori da Ω), poi applichiamo la formula di integrazione per parti discreta e infine notiamo che l'integrale risultante è su Ω''; in (3.10) abbiamo usato le proprietà della derivata discreta (vedi 3.1.4); in (3.11) abbiamo usato la formula (3.7). Nelle formule finali, precisiamo che è possibile cambiare il dominio di integrazione perchè θ è nulla fuori da A'' (in realtà, θ è nulla fuori da A'). Stimiamo separatamente ciascun addendo. Utilizzando il lemma 3.1.5 e ricordando la definizione di F e di $\mathcal{U}$, deduciamo le stime seguenti:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{A''} F\mathcal{T}_{r,-h}\psi\;dx\right| &\le \|F\|_{0,2,A''}\,\|\mathcal{T}_{r,-h}\psi\|_{0,2,A''} \\
&\le c\,\|F\|_{0,2,A''}\,\|\nabla\psi\|_{0,2,\Omega''} \\
&\le c\left[\|f\theta\|_{0,2,A''} + \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{i,j}D_juD_i\theta\|_{0,2,A''}\right]\|\nabla\psi\|_{0,2,\Omega''} \\
&\le c\left[\|f\|_{0,2,A''} + \|\nabla u\|_{0,2,A''}\right]\|\nabla\psi\|_{0,2,A''}\,; && (3.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{A''} a_{i,j}D_j\theta(D_i\mathcal{T}_{r,-h}\psi)u\;dx\right| \\
&\qquad \le \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{i,j}\|_{0,\infty,A''}\,\|D_j\theta\|_{0,\infty,A''}\,\|D_i(\mathcal{T}_{r,-h}\psi)\|_{0,2,A''}\,\|u\|_{0,2,A''} \\
&\qquad \le c\sum_{i=1}^{n}\|D_i(\mathcal{T}_{r,-h}\psi)\|_{0,2,A''}\,\|u\|_{0,2,\Omega''} \\
&\qquad \le c\,\|\nabla\psi\|_{0,2,\Omega''}\,\|u\|_{0,2,\Omega''} \\
&\qquad = c\,\|\nabla\psi\|_{0,2,A''}\,\|u\|_{0,2,\Omega''}\,; && (3.14)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{A''}\mathcal{T}_{r,h}a_{i,j}D_j\mathcal{U}D_i\psi\ dx\right| &\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left\|\mathcal{T}_{r,h}a_{i,j}\right\|_{0,\infty,A''}\left\|D_j\mathcal{U}\right\|_{0,2,A''}\left\|D_i\psi\right\|_{0,2,A''}\\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left\|D_r a_{i,j}\right\|_{0,\infty,\Omega''}\left\|D_j\mathcal{U}\right\|_{0,2,A''}\left\|D_i\psi\right\|_{0,2,A''}\\ &\leq c\left\|u\right\|_{1,2,A''}\left\|\nabla\psi\right\|_{0,2,A''}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Mettendo insieme le stime (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15), otteniamo che per ogni $\psi \in H_0^1(A'')$ per ogni $h \neq 0$ tale che $|h| < \delta/3$ vale che

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{A''}a_{i,j}(x+he_r)\mathcal{T}_{r,h}(D_j\mathcal{U})(x)D_i\psi(x)\ dx\right| \leq c\left[\left\|f\right\|_{0,2,\Omega''}+\left\|u\right\|_{1,2,\Omega''}\right]\left\|\nabla\psi\right\|_{0,2,A''}. \tag{3.16}$$

Preso $h \neq 0$ tale che $|h| < \delta/3$, possiamo scegliere $\mathcal{T}_{r,h}\mathcal{U}$ (che appartiene a $H_0^1(A'')$ per la scelta di h) come funzione test in (3.16). Ricordando i lemmi 3.1.4 e 3.1.5, otteniamo la stima

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{A''}a_{i,j}(x+he_r)\mathcal{T}_{r,h}(D_j\mathcal{U})(x)\mathcal{T}_{r,h}(D_i\mathcal{U})(x)\ dx\right|\\ &\qquad\leq c\left[\left\|f\right\|_{0,2,\Omega''}+\left\|u\right\|_{1,2,\Omega''}\right]\left\|\nabla\mathcal{T}_{r,h}\mathcal{U}\right\|_{0,2,A''}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dall'ipotesi di ellitticità uniforme dice che

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{A''}a_{i,j}(x+he_r)\mathcal{T}_{r,h}(D_j\mathcal{U})(x)\mathcal{T}_{r,h}(D_i\mathcal{U})(x)\ dx\right|\\ &\qquad\geq \sum_{i=1}^{n}\int_{A''}\nu[\mathcal{T}_{r,h}(D_i\mathcal{U})]^2\ dx\\ &\qquad= \nu\left\|\mathcal{T}_{r,h}\nabla\mathcal{U}\right\|_{0,2,A''}^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dalle stime (3.17) e (3.18) deduciamo che se $|h| < \delta/3$ vale che

$$\left\|\mathcal{T}_{r,h}\nabla\mathcal{U}\right\|_{0,2,A''} \leq c\left[\left\|f\right\|_{0,2,\Omega''}+\left\|u\right\|_{1,2,\Omega''}\right]. \tag{3.19}$$

Per il lemma 3.1.6 deduciamo che $\nabla\mathcal{U}$ ammette derivata debole di ordine r in A'' e che vale la stima

$$\left\|D_r\nabla\mathcal{U}\right\|_{0,2,A''} \leq c\left[\left\|f\right\|_{0,2,\Omega''}+\left\|u\right\|_{1,2,\Omega''}\right]. \tag{3.20}$$

Ricordando che $\mathcal{U}$ coincide con u in Ω', deduciamo che $u \in H^2(\Omega')$ e che per ogni $r \in \{1;\ldots;n\}$ vale la stima

$$\left\|D_r\nabla u\right\|_{0,2,\Omega'} \leq c\left[\left\|f\right\|_{0,2,\Omega''}+\left\|u\right\|_{1,2,\Omega''}\right]. \tag{3.21}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Dal teorema appena mostrato seguono immediatamente risultati analoghi di regolarità interna (eventualmente iterata) delle soluzioni dell'equazione completa

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a_{i,j}D_j u] + \sum_{i=1}^{n} a_i D_i u + au = f. \tag{3.22}$$

Corollario 3.2.2. *Sia $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ soluzione debole del problema* (3.22). *Supponiamo che $A = (a_{i,j})$ sia una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante ν (vedi 1.1.9), che i coefficienti $a_{i,j}$ siano in $C^1(\Omega)$, che $a, a_i \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ e che $f \in L^2_{loc}(\Omega)$. Per ogni coppia di aperti Ω', Ω'' tali che $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ vale che $u \in H^2(\Omega')$ ed esiste una costante $c(n, a_{i,j}, a_i, a, \nu, \Omega', \Omega'') > 0$ (indipendente da u e da f) tale che*

$$|u|_{2,2,\Omega'} \le c\left[\|f\|_{0,2,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}\right].$$

Dimostrazione. Se poniamo

$$F(x) := -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_i u(x) - a(x)u(x) + f(x),$$

è immediato notare che $F \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e che $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è soluzione in senso debole del problema omogeneo

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a_{i,j}D_j u] = F.$$

Dal teorema 3.2.1 che segue $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e che per ogni $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ esiste una costante c indipendente da u e da F tale che

$$|u|_{2,2,\Omega'} \le c\left[\|F\|_{0,2,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}\right].$$

La tesi segue immediatamente osservando che

$$\|F\|_{0,2,\Omega''} \le c\left[\|f\|_{0,2,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}\right]$$

per una costante c opportuna dipendente soltanto da Ω'', a_i, a. □

Corollario 3.2.3. *Sia $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ soluzione debole del problema* (3.22). *Sia $k \in \mathbb{N}$; supponiamo che $A = (a_{i,j})$ sia una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante ν (vedi 1.1.9), che i coefficienti $a_{i,j}$ siano in $C^{k+1}(\Omega)$, che $a, a_i \in C^k(\Omega)$ e che $f \in H^k_{loc}(\Omega)$. Per ogni coppia di aperti Ω', Ω'' tali che $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ vale che $u \in H^{k+2}(\Omega')$ ed esiste una costante $c(n, k, a_{i,j}, a_i, a, \nu, \Omega', \Omega'') > 0$ (indipendente da u e da f) tale che*

$$|u|_{k+2,2,\Omega'} \le c\left[\|f\|_{k,2,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}\right].$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su k. Se $k = 0$, siamo nelle ipotesi del corollario 3.2.2, che abbiamo già dimostrato. Supponiamo che la tesi sia vera per l'ordine di derivazione $k-1$ e mostriamo che vale per l'ordine di derivazione k. Per ipotesi induttiva, vale che $u \in H^{k+1}_{\text{loc}}(\Omega)$ e per ogni coppia di aperti $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ per ogni $r \in \{0; \dots; k-1\}$ vale la stima

$$|u|_{r+2,2,\Omega'} \le c\left[\|f\|_{r,2,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}\right]; \tag{3.23}$$

deduciamo che

$$\|u\|_{k+1,2,\Omega'} \leq c\left[\|f\|_{k,2,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}\right] \tag{3.24}$$

per una opportuna costante c indipendente da u e da f. Sia $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice tale che $|\alpha| = k$. Vogliamo capire quale sia l'equazione risolta da $D^\alpha u$ (notiamo innanzitutto che appartiene ad $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$). Sia $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ una funzione test; valgono le seguenti uguaglianze

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j} D_j(D^\alpha u) D_i\varphi\ dx = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j} D^\alpha(D_j u) D_i\varphi\ dx \tag{3.25}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega D^\alpha[a_{i,j} D_j u] D_i\varphi\ dx - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} [D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta} D_j u] D_i\varphi\ dx \tag{3.26}$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j} D_j u D^\alpha(D_i\varphi)\ dx \tag{3.27}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta} D_j u]\varphi\ dx \tag{3.28}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta} D_j u]\varphi\ dx - (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i D_i u D^\alpha\varphi\ dx$$
$$- (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega a u D^\alpha\varphi\ dx + (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha\varphi\ dx \tag{3.29}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta} D_j u]\varphi\ dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega D^\alpha[a_i D_i u]\varphi\ dx$$
$$- \int_\Omega D^\alpha[au]\varphi\ dx + \int_\Omega [D^\alpha f]\varphi\ dx$$

In (3.25) abbiamo usato la formula di Leibniz per espandere la derivata debole di ordine α; in (3.26) abbiamo integrato per parti (le ipotesi fatte lo consentono); in (3.28) abbiamo usato il fatto che u risolve il problema (3.22); in (3.29) abbiamo nuovamente integrato per parti. Se poniamo

$$F := -\sum_{i,j=1}^n \sum_{\beta\leq\alpha,\ \beta\neq 0} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta} D_j u] + \sum_{i=1}^n D^\alpha[a_i D_i u] + D^\alpha[au] - D^\alpha f,$$

notiamo che per ogni coppia di aperti $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ vale che

$$\|F\|_{0,2,\Omega'} \leq c\left[\|u\|_{k+1,2,\Omega'} + \|f\|_{k,2,\Omega'}\right] \leq c\left[\|u\|_{1,2,\Omega''} + \|f\|_{k,2,\Omega''}\right] \tag{3.30}$$

per la disuguaglianza (3.24), con una costante opportuna $c > 0$ indipendente da u e da f. Osserviamo anche che $D^\alpha u$ è soluzione debole in $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j} D_j w] = -F.$$

Siano $\Omega' \Subset \tilde{\Omega} \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ aperti; per il teorema (3.2.1) vale che $D^\alpha u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e vale che

$$|D^\alpha u|_{2,2,\Omega'} \leq c\left[\|D^\alpha u\|_{1,2,\tilde{\Omega}} + \|F\|_{1,2,\tilde{\Omega}}\right] \leq c\left[\|u\|_{1,2,\Omega''} + \|f\|_{k,2,\Omega''}\right], \tag{3.31}$$

dove abbiamo usato le disuguaglianze (3.30) e (3.24). □

Segue immediatamente un semplice corollario, in cui riassumiamo i risultati (sorprendenti) ottenuti

Corollario 3.2.4. *Sia $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ soluzione debole del problema* (3.22)*. Supponiamo che $A = (a_{i,j})$ sia una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante ν (vedi 1.1.9), che i coefficienti $a_{i,j}$ siano in $C^\infty(\Omega)$, che $a, a_i \in C^\infty(\Omega)$ e che $f \in C^\infty(\Omega)$. Allora u è di classe $C^\infty(\Omega)$.*

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dall'applicazione iterata del corollario 3.2.3 e dai teoremi di immersione di Sobolev (una funzione in $H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni k è di classe $C^\infty(\Omega)$). □

3.3 Regolarità L^2 fino al bordo

Possiamo studiare la regolarità fino al bordo delle soluzioni dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n} -D_i[a_{i,j} D_j u] = f. \tag{3.32}$$

In questo contesto, le condizioni al bordo sono codificate in termini di traccia di funzioni di Sobolev.

Per semplicità di notazione, fissato $r > 0$, poniamo

$$B_r^+ := \{x \in B_r \mid x_n > 0\}, \quad \Gamma_r := \{x \in B_r \mid x_n = 0\}.$$

Denotiamo con $H^1_{\Gamma_r}(B_r^+)$ l'insieme delle funzioni in $H^1(B_r^+)$ aventi traccia sulla su Γ_r; in altri termini, $H^1_{\Gamma_r}(B_r^+)$ è la chiusura nella norma di $H^1(B_r^+)$ delle funzioni di classe $C^\infty(\overline{B_r^+})$ che si annullano in un intorno di Γ_r.

Teorema 3.3.1. *Sia $u \in H^1(B_r^+)$ soluzione debole dell'equazione* (3.32)*; assumiamo che $u \in H^1_{\Gamma_r}(B_r^+)$. Supponiamo che $A = (a_{i,j})$ sia uniformemente ellittica in B_r^+ con costante ν (vedi 1.1.9), che i coefficienti $a_{i,j}$ siano in $C^1(\overline{B_r^+})$ e che $f \in L^2(B_r^+)$. Per ogni $\rho \in (0, r)$ si ha che $u \in H^2(B_\rho^+)$ ed esiste una costante $c(\nu, n, \rho, r, a_{i,j}) > 0$ (indipendente da u e da f) tale che*

$$|u|_{2,2,B_\rho^+} \leq c \left[\|f\|_{0,2,B_r^+} + \|u\|_{1,2,B_r^+} \right].$$

Dimostrazione. Per semplicità, denotiamo con $c > 0$ una generica costante dipendente da $a_{i,j}, n, \rho, r, \nu$ (indipendente da u e da f) che può cambiare da linea a linea.

Sapendo che u è soluzione debole del problema (3.32), possiamo scrivere che per ogni funzione test $\varphi \in H^1_0(B_r^+)$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_r^+} a_{i,j} D_j u D_i \varphi \, dx = \int_{B_r^+} f \varphi \, dx \tag{3.33}$$

Fissiamo $\rho \in (0, r)$; sia $\delta := (r - \rho)/3$. Sia $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ una funzione cut-off con le proprietà che

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_\rho \\ 0 & x \in (B_{\rho+\delta})^c \end{cases}$$

Si noti che non richiediamo che θ si annulli in un intorno di Γ_r. Data $\psi \in H^1_{\Gamma_r}(B_r)^+$, notiamo che $\varphi = \psi\theta$ appartiene a $H^1_0(B_r^+)$, quindi è una funzione test ammissibile in (3.33). Come nella dimostrazione del teorema (3.2.1), poniamo

$$F \coloneqq f\theta - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i_j} D_j u D_i \theta, \quad \mathcal{U} \coloneqq \theta u$$

e argomentando in maniera del tutto analoga troviamo che per ogni funzione test $\psi \in H^1_{\Gamma_r}(B_r^+)$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_r^+} a_{i,j} D_j \mathcal{U} D_i \psi \; dx = \int_{B_r^+} F\psi \; dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_r^+} a_{i,j} D_j \theta (D_i \psi) u \; dx. \tag{3.34}$$

In particolare, la relazione (3.34) vale per tutte le funzioni test $\psi \in H^1_{\Gamma_r}(B_r^+)$ che si annullano fuori da $B^c_{r+2\delta}$. Fissato un intero $r \in \{1; \dots; n-1\}$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $|h| < \delta$, notiamo che $\mathcal{T}_{r,h}\mathcal{U}$ è una funzione test ammissibile in (3.33) perchè appartiene ad $H^1_{\Gamma_r}(B_r^+)$ e si annulla fuori da $B^+_{r+2\delta}$; procedendo in maniera totalmente analoga al teorema precedente (vedi (3.19), (3.20) e (3.21)), troviamo che per ogni $r \in \{1; \dots; n-1\}$ vale che $D_r \nabla \mathcal{U}$ esiste in $B^+_{\rho+\delta}$ e vale

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n-1} \int_{B^+_{\rho+\delta}} |D_{ri}\mathcal{U}|^2 \; dx \leq c \left[\|f\|^2_{0,2,B_r^+} + \|u\|^2_{1,2,B_r^+} \right]. \tag{3.35}$$

Le stesse conclusioni valgono per u in B_ρ^+ ricordando che $\mathcal{U} \equiv u$ in B_ρ^+; vale una stima analoga.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n-1} \int_{B^+_{\rho+\delta}} |D_{ri}u|^2 \; dx \leq c \left[\|f\|^2_{0,2,B_r^+} + \|u\|^2_{1,2,B_r^+} \right]. \tag{3.36}$$

Dobbiamo soltanto mostrare che esiste la derivata $D_{nn}u$ e che può essere stimata in maniera opportuna (per la quale non possiamo utilizzare il metodo dei rapporti incrementali). Avendo mostrato l'esistenza di quasi tutte le derivate del secondo ordine, possiamo integrare per parti molti termini nell'equazione (3.34); otteniamo che per ogni $\psi \in H^1_0(B_\rho^+)$ vale che

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho^+} a_{nn} D_n \mathcal{U} D_n \psi \; dx &= -\sum_{i,j<n^2} \int_{B_\rho^+} a_{i,j} D_j \mathcal{U} D_i \psi \; dx + \int_{B_\rho^+} F\psi \; dx \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_\rho^+} a_{i,j} D_j \theta (D_i \psi) u \; dx \\
&= \sum_{i,j<n^2} \int_{B_\rho^+} D_i[a_{i,j} \mathcal{D}_j \mathcal{U}] \psi \; dx + \int_{B_\rho^+} F\psi \; dx \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_\rho^+} D_i[a_{i,j}(D_j\theta)u] \psi \; dx.
\end{aligned}$$

Se poniamo

$$H \coloneqq \sum_{i,j<n^2} D_i[a_{i,j} D_j \mathcal{U}] + F - \sum_{i,j=1}^{n} D_i[a_{i,j}(D_j\theta)u],$$

troviamo che per ogni $\psi \in H^1_0(B^+_\rho)$ vale la formula

$$\int_{B^+_\rho} a_{nn} D_n \mathcal{U} D_n \psi \; dx = \int_{B^+_\rho} H \psi \; dx. \tag{3.37}$$

Notiamo che H ha supporto in $B_{\rho+\delta}$; inoltre, dalla stima (3.35) segue che

$$\|H\|_{0,2,B^+_{\rho+\delta}} \leq c \left[\|f\|_{0,2,B^+_r} + \|u\|_{1,2,B^+_r} \right]. \tag{3.38}$$

Dall'ipotesi di uniforme ellitticità (vedi 1.1.9) segue che la $a_{nn}(x) \geq \nu > 0$ per ogni $x \in B^+_r$. Sia $\xi \in H^1_0(B^+_\rho)$; scegliamo come funzione test in (3.37) la funzione $\psi = \xi / a_{nn}$, che appartiene ad $H^1_0(B^+_\rho)$:

$$\int_{B^+_\rho} \frac{H}{a_{nn}} \xi \; dx = \int_{B^+_\rho} a_{nn} D_n \mathcal{U} D_n \left(\frac{\xi}{a_{nn}} \right) \; dx = \int_{B^+_\rho} D_n \mathcal{U} \left[D_n \xi - \frac{\xi D_n a_{nn}}{a_{nn}} \right] \; dx;$$

deduciamo che per ogni funzione test $\xi \in H^1_0(B_{\rho^+})$ vale che

$$\int_{B^+_\rho} D_n \mathcal{U} D_n \xi \; dx = \int_{B^+_\rho} \xi \left[\frac{H + D_n \mathcal{U} D_n a_{nn}}{a_{nn}} \right] \; dx = \int_{B^+_\rho} \xi G \; dx, \tag{3.39}$$

avendo posto

$$G := \frac{H + D_n \mathcal{U} D_n a_{nn}}{a_{nn}}.$$

Notiamo che G ha supporto $B^+_{\rho+\delta}$; in ogni caso, vale che

$$\|G\|_{0,2,B^+_\rho} \leq c \left[\|f\|_{0,2,B^+_r} + \|u\|_{1,2,B^+_r} \right]. \tag{3.40}$$

Dall'equazione (3.39) deduciamo $D_n \mathcal{U}$ ammette derivata debole di ordine n e che $D_{nn} \mathcal{U} = -G$; dalla relazione (3.40) segue che $D_{nn} \mathcal{U}$ è in $L^2(B_\rho)$ e si stima come richiesto. Infine osserviamo che in B^+_ρ si ha $\mathcal{U} \equiv u$. Questo conclude la dimostrazione. □

A questo punto possiamo mostrare un risultato di regolarità iterata fino al bordo, procedendo per induzione sull'ordine di derivazione (in maniera tutt'altro che ovvia).

Teorema 3.3.2. *Sia $u \in H^1(B^+_r)$ soluzione debole dell'equazione* (3.32)*; assumiamo che $u \in H^1_{\Gamma_r}(B^+_r)$. Sia $k \in \mathbb{N}$ fissato. Supponiamo che $A = (a_{i,j})$ sia uniformemente ellittica in B^+_r con costante ν (vedi 1.1.9), che i coefficienti $a_{i,j}$ siano in $C^{k+1}(\overline{B^+_r})$ e che $f \in H^k(B^+_r)$. Se $u \in H^{k+1}(B^+_r)$, allora per ogni $\rho \in (0, r)$ si ha che $u \in H^{k+2}(B^+_\rho)$ ed esiste una costante $c(\nu, n, k, \rho, r, a_{i,j}) > 0$ (indipendente da u e da f) tale che*

$$|u|_{k+2,2,B^+_\rho} \leq c \left[\|f\|_{k,2,B^+_r} + \|u\|_{k+1,2,B^+_r} \right].$$

Dimostrazione. Per semplicità, denotiamo con $c > 0$ una generica costante dipendente da $a_{i,j}, n, \rho, r, \nu, k$ (indipendente da u e da f) che può cambiare da linea a linea.

Procediamo per induzione sull'ordine di derivazione rispetto alla variabile x_n (non rispetto a k). Per studiare l'esistenza delle derivate di ordine $k+2$ (e poi stimarle in maniera opportuna), conviene scriverle come $D^\alpha D_{i,j} u$, dove $\alpha \in \mathbb{N}^n$ è un multi-indice tale che $|\alpha| = k$ e $i, j \in \{1; \ldots; n\}$. Vogliamo mostrare che per ogni α tale che $|\alpha| = k$

per ogni $i, j \in \{1; \ldots; n\}$ per ogni $\rho \in (0, r)$ la derivata debole $D^\alpha D_{i,j} u$ esiste in B_ρ^+ e vale la stima

$$\|D^\alpha D_{i,j} u\|_{0,2,B_\rho^+} \leq c \left[\|u\|_{k+1,2,B_r^+} + \|f\|_{k,2,B_r^+} \right]. \tag{3.41}$$

Dato un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ tale che $|\alpha| = k$, procediamo per induzione su α_n. Se $\alpha_n = 0$, vediamo che equazione risolve $D^\alpha u$. Prendiamo una qualsiasi funzione test $\varphi \in C_c^\infty(B_r^+)$; utilizzando la regola di Leibniz, integrando per parti (dove ciò è possibile) e ricordando che $u \in H^{k+1}(B_r^+)$ per ipotesi, troviamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} a_{i,j} D_j(D^\alpha u) D_i \varphi \, dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} a_{i,j} D^\alpha(D_j u) D_i \varphi \, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} D^\alpha[a_{i,j} D_j u] D_i \varphi \, dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta}(D_j u) D_i \varphi \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} a_{i,j} D_j u D^\alpha(D_i \varphi) \, dx \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta}(D_j u)] \varphi \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{B_r^+} f D^\alpha \varphi \, dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta}(D_j u)] \varphi \, dx \\
&= \int_{B_r^+} (D^\alpha f) \varphi \, dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta}(D_j u)] \varphi \, dx.
\end{aligned}$$

Se poniamo

$$H := D^\alpha f + \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha\leq\beta,\ \beta\neq 0} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta} D_j u],$$

deduciamo che per ogni funzione test $\varphi \in C_c^\infty(B_r^+)$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} a_{i,j} D_j(D^\alpha u) D_i \varphi \, dx = \int_{B_r^+} H \varphi \, dx. \tag{3.42}$$

Per costruzione vale che $H \in L^2(B_r^+)$ e vale la stima

$$\|H\|_{0,2,B_r^+} \leq \|f\|_{k,2,B_r^+} + c(n, a_{i,j}, k) \|u\|_{k+1,2,B_r^+}. \tag{3.43}$$

Precisiamo che in (3.43) la costante c dipende soltanto da $n, a_{i,j}$ e k (è indipendente da f, u, r e ρ). Notiamo che $w = D^\alpha u$ ha traccia nulla su Γ_r, perchè stiamo derivando u soltanto rispetto alle prime $n-1$ variabili; per verificarlo si può procedere in questo modo: sapendo che u ha traccia nulla su Γ_r, esiste una successione di funzioni $(u_n)_n$ di classe $C^\infty(\overline{B_r^+})$ che si annullano in un intorno di Γ_r e che convergono ad u in $H^1(B_r^+)$. Si può verificare che $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ in $H^1(B_r^+)$, perchè deriviamo soltanto rispetto alle prime $n-1$ variabili. Per la continuità della traccia, deduciamo che $D^\alpha u$ ha traccia nulla su Γ_r, perchè questa proprietà vale per $D^\alpha u_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Possiamo applicare il teorema 3.3.1 e dedurre che per ogni $\rho \in (0, r)$ vale che $D^\alpha u \in H^2(B_\rho^+)$ e

$$|D^\alpha u|_{0,2,B_\rho^+} \leq c \left[\|D^\alpha u\|_{0,2,B_r^+} + \|H\|_{0,2,B_r^+} \right] \leq c \left[\|D^\alpha u\|_{k+1,2,B_r^+} + \|f\|_{k,2,B_r^+} \right]. \tag{3.44}$$

Quindi, nel caso in cui $\alpha_n = 0$ abbiamo ottenuto la tesi.

Supponiamo che la tesi valga quando $\alpha_n = h$ e mostriamo che vale anche se $\alpha_n = h+1$. Per ipotesi induttiva, sappiamo che u ammette tutte le derivate di ordine γ con $|\gamma| \leq k+2$ e $\gamma_n \leq h+2$. Inoltre, tali derivate si stimano come in (3.3). Sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h+1)$; presa $\psi \in C_c^\infty(B_r^+)$, usando $D^\alpha\psi$ come funzione test nella formulazione debole di (3.32), deduciamo che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_r^+} a_{i,j} D_j u D_i(D^\alpha \psi)\, dx = \int_{B_r^+} f D^\alpha \psi\, dx; \tag{3.45}$$

osserviamo che possiamo integrare per parti entrambi i membri (le ipotesi di regolarità su u, f e il fatto che $|\alpha| = k$ lo consentono) ottenendo che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_r^+} D^\alpha[a_{i,j} D_j u] D_i \psi\, dx = \int_{B_r^+} \psi D^\alpha f\, dx. \tag{3.46}$$

Sviluppando i conti ed espandendo le derivate, notiamo che possiamo scaricare quasi tutte le derivate da ψ (le considerazioni fatte su u consentono di integrare per parti) e otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^+} \psi D^\alpha f\, dx &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_r^+} D^\alpha[a_{i,j} D_j u] D_i \psi\, dx \\
&= \sum_{i\cdot j<n^2} \int_{B_r^+} \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta}(D_j u) D_i \psi\, dx \\
&\quad + \int_{B_r^+} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a_{n,n} D^{\alpha-\beta}(D_j u) D_i \psi\, dx \\
&\quad + \int_{B_r^+} a_{n,n} D^\alpha(D_n u) D_n \psi\, dx \\
&= -\sum_{i\cdot j<n^2} \int_{B_r^+} \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta}(D_j u)] \psi\, dx \qquad (3.47) \\
&\quad - \int_{B_r^+} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{n,n} D^{\alpha-\beta}(D_j u)] \psi\, dx \\
&\quad + \int_{B_r^+} a_{n,n} D^\alpha(D_n u) D_n \psi\, dx. \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

Se poniamo

$$\begin{aligned}
H &:= D^\alpha f + \sum_{i\cdot j<n^2} \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{i,j} D^{\alpha-\beta}(D_j u)] \\
&\quad + \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_i[D^\beta a_{n,n} D^{\alpha-\beta}(D_j u)],
\end{aligned}$$

troviamo che per ogni $\psi \in C_c^\infty(B_r^+)$ vale che

$$\int_{B_r^+} a_{n,n} D_n(D^\alpha u) D_n \psi\, dx = \int_{B_r^+} H\psi\, dx.$$

Precisiamo che in (3.47) abbiamo integrato per parti e ciò è possibile come detto in precedenza (basta contare le derivate presenti). Dall'ipotesi induttiva segue anche che per ogni $\rho \in (0, r)$ vale che

$$\|H\|_{0,2,B_\rho^+} \leq c \left[\|f\|_{k,2,B_r^+} + \|u\|_{k+1,2,B_r^+} \right].$$

Dall'ipotesi di ellitticità uniforme (vedi 1.1.9) segue che $a_{nn}(x) \geq \nu > 0$ per ogni $x \in B_r^+$. Data $\xi \in C_c^\infty(B_r^+)$, notiamo che $\psi = \xi / a_{nn}$ è una funzione test ammissibile in (3.48). Deduciamo che

$$\int_{B_r^+} a_{nn} D_n(D^\alpha u) D_n \left(\frac{\xi}{a_n n} \right) \, dx = \int_{B_r^+} \xi \frac{H}{a_{nn}} \, dx, \tag{3.49}$$

ovvero che

$$\int_{B_r^+} D_n(D^\alpha u) D_n \xi \, dx = \int_{B_r^+} K \xi \, dx, \tag{3.50}$$

avendo posto

$$K := \frac{H + D_n(D^\alpha u D_n a_{nn})}{a_{nn}}.$$

Fissiamo $\rho \in (0, r)$; applicando l'ipotesi induttiva, notiamo che è possibile stimare $D^n(D^\alpha u)$ come in (3.3) (infatti deriviamo u soltanto $h + 2$ volte rispetto all'ultima variabile). Segue che

$$\|K\|_{0,2,B_\rho^+} \leq c \left[\|f\|_{k,2,B_r^+} + \|u\|_{k+1,2,B_r^+} \right]. \tag{3.51}$$

La relazione (3.49) dice che $D_{nn} D^\alpha u$ esiste in B_ρ^+ e vale $-K$; la stima (3.51) è sufficiente a concludere. □

3.4 Regolarità L^2 globale

A questo punto, possiamo studiare la regolarità globale delle soluzioni deboli del problema differenziale

$$\sum_{i,j=1}^{n} -D_i[a_{i,j} D_j u] = f. \tag{3.52}$$

Il teorema 3.3.1 risolve il problema nel caso modello di un aperto che sia metà di una palla; possiamo ottenere il caso generale con un cambio di variabili; tuttavia, dobbiamo supporre che l'aperto sia regolare.

Teorema 3.4.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo di classe C^2, $f \in L^2(\Omega)$, $A = (a_{i,j})$ uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) e con coefficienti di classe $C^1(\overline{\Omega})$. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole del problema (3.52). Vale che $u \in H^2(\Omega)$ ed esiste una costante $c(a_{i,j}, n, \nu, \Omega) > 0$ indipendente da u e da f tale che*

$$|u|_{2,2,\Omega} \leq c \left[\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega} \right].$$

Dimostrazione. Denotiamo con $c(a_{i,j}, n, \nu, \Omega)$ una costante dipendente solo da $a_{i,j}, n, \nu, \Omega$ (indipendente da u e f), che può variare da linea a linea.

L'ipotesi di limitatezza di Ω garantisce che possiamo trovare una famiglia finita di aperti $\Omega', \Omega'', U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_m$ con le seguenti proprietà:

- $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$;
- U_l, V_l sono palle centrate in $x_l \in \partial\Omega$ per ogni $l \in \{1; \dots; m\}$;
- $V_l \Subset U_l$;
- $\partial\Omega \subseteq \bigcup_l V_l$;
- $\overline{\Omega} \Subset \bigcup_l V_l \cup \Omega'$.

Per il teorema di regolarità interna (vedi 3.2.1) vale che $u \in H^2(\Omega')$ ed esiste una costante $c > 0$ (dipendente anche da Ω', Ω'', ma ciò è irrilevante in questo contesto, e indipendente da u e da f) tale che

$$|u|_{2,2,\Omega'} \leq c\left[\|f\|_{0,2,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}\right] \leq c\left[\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega}\right]. \tag{3.53}$$

Quindi è sufficiente mostrare che u è regolare intorno ai punti di bordo di Ω.

Per l'ipotesi di regolarità su Ω, sappiamo che $\partial\Omega$ è localmente il grafico di una funzione di classe C^2; in altri termini, a meno di rimpicciolire gli intorni U_l, V_l, possiamo trovare degli aperti $W_l \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ e delle funzioni $\psi_l : W_l \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che

$$U_l \cap \partial\Omega = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, \psi_l(x_1, \dots, x_{n-1})) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in W_l\}.$$

Notiamo che a meno scambiare le coordinate, possiamo sempre supporre che $U_l \cap \partial\Omega$ sia il grafico di una funzione delle prime $n-1$ variabili. Definiamo $\Phi^l : U_l \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$\Phi^l(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \coloneqq (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \psi_l(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Φ^l ha la proprietà che

$$\Phi^l(U_l \cap \Omega) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n > 0\}, \quad \Phi^l(U_l \cap \partial\Omega) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n = 0\}.$$

Si verifica facilmente che per ogni $x \in U_l$ la matrice jacobiana di Φ^l in x ha determinante 1. Definiamo $w_l \coloneqq u \circ (\Phi^l)^{-1}$. Indichiamo con $\Omega_l \coloneqq \Omega \cap U_l$ e con $\tilde{\Omega}_l \coloneqq \Phi^l(\Omega_l)$. Notiamo che w_l è definita in $\tilde{\Omega}_l$; siccome $u \in H^1(\Omega_l)$, deduciamo che $w_l \in H^1(\tilde{\Omega}_l)$ e, per la chain rule, si ha che

$$\nabla w_l = \nabla u((\Phi^l)^{-1}) \cdot J(\Phi^l)^{-1}.$$

Sappiamo che per ogni funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_l)$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega_l} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_j u D_i \varphi \, dx = \int_{\Omega_l} f\varphi \, dx. \tag{3.54}$$

Vogliamo capire quale equazione risolve w_l in $\tilde{\Omega}_l$. Sia $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_l)$ una funzione test; effettuando il cambio di variabili $y = \Phi^l(x)$, se poniamo $\tilde{\varphi} = \varphi \circ (\Phi^l)^{-1}$, $\alpha_{i,j} = a_{i,j} \circ (\Phi^l)^{-1}$

e $\tilde{\Phi}^l_{i,j} = D_i\Phi^l_h((\Phi^l)^{-1})$ troviamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_l} a_{i,j}D_juD_i\varphi\ dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_l} a_{i,j}\sum_{k=1}^n [D_kw_l(\Phi^l)][D_j\Phi^l_k]D_i\varphi\ dx\\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\tilde{\Omega}_l} \alpha_{i,j}\sum_{k=1}^n D_kw_l[D_j(\Phi^l_k)((\Phi^l)^{-1})]D_i\varphi((\Phi^l)^{-1})\ dy\\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\tilde{\Omega}_l} \alpha_{i,j}\sum_{k=1}^n D_kw_l[D_j(\Phi^l_k)((\Phi^l)^{-1})]\sum_{h=1}^n D_h\tilde{\varphi}_l[D_i\Phi^l_h(\Phi^l)^{-1}]\ dy\\
&= \sum_{i,j,k,h=1}^n \int_{\tilde{\Omega}_l} \alpha_{i,j}D_kw_l\tilde{\Phi}^l_{k,j}[D_h\tilde{\varphi}]\tilde{\Phi}^l_{h,i}\ dy\\
&= \sum_{h,k=1}^n \int_{\tilde{\Omega}_l}\left(\sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j}\tilde{\Phi}^l_{h,j}\tilde{\Phi}^l_{k,i}\right)D_kw_lD_h\tilde{\varphi}\ dy.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo membro, notiamo che

$$\int_{\Omega_l} f\varphi\ dx = \int_{\tilde{\Omega}_l}\tilde{f}\tilde{\varphi}\ dy,$$

avendo posto $\tilde{f} = f\circ(\Phi^l)^{-1}$. Indichiamo con

$$b_{h,k} = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j}\tilde{\Phi}^l_{h,j}\tilde{\Phi}^l_{k,i};$$

osserviamo che al variare di $\varphi \in C^\infty_c(\Omega_l)$ le composizioni $\tilde{\varphi} = \varphi\circ(\Phi^l)^{-1}$ descrivono tutte le funzioni test in $C^2_0(\tilde{\Omega}_l)$; in altri termini, abbiamo mostrato che per ogni $\tilde{\varphi} \in C^2_c(\Omega_l)$ vale che

$$\sum_{h,k=1}^n \int_{\tilde{\Omega}_l} b_{h,k}D_kw_lD_h\tilde{\varphi}\ dy = \int_{\tilde{\Omega}_l}\tilde{f}\tilde{\varphi}\ dy. \tag{3.55}$$

Essendo $(\Phi^l)^{-1}$ di classe C^2, deduciamo che la matrice $B = (b_{h,k})$ ha coefficienti di classe C^1 nella chiusura di $\tilde{\Omega}_l$. Inoltre, verifichiamo che B è uniformemente ellittica in $\tilde{\Omega}_l$. Dati $y \in \tilde{\Omega}_l$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, utilizzando l'uniforme ellitticità della matrice A, deduciamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{h,k=1}^n b_{h,k}(y)\xi_h\xi_k &= \sum_{h,k=1}^n\sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j}(y)\tilde{\Phi}^l_{h,j}(y)\tilde{\Phi}^l_{k,i}(y)\xi_h\xi_k\\
&= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j}(y)\left(\sum_{h=1}^n \tilde{\Phi}^l_{h,i}(y)\xi_h\right)\left(\sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}^l_{k,i}\xi_k\right)\\
&\geq \nu\sum_{i=1}^n\left(\sum_{h=1}^n \tilde{\Phi}^l_{h,i}(y)\xi_h\right)^2.
\end{aligned}$$

Consideriamo la funzione

$$T(\xi) := \sum_{i=1}^n\left(\sum_{h=1}^n \tilde{\Phi}^l_{h,i}(y)\xi_h\right)^2,$$

definita in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Notiamo che T ha minimo sulla sfera unitaria e tale valore è strettamente positivo, perchè lo jacobiano di Φ^l calcolato in $(\Phi^l)^{-1}(y)$ è invertibile; deduciamo che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\sum_{h,k=1}^{n} b_{h,k}(y)\xi_h\xi_k \geq \nu T(\xi) \geq c\nu \left|\xi\right|^2. \tag{3.56}$$

Allora la matrice B è uniformemente ellittica in $\tilde{\Omega}_l$. Ovviamente la funzione $\tilde{f} \in L^2(\tilde{\Omega}_l)$ e vale

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{0,2,\tilde{\Omega}_l} = \left\|f\right\|_{0,2,\Omega_l}.$$

Possiamo scegliere gli aperti U_l e V_l in modo che $(\Phi^l)^{-1}(U_l) = B_r$ e $(\Phi^l)^{-1}(V_l) = B_{r/2}$. Siamo nelle condizioni di poter applicare il teorema 3.3.1; deduciamo che $w_l \in H^2(B^+_{r/2})$ ed esiste una costante $c > 0$ tale che

$$|w_l|_{2,2,B^+_{r/2}} \leq c\left[\left\|\tilde{f}\right\|_{0,2,\tilde{\Omega}_l} + \|w_l\|_{1,2,B^+_r}\right] \leq c\left[\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega}\right]. \tag{3.57}$$

Siccome Φ^l e $(\Phi^l)^{-1}$ sono di classe C^2 con tutte le derivate uniformemente limitate, deduciamo che $u \in H^2(\Omega_l)$ e vale la stima

$$|u|_{2,2,V_l} \leq c\left[\left\|\tilde{f}\right\|_{0,2,\tilde{\Omega}_l} + \|w_l\|_{1,2,B^+_r}\right] \leq c\left[\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega}\right]. \tag{3.58}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Dalla dimostrazione del teorema 3.4.1 otteniamo anche il risultato seguente.

Teorema 3.4.2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo di classe C^{k+2}, $f \in H^k(\Omega)$, $A = (a_{i,j})$ uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) e con coefficienti di classe $C^{k+1}(\overline{\Omega})$. Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ soluzione debole del problema* (3.52). *Vale che $u \in H^{k+2}(\Omega)$ ed esiste una costante $c(a_{i,j}, n, \nu, \Omega) > 0$ indipendente da u e da f tale che*

$$|u|_{k+2,2,\Omega} \leq c\left[\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega}\right].$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per induzione su k. Il caso $k = 0$ è dato dal teorema 3.4.5. Altrimenti, la dimostrazione del teorema 3.4.1 si adatta facilmente: per la regolarità interna si applica il teorema 3.2.3; per la regolarità al bordo, basta osservare che con il cambio di variabili ci si riduce al caso modello in cui Ω è la metà di un disco e si applica il teorema 3.3.2. □

Segue un semplice corollario, di una certa suggestione.

Corollario 3.4.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo di classe C^∞, $f \in C^\infty(\Omega)$, $A = (a_{i,j})$ uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) e con coefficienti di classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ soluzione debole del problema* (3.52). *Vale che $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Dimostrazione. La tesi è una conseguenza immediata dell'applicazione iterata del teorema 3.4.2 e dei teoremi di immersione di Sobolev. □

Risolvendo il problema ellittico con condizioni al bordo di Dirichlet, possiamo migliorare la stima del teorema 3.4.1.

Corollario 3.4.4. *Nelle ipotesi del teorema 3.4.1, denotiamo con u_f la soluzione in $H_0^1(\Omega)$ del problema* (3.52). *Esiste una costante $c(a_{i,j}, n, \nu, \Omega) > 0$ (indipendente da f e da u_f) tale che*

$$\|u_f\|_{2,2,\Omega} \le c\,\|f\|_{0,2,\Omega}\,.$$

Dimostrazione. Per semplicità, denotiamo con $c > 0$ una costante dipendente da $a_{i,j}, n, \nu, \Omega$ (indipendente da u_f e da f) che può cambiare da linea a linea.

Dall'uniforme ellitticità di A e dalla disuguaglianza di Poincarè (ricordiamo che $u \in H_0^1(\Omega)$) deduciamo che

$$\begin{aligned}\nu\,\|\nabla u_f\|_{0,2,\Omega}^2 &\le \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} D_i u_f D_j u_f \; dx = \int_\Omega f u_f \; dx \\ &\le \|f\|_{0,2,\Omega}\,\|u_f\|_{0,2,\Omega} \le c\,\|f\|_{0,2,\Omega}\,\|\nabla u_f\|_{0,2,\Omega}\,;\end{aligned}$$

segue che

$$\|\nabla u_f\|_{0,2,\Omega} \le c\,\|f\|_{0,2,\Omega}\,.$$

Per il teorema 3.4.1 e per la disuguaglianza di Poincarè, vale che

$$|u_f|_{0,2,\Omega} \le c\left[\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u_f\|_{1,2,\Omega}\right] \le c\left[\|f\|_{0,2,\Omega} + \|\nabla u_f\|_{0,2,\Omega}\right] \le c\,\|f\|_{0,2,\Omega}\,.$$

Segue la tesi. □

Possiamo anche studiare la regolarità globale delle soluzioni del problema completo

$$-\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j} D_j u] + \sum_{i=1}^n a_i D_i u + au = f. \tag{3.59}$$

Corollario 3.4.5. *Sia $u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole del problema* (3.59). *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato con bordo di classe C^2, che $A = (a_{i,j})$ sia una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante ν (vedi 1.1.9), che i coefficienti $a_{i,j}$ siano in $C^1(\overline{\Omega})$, che $a, a_i \in L^\infty(\Omega)$ e che $f \in L^2(\Omega)$. Allora $u \in H^2(\Omega)$ ed esiste una costante $c(a_{i,j}, a_i, a, n, \nu, \Omega) > 0$ (indipendente da u e da f) tale che*

$$|u|_{2,2,\Omega} \le c\left[\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega}\right].$$

Dimostrazione. Per semplicità, denotiamo con $c > 0$ una costante dipendente da $a_{i,j}, a_i, a, n, \nu, \Omega$ (indipendente da u_f e da f) che può cambiare da linea a linea.

Basta osservare che $u \in H^1(\Omega)$ è soluzione debole in Ω del problema

$$-\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j}] = f - \sum_{i=1}^n a_i D_i u - a_0 u;$$

notiamo che

$$F = f - \sum_{i=1}^n a_i D_i u - a_0 u \in L^2(\Omega)$$

e vale che

$$\|F\|_{0,2,\Omega} \le c\left[\|u\|_{1,2,\Omega} + \|f\|_{0,2,\Omega}\right];$$

allora possiamo applicare il teorema 3.4.5 e otteniamo immediatamente la tesi. □

Capitolo 4

Alcuni spazi funzionali

In questo capitolo introduciamo alcuni spazi di funzioni di cruciale importanza per studio della regolarità delle soluzioni dei problemi ellittici.

4.1 Spazi di Hölder

Ricordiamo alcuni fatti utili sulle funzioni hölderiane, con l'intento principale di fissare una notazione che adotteremo in seguito. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto.

Definizione 4.1.1 (Funzioni hölderiane)**.** Dato $\gamma > 0$, diciamo che $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è γ-hölderiana in Ω se vale

$$\sup_{x,y \in \Omega,\ x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} < +\infty.$$

Se $\gamma = 1$, si dice che u è lipschitziana.

Osservazione 4.1.2. Per ogni $\gamma > 0$, le funzioni γ-hölderiane in Ω sono uniformemente continue e, quindi, si prolungano con continuità a $\overline{\Omega}$. Si noti che in questo contesto la forma di Ω gioca un ruolo importante: secondo la definizione 4.1.1, se $\Omega = (-1,0) \cup (0,1) \subseteq \mathbb{R}$, la funzione

$$u(x) := \begin{cases} -1 & x \in (-1,0), \\ 1 & x \in (0,1) \end{cases}$$

non è hölderiana per nessun esponente $\gamma > 0$. Se $\gamma > 1$, le uniche funzioni γ-hölderiane sono quelle costanti in ogni componente connessa di Ω.

Esempio 4.1.3. La funzione $u(x) := |x|^\beta$ è β-hölderiana ma non è γ-hölderiana per ogni $\gamma > \beta$.

Esempio 4.1.4. La funzione

$$v(x) := \begin{cases} 0 & x = 0, \\ [\log(|x|)]^{-1} & x \neq 0 \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$ ma non è γ-hölderiana intorno a 0 per ogni esponente $\gamma > 0$.

Definizione 4.1.5 (Spazi di Hölder)**.** Sia $\gamma > 0$; denotiamo che $C^{0,\gamma}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni γ-hölderiane in Ω; dato $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con $C^{k,\gamma}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni di classe $C^k(\Omega)$ aventi tutte le derivate di ordine k γ-hölderiane in Ω.

Introduciamo la seguente notazione.

Definizione 4.1.6. Siano dati $\gamma > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Per ogni $u \in C^{k,\gamma}(\Omega)$ poniamo

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} := \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma},$$

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} := \|u\|_{C^0(\Omega)} + [u]_{k,\gamma,\Omega}.$$

Per ogni $u \in C^{k,\gamma}(\Omega)$, poniamo

$$[u]_{C^{k,\gamma}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma},$$

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\Omega)} := \|u\|_{C^{k-1}(\Omega)} + [u]_{k,\gamma,\Omega}.$$

Osservazione 4.1.7. Senza ipotesi su Ω, non è detto che una funzione in $C^{k,\gamma}(\Omega)$ appartenga a $C^{k-1,\gamma}(\Omega)$: infatti le derivate di ordine $k-1$ sono localmente lipschitziane (essendo le derivate di ordine k localmente limitate), ma non è detto che lo siano globalmente. Tuttavia, se Ω è un aperto convesso e limitato, è facile provare tramite il teorema di Lagrange che una funzione in $C^{k,\gamma}(\Omega)$ ha tutte le derivate di ordine strettamente minore di k che sono lipschitziane (pertanto si estendono alla chiusura di Ω con continuità); inoltre, tutte le derivate di ordine minore di k sono uniformemente limitate. In questo caso, per ogni $k \in \mathbb{N}$ (eventualmente $k = 0$), si ha che $\|u\|_{C^{k,\gamma}(\Omega)} < +\infty$ per ogni $u \in C^{k,\gamma}(\Omega)$. Inoltre, la quantità $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\Omega)}$ è una norma in $C^{k,\gamma}(\Omega)$.

Proposizione 4.1.8. *Supponiamo che Ω sia limitato e connesso; siano $0 < \beta < \gamma$; le immersioni*

$$C^{0,\gamma}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$$

sono ben definite, continue e compatte.

Dimostrazione. La buona definizione e la continuità segue immediatamente dalle definizioni 4.1.6. Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà, otteniamo anche che sono compatte. □

Teorema 4.1.9. *Supponiamo che Ω sia limitato e convesso; siano $\gamma > 0$ e $k \in \mathbb{N}$; lo spazio $C^{k,\gamma}(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\Omega)}$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Notiamo che se $k = 0$ l'immersione di $C^{0,\gamma}(\Omega)$ in $C^0(\overline{\Omega})$ è ben definita e continua; se $k > 1$ l'immersione di $C^{k,\gamma}(\Omega)$ in $C^{k-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ è ben definita e continua. Allora, se $k = 0$, la tesi è una conseguenza immediata del teorema di Ascoli-Arzelà. Se $k > 0$, è sufficiente osservare che se $u \in C^{k,\gamma}(\Omega)$, allora $u \in C^{k-1,\gamma}(\Omega)$ ed è possibile stimare la norma in $C^{k-1,\gamma}(\Omega)$ con la norma in $C^{k,\gamma}(\Omega)$. Allora, si ottiene la tesi ragionando per induzione e applicando il teorema di Ascoli-Arzelà. □

4.2 Spazi di Morrey

Fissiamo un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato; e indichiamo con d_Ω il suo diametro. Per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ poniamo $\Omega_r(x) := B_r(x) \cap \Omega$.

Definizione 4.2.1 (Spazi di Morrey)**.** Dati $p \in [1, +\infty)$ e $\lambda \geq 0$, definiamo lo spazio di Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$ come il sottoinsieme delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^p := \sup_{x \in \overline{\Omega},\ 0 < r \leq d_\Omega} \frac{1}{r^\lambda} \int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p \ dy < +\infty.$$

Teorema 4.2.2. *Dati $p \in [1, +\infty)$ e $\lambda \geq 0$, la quantità $\|\cdot\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$ è una norma su $L^{p,\lambda}(\Omega)$ (vedi 4.2.1) che lo rende uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Si verifica banalmente che $\|\cdot\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$ è una norma su $L^{p,\lambda}(\Omega)$; mostriamo la completezza dello spazio. Sia $(u_n)_n$ una successione di Cauchy in $L^{p,\lambda}(\Omega)$. Osserviamo che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ vale

$$\int_\Omega |u_n(y) - u_m(y)|^p \ dy \leq d_\Omega^\lambda \|u_n - u_m\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^p ;$$

deduciamo che $(u_n)_n$ è una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Sia $u \in L^p(\Omega)$ il limite della successione $(u_n)_n$ in $L^p(\Omega)$; vogliamo mostrare che $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ e che $u_n \to u$ anche nella norma $\|\cdot\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$. Osserviamo che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ vale che

$$\frac{1}{r^\lambda} \int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p \ dy = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{r^\lambda} \int_{\Omega_r(x)} |u_n(y)|^p \ dy \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^p < +\infty,$$

perchè ogni successione di Cauchy è limitata. Deduciamo che $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$. Fissiamo $\varepsilon > 0$; sappiamo che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, k > m$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ vale che

$$\frac{1}{r^\lambda} \int_{\Omega_r(x)} |u_n(y) - u_k(y)|^p \ dy \leq \varepsilon.$$

Prendendo il limite per $k \to +\infty$, otteniamo che per ogni $n \geq m$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ vale che

$$\frac{1}{r^\lambda} \int_{\Omega_r(x)} |u_n(y) - u(y)|^p \ dy \leq \varepsilon;$$

in altri termini, abbiamo che $u_n \to u$ in $L^{p,\lambda}(\Omega)$. □

Possiamo caratterizzare gli spazi di Morrey in alcuni casi.

Osservazione 4.2.3. Dalla definizione 4.2.1 segue immediatamente che $L^{p,0}(\Omega)$ coincide con $L^p(\Omega)$ e che $\|\cdot\|_{L^{p,0}(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$.

Proposizione 4.2.4. *Per ogni $p \in [1, +\infty)$ lo spazio $L^{p,n}(\Omega)$ è isomorfo a $L^\infty(\Omega)$; per la precisione, l'identità $Id : L^{p,n}(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ è ben definita, è una bigezione e vale*

$$\|u\|_{L^{p,n}(\Omega)} = |B_1|^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che l'inclusione $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{p,n}(\Omega)$ è ben definita e continua; infatti, per ogni $u \in L^\infty(\Omega)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ vale che

$$\frac{1}{r^n} \int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p \ dy \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^p |B_1| ;$$

deduciamo che
$$\|u\|_{L^{p,n}(\Omega)} \leq |B_1|^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} .$$
Viceversa, mostriamo che l'inclusione $L^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ è ben definita e continua. Data $u \in L^p(\Omega)$, se $x \in \Omega$ è un punto di Lebesgue per u, si ha che

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n |B_1|} \int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p \ dy \\
&\leq \sup_{r\in(0,d_\Omega]} \frac{1}{r^n |B_1|} \int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p \ dy \\
&\leq \frac{1}{|B_1|} \|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Ricordando che l'insieme dei punti di Lebesgue per u ha misura piena in Ω, deduciamo che $u \in L^\infty(\Omega)$ e vale la stima

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{|B_1|^{\frac{1}{p}}} \|u\|_{L^{p,n}(\Omega)} .$$

Deduciamo che $u \in L^{p,n}(\Omega)$ se e solo se $u \in L^\infty(\Omega)$; in tal caso vale che

$$\|u\|_{L^{p,n}(\Omega)} = |B_1|^{\frac{1}{p}} \|u\|_{0,\infty,\Omega} .$$

□

Osservazione 4.2.5. Se $\lambda > n$, per ogni $p \in [1, +\infty)$, vale che $L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$. Infatti, data $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$, preso un punto di Lebesgue $x \in \Omega$ per u, vale che

$$|u(x)|^p = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n |B_1|} \int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p \ dy \leq \lim_{r\to 0} \frac{r^{\lambda-n}}{|B_1|} \|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = 0,$$

perchè $\lambda - n > 0$. Ricordando che l'insieme dei punti di Lebesgue per u hanno misura piena in Ω, deduciamo che u coincide quasi ovunque con la funzione nulla. Questa osservazione è molto interessante: infatti, la costruzione degli spazi di Morrey è del tutto naturale; tuttavia, abbiamo appena mostrato che diventano banali se $\lambda > n$ (in un certo senso, anche il caso $\lambda = n$ non è troppo interessante). Per ovviare a questo problema, definiremo gli spazi di Campanato e ne studieremo il legame con gli spazi di Morrey.

Gli spazi di Morrey sono veramente interessanti nel caso in cui $\lambda \in (0, n)$; in tutti gli altri casi, otteniamo spazi funzionali ben noti.

Proposizione 4.2.6. *Siano* $1 \leq p \leq q < +\infty$ *e* $\lambda, \mu \geq 0$ *tali che*

$$\frac{\lambda - n}{p} \leq \frac{\mu - n}{q};$$

allora l'inclusione $L^{q,\mu}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(\Omega)$ *è ben definita ed è continua.*

Dimostrazione. Per semplicità, indichiamo con $c(p, q, \lambda, \mu, n) > 0$ una costante indipendente da u che può cambiare da linea a linea.

Siano $u \in L^{q,\mu}(\Omega)$, $x \in \overline{\Omega}$ e $r \in (0, d_\Omega]$. Applicando la disuguaglianza di Hölder, il fatto che $r/d_\Omega \leq 1$ e che $\frac{q-p}{q}n + \mu\frac{p}{q} \geq \lambda$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r(x)} |u|^p \; dx &\leq \left[\int_{\Omega_r(x)} |u|^q \; dy\right]^{\frac{p}{q}} |\Omega_r(x)|^{\frac{q-p}{q}} \\
&\leq c\left[\frac{1}{r^\mu}\int_{\Omega_r(x)} |u|^q \; dy\right]^{\frac{p}{q}} r^{n\frac{q-p}{q}+\mu\frac{p}{q}} \\
&\leq c\left[\frac{1}{r^\mu}\int_{\Omega_r(x)} |u|^q \; dy\right]^{\frac{p}{q}} \left(\frac{r}{d_\Omega}\right)^{n\frac{q-p}{q}+\mu\frac{p}{q}} \\
&\leq c\left[\frac{1}{r^\mu}\int_{\Omega_r(x)} |u|^q \; dy\right]^{\frac{p}{q}} \left(\frac{r}{d_\Omega}\right)^{\lambda} \\
&\leq c\left[\frac{1}{r^\mu}\int_{\Omega_r(x)} |u|^q \; dy\right]^{\frac{p}{q}} r^{\lambda} \\
&\leq \|u\|^p_{L^{q,\mu}(\Omega)} r^\lambda.
\end{aligned}$$

Riordinando i termini e ricordando che c è indipendente da u, da x e da r, deduciamo che

$$\|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq c\,\|u\|^p_{L^{q,\mu}(\Omega)}.$$

□

4.3 Spazi di Campanato

Fissiamo un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato; adottiamo le notazioni del capitolo precedente. Inoltre, per ogni $u \in L^1(\Omega)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ denotiamo con

$$u_{x,r} := \fint_{\Omega_r(x)} u(y) \; dy.$$

Definizione 4.3.1 (Spazi di Campanato)**.** Siano dati $p \in [1, +\infty)$ e $\lambda \geq 0$. Definiamo lo spazio $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ come l'insieme formato dalle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che

$$[u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{x\in\overline{\Omega},\ r\in(0,d_\Omega]} \frac{1}{r^\lambda}\int_{\Omega_r(x)} |u(y) - u_{x,r}|^p \; dy < +\infty.$$

Osservazione 4.3.2. Dati $p \in [1, +\infty)$ e $\lambda \geq 0$, la quantità $[\cdot]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$ è una seminorma su $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$: infatti è invariante per traslazione, cioè $[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} = [u + c]_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$, per ogni $u \in \mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Definizione 4.3.3. Dati $p \in [1, +\infty)$ e $\lambda \geq 0$, si pone

$$\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

Teorema 4.3.4. *Dati $p \in [1, +\infty)$ e $\lambda \geq 0$, la quantità $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$ (vedi 4.3.3) è una norma su $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ che lo rende uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. La dimostrazione è completamente analoga a quella del teorema 4.2.2.

□

Il prossimo risultato mostra che è possibile dotare gli spazi di Campanato di una norma equivalente a quella definita in 4.3.3.

Lemma 4.3.5. *Siano dati $p \in [1, +\infty)$, $\lambda \geq 0$ e $u \in L^p(\Omega)$. Allora $u \in \mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ se e solo se vale*

$$[[u]]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega,\ r\in(0,d_\Omega]} \left[\frac{1}{r^\lambda} \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega_r(x)} |u(y) - c|^p \ dy\right] < +\infty.$$

In tal caso, vale che

$$\frac{1}{2}[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \leq [[u]]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \leq [u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Se $u \in \mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, allora vale banalmente che

$$[[u]]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \leq [u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

Viceversa, se $u \in L^p(\Omega)$ e $[[u]]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} < +\infty$, per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ vale che

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r(x)} |u(y) - u_{x,r}|^p \ dy &\leq 2^{p-1}\left[\int_{\Omega_r(x)} |u(y) - c|^p \ dy + \int_{\Omega_r(x)} |u_{x,r} - c|^p \ dy\right] \\
&= 2^{p-1}\left[\int_{\Omega_r(x)} |u(y) - c|^p \ dy + |\Omega_r(x)| \left|\fint_{\Omega_r(x)} [u(y) - c] \ dy\right|^p\right] \\
&\leq 2^{p-1}\left[\int_{\Omega_r(x)} |u(y) - c|^p \ dy + |\Omega_r(x)| \fint_{\Omega_r(x)} |u(y) - c|^p \ dy\right] \\
&= 2^p \int_{\Omega_r(x)} |u(y) - c|^p \ dy
\end{aligned}$$

Precisiamo che abbiamo usato il fatto che la funzione $|t|^p$ è convessa e la disuguaglianza di Jensen. Abbiamo trovato che

$$[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \leq 2[[u]]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

□

Corollario 4.3.6. *Siano dati $p \in [1, +\infty)$ e $\lambda \geq 0$. Per ogni $u \in \mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ definiamo*

$$|||u|||_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + [[u]]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

La quantità $|||\cdot|||_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$ è una norma in $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ ed è equivalente alla norma di Campanato $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$.

Dimostrazione. Il fatto che $|||\cdot|||_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$ sia una norma in $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ è banale; l'equivalenza con la norma di Campanato segue immediatamente dal lemma 4.3.5. □

Vogliamo studiare più concretamente gli spazi di Campanato, evidenziando il legame con gli spazi di Morrey e di Hölder. I prossimi risultati valgono sotto qualche blanda ipotesi di regolarità su Ω.

Definizione 4.3.7 (Aperto di tipo A)**.** Diciamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto di tipo A se esiste una costante $A > 0$ tale che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ vale che

$$|\Omega_r(x)| \geq Ar^n.$$

Esempio 4.3.8. Se Ω è un aperto con bordo lipschitziano, allora è tipo A (vedi 4.3.7); un aperto il cui bordo presenta delle cuspidi verso l'esterno non può essere di tipo A.

Teorema 4.3.9. *Sia $p \in [1,+\infty)$; supponiamo che Ω sia un aperto di tipo A (vedi 4.3.7). Se $\lambda \in [0,n)$ allora gli spazi $L^{p,\lambda}(\Omega)$ e $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ sono isomorfi, nel senso che le due inclusioni sono ben definite e continue.*

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo con $c(p,n,\lambda,\Omega)>0$ una costante (indipendente dalle funzioni u considerate) che può cambiare da linea a linea.

Step 1): Mostriamo che senza ipotesi su λ e su Ω l'inclusione $L^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ è ben definita e continua. Siano $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$, $x \in \overline{\Omega}$ e $r \in (0,d_\Omega]$. Per la disuguaglianza di Jensen, vale che

$$|u_{x,r}|^p = \left| \fint_{\Omega_r(x)} u(y)\ dy \right|^p \leq \fint_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p\ dy.$$

Deduciamo che

$$\int_{\Omega_r(x)} |u_{x,r}|^p\ dy \leq \int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p\ dy.$$

Dalla convessità della funzione $|t|^p$ deduciamo che

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r(x)} |u(y)-u_{x,r}|^p\ dy &\leq 2^{p-1}\left(\int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p\ dy + \int_{\Omega_r(x)} |u_{x,r}|^p\ dy \right)\\ &\leq 2^p \int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p\ dy.\end{aligned}$$

Deduciamo che

$$[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \leq 2\, \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}\,.$$

Inoltre, è banale osservare che

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq d_\Omega^\lambda\, \|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)}\,.$$

Deduciamo che

$$\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \leq c\, \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}\,.$$

Step 2): Mostriamo che se $\lambda \in [0,n)$ e Ω è un aperto di tipo A, allora l'inclusione $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(\Omega)$ è ben definita e continua. Siano $u \in \mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, $x \in \overline{\Omega}$ e $r \in (0,d_\Omega]$. Per la convessità della funzione $|t|^p$ vale che

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p\ dy &\leq 2^{p-1}\left[\int_{\Omega_r(x)} |u(y)-u_{x,r}|^p\ dy + \int_{\Omega_r(x)} |u_{x,r}|^p\ dy \right]\\ &\leq c\left(r^\lambda [u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} + r^n\, |u_{x,r}|^p \right).\end{aligned}$$

Segue che

$$\frac{1}{r^\lambda}\int_{\Omega_r(x)} |u(y)|^p\ dy \leq c\left([u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} + r^{n-\lambda}\, |u_{x,r}|^p \right).$$

Siccome vogliamo stimare il membro di sinistra uniformemente in x ed r con $\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$, è sufficiente mostrare che

$$\sup_{x\in\Omega,\ r\in(0,d_\Omega]} r^{n-\lambda}\, |u_{x,r}|^p \leq c\, \|u\|^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$$

per una costante opportuna $c > 0$ indipendente da u. Il procedimento è piuttosto articolato e si basa sul fatto che stimiamo il decadimento di $u_{x,r}$ come funzione di r. Siano $0 < r < \rho \leq d_\Omega$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
Ar^n \left|u_{x,r} - u_{x,\rho}\right|^p &\leq |\Omega_r(x)| \left|u_{x,r} - u_{x,\rho}\right|^p \\
&= \int_{\Omega_r(x)} \left|u_{x,r} - u_{x,\rho}\right|^p \, dy \\
&\leq 2^{p-1}\left[\int_{\Omega_r(x)} \left|u_{x,r} - u(y)\right|^p \, dy + \int_{\Omega_r(x)} \left|u_{x,\rho} - u(y)\right|^p \, dy\right] \\
&\leq 2^{p-1}\left[\int_{\Omega_r(x)} \left|u_{x,r} - u(y)\right|^p \, dy + \int_{\Omega_\rho(x)} \left|u_{x,\rho} - u(y)\right|^p \, dy\right] \\
&\leq 2^{p-1}[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}(r^\lambda + \rho^\lambda) \\
&\leq 2^p[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}\rho^\lambda.
\end{aligned}$$

Segue che

$$A^{\frac{1}{p}} \left|u_{x,r} - u_{x,\rho}\right| \leq 2[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \frac{\rho^{\lambda/p}}{r^{n/p}} = 2[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n/p} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Fissiamo $R \in (0, d_\Omega]$ e $k \in \mathbb{N}$; se $r = 2^{-(k+1)}R$ e $\rho = 2^{-k}R$, otteniamo che

$$\left|u_{x,R/2^{k+1}} - u_{x,R/2^k}\right| \leq 2A^{-\frac{1}{p}}[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} 2^{n/p} \left(\frac{R}{2^k}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}} = c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \left(\frac{R}{2^k}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}}, \tag{4.1}$$

avendo posto $c = A^{-\frac{1}{p}} 2^{1+\frac{n}{p}}$ (indipendente da u, x, R, k). Sommando queste disuguaglianze per $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ otteniamo che

$$\begin{aligned}
\left|u_{x,R/2^N} - u_{x,R}\right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left|u_{x,R/2^{k+1}} - u_{x,R/2^k}\right| \\
&\leq c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{R}{2^k}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}} \\
&= c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} R^{\frac{\lambda-n}{p}} \left(\frac{2^{N\frac{n-\lambda}{p}} - 1}{2^{\frac{n-\lambda}{p}} - 1}\right) \\
&\leq c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \left(\frac{R}{2^N}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Precisiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che, essendo $\frac{n-\lambda}{p} > 0$, allora $2^{\frac{n-\lambda}{p}} - 1 > 0$; quindi si ha che

$$0 < \frac{2^{N\frac{n-\lambda}{p}} - 1}{2^{\frac{n-\lambda}{p}} - 1} \leq c2^{N\frac{n-\lambda}{p}},$$

per una costante $c > 0$ dipendente solo da n, p, λ.

Torniamo al nostro problema di stimare $|u_{x,r}|^p$, avendo scelto $x \in \overline{\Omega}$ e $r \in (0, d_\Omega]$. Prendiamo $R \in (d_\Omega/2, d_\Omega]$ e $N \in \mathbb{N}$ tale che $r = R/2^N$. Innanzitutto osserviamo che

$$|u_{x,R}|^p = \left|\fint_{\Omega_R(x)} u(y) \, dy\right|^p \leq \fint_{\Omega_R(x)} |u(y)|^p \, dy \leq \frac{2}{Ad_\Omega^n} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Allora, abbiamo che

$$\begin{aligned}
|u_{x,r}|^p &\le 2^{p-1}\left(|u_{x,r}-u_{x,R}|^p + |u_{x,R}|^p\right)\\
&\le 2^{p-1}c[u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}\left(\frac{R}{2^N}\right)^{\lambda-n} + \frac{2^p}{Ad_\Omega^n}\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\\
&\le c\left(r^{\lambda-n}[u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} + \frac{1}{d_\Omega^n}\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\\
&= cr^{\lambda-n}\left([u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} + \frac{r^{n-\lambda}}{d_\Omega^n}\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\\
&\le cr^{\lambda-n}\|u\|^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}(1+d_\Omega^{-\lambda}).
\end{aligned}$$

Precisiamo che nell'ultima disuguaglianza abbiamo ancora usato il fatto che $n-\lambda>0$, quindi $r^{n-\lambda}\le d_\Omega^{n-\lambda}$. Deduciamo che per ogni $x\in\Omega$ per ogni $r\in(0,d_\Omega]$ vale che

$$r^{n-\lambda}|u_{x,r}|^p \le c(1+d_\Omega^{-\lambda})\|u\|^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 4.3.10 (Campanato)**.** *Sia $p\in[1,+\infty)$; supponiamo che Ω sia un aperto di tipo A (vedi 4.3.7). Se $\lambda>n$, poniamo $\alpha=\frac{\lambda-n}{p}$; allora gli spazi $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ e $C^{0,\alpha}(\Omega)$ sono isomorfi, nel senso che le due inclusioni sono ben definite e continue. In particolare, se $\lambda>n+p$ e Ω è connesso, lo spazio $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ coincide con l'insieme delle funzioni costanti.*

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo con $c(p,n,\lambda,\Omega)>0$ una costante (indipendente dalle funzioni u considerate) che può cambiare da linea a linea. Notiamo anche che $\lambda=n+\alpha p$.

Step 1): Mostriamo che senza ipotesi su Ω l'inclusione $C^{0,\alpha}(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ è ben definita e continua. Siano $u\in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $x\in\overline{\Omega}$ e $r\in(0,d_\Omega]$. Per ogni $y,y'\in\Omega_r(x)$ vale che

$$|u(y)-u(y')|\le[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}|y-y'|^\alpha\le[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}(2r)^\alpha;$$

allora per ogni $y\in\Omega_r(x)$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
|u(y)-u_{x,r}| &= \left|u(y)-\fint_{\Omega_r(x)}u(y')\,dy'\right|\\
&\le\fint_{\Omega_r(x)}|u(y)-u(y')|\,dy'\\
&\le[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}(2r)^\alpha.
\end{aligned}$$

Integrando rispetto a y che varia in $\Omega_r(x)$, troviamo che

$$\int_{\Omega_r(x)}|u(y)-u_{x,r}|^p\,dy\le|\Omega_{x,r}|\,[u]^p_{C^{0,\alpha}(\Omega)}(2r)^{p\alpha}\le cr^{n+p\alpha}[u]^p_{C^{0,\alpha}(\Omega)}=cr^\lambda[u]^p_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Deduciamo che

$$[u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}\le c[u]^p_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Allora segue immediatamente che

$$\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}\le c\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Step 2): Mostriamo che se Ω è un aperto di tipo A, l'inclusione $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ è ben definita e continua. Innanzitutto, dobbiamo definire un rappresentante canonico per le funzioni in $\mathscr{L}^{n,p}(\Omega)$ che sia hölderiano; per fare questo utilizzeremo la proprietà di decadimento di $u_{x,r}$ come funzione di r mostrata nel teorema 4.3.9. Abbiamo verificato (vedi (4.1)) che esiste una costante costante $c > 0$ tale che per ogni $u \in \mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, per ogni $R \in (0, d_\Omega]$, per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che

$$\left| u_{x,R/2^{k+1}} - u_{x,R/2^k} \right| \leq c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \left(\frac{R}{2^k} \right)^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Fissiamo $R \in (0, d_\Omega]$ e $u \in \mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)$; essendo $\lambda - n > 0$, deduciamo che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ la successione $(u_{x,R/2^k})_k$ è di Cauchy (rispetto a k). Pertanto, possiamo puntualmente ben definire la funzione

$$\tilde{u}(x) := \lim_{k\to+\infty} \fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} u(y)\ dy.$$

Vogliamo mostrare che $\tilde{u}$ non dipende dalla scelta di R; questo fatto sarà cruciale per verificare che $\tilde{u}$ è α-hölderiana. Fissiamo $x \in \overline{\Omega}$; dalla definizione di $\tilde{u}$ segue che

$$\begin{aligned}
&\fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|^p\ dy \\
&\qquad \leq 2^{p-1} \left(\fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} \left| u(y) - u_{x,R/2^k} \right|^p\ dy + \fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} \left| u_{x,R/2^k} - \tilde{u}(x) \right|^p\ dy. \right)
\end{aligned}$$

Studiamo separatamente l'andamento dei due addendi per $k \to +\infty$. Per quanto riguarda il secondo addendo, abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} \left| u_{x,R/2^k} - \tilde{u}(x) \right|^p\ dy = \lim_{k\to+\infty} \left| u_{x,R/2^k} - \tilde{u}(x) \right|^p = 0.$$

Per quanto riguarda il primo addendo, invece, ricordando che Ω è un aperto di tipo A (vedi 4.3.7), abbiamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} \left| u(y) - u_{x,R/2^k} \right|^p\ dy &= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left| \Omega_{R/2^k}(x) \right|} \int_{\Omega_{R/2^k}} \left| u(y) - u_{x,R/2^k}(x) \right|^p\ dy \\
&\leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{A} \left(\frac{R}{2^k} \right)^{-n} \int_{\Omega_{R/2^k}} \left| u(y) - u_{x,R/2^k}(x) \right|^p\ dy \\
&\leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{A} \left(\frac{R}{2^k} \right)^{\lambda-n} [u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

perchè $\lambda - n > 0$. Deduciamo che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ vale che

$$\lim_{k\to+\infty} \fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|^p\ dy = 0.$$

Siccome Ω è di tipo A, ricordiamo che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$ vale che

$$Ar^n \leq |\Omega_r(x)| \leq |B_1|\, r^n.$$

Allora, per ogni $x \in \overline{\Omega}$ per ogni $r \in (0, d_\Omega]$, preso $k \in \mathbb{N}$ tale che $r \in (R/2^{k+1}, R/2^k]$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\fint_{\Omega_r(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|^p \ dy &\leq \frac{1}{|\Omega_r(x)|} \int_{\Omega_{R/2^k}(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|^p \ dy \\
&\leq \frac{\left|\Omega_{R/2^k}(x)\right|}{\left|\Omega_{R/2^{k+1}}(x)\right|} \fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|^p \ dy \\
&\leq \frac{R^n 2^{-kn} |B_1|}{A R^n 2^{-n(k+1)}} \fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|^p \ dy \\
&= \frac{|B_1| \, 2^n}{A} \fint_{\Omega_{R/2^k}(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|^p \ dy.
\end{aligned}$$

Concludiamo che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ vale che

$$\lim_{r \to 0} \fint_{\Omega_r(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|^p \ dy = 0.$$

Da questo si deduce immediatamente che

$$\lim_{r \to 0} \fint_{\Omega_r(x)} u(y) \ dy = \tilde{u}(x),$$

cioè che $\tilde{u}$ non dipende dalla scelta del raggio iniziale R.

Mostriamo che $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Abbiamo mostrato nel teorema 4.3.9 che esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $x \in \overline{\Omega}$, per ogni $R \in (0, d_\Omega]$ per ogni $N \in \mathbb{N}$ vale che

$$\left|u_{x,R/2^N} - u_{x,R}\right| \leq c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} R^{\frac{\lambda-n}{p}} \left(\frac{2^{N\frac{n-\lambda}{p}} - 1}{2^{\frac{n-\lambda}{p}} - 1} \right);$$

essendo $n - \lambda < 0$ e $\alpha = \frac{\lambda - n}{p}$, se prendiamo il limite per $N \to +\infty$, otteniamo che

$$|\tilde{u}(x) - u_{x,R}| \leq c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} R^\alpha \left(\frac{1}{1 - 2^{\frac{n-\lambda}{p}}} \right) \leq c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} R^\alpha.$$

Precisiamo che in questo passaggio è fondamentale sapere che $\tilde{u}$ non dipende dalla scelta del raggio iniziale R. Prendiamo $x, y \in \overline{\Omega}$ e scegliamo $R = |x - y|$. Segue che

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| &\leq |\tilde{u}(x) - u_{x,R}| + |u_{x,R} - u_{y,R}| + |\tilde{u}(y) - u_{y,R}| \\
&\leq 2c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} R^\alpha + |u_{x,R} - u_{y,R}| \\
&= 2c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} |x - y|^\alpha + |u_{x,R} - u_{y,R}|.
\end{aligned}$$

Siccome la costante c dipende solo da p, n, λ, Ω, dobbiamo soltanto stimare $|u_{x,R} - u_{y,R}|$. Osservando che $\Omega_{R/2}(y) \subseteq \Omega_R(x)$, deduciamo che valgono le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned}
A \left(\frac{R}{2}\right)^n |u_{x,R} - u_{y,R}|^p &\leq \int_{\Omega_{R/2}(y)} |u_{x,R} - u_{y,R}|^p \ dz \\
&\leq 2^{p-1} \left(\int_{\Omega_{R/2}(y)} |u_{x,R} - u(z)|^p \ dz + \int_{\Omega_{R/2}(y)} |u_{y,R} - u(z)|^p \ dz \right) \\
&\leq 2^{p-1} \left(\int_{\Omega_R(x)} |u_{x,R} - u(z)|^p \ dz + \int_{\Omega_R(y)} |u_{y,R} - u(z)|^p \ dz \right) \\
&\leq 2^p R^\lambda [u]^p_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Deduciamo che

$$|u_{x,R} - u_{y,R}| \leq c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} R^{\frac{\lambda-n}{p}} = c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)} R^{\alpha}.$$

Questo è sufficiente a concludere che $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e vale la stima

$$[\tilde{u}]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c[u]_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

Infine, osserviamo che $\tilde{u}$ coincide con u in tutti i punti di Lebesgue per u, cioè quasi ovunque in Ω. A questo punto, usando il teorema fondamentale del calcolo integrale e il fatto che u è α-hölderiana, è immediato stimare $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$ dall'alto con $\|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Concludiamo la dimostrazione osservando che se $\lambda > n + p$ e Ω è connesso, lo spazio $C^{0,\alpha}(\Omega)$ coincide con l'insieme delle funzioni costanti. □

Osservazione 4.3.11. Nelle dimostrazioni dei teoremi 4.3.9 e 4.3.10 le inclusioni a valori negli spazi di Campanato sono sempre ben definite. Questo dice che, in qualche senso, gli spazi di Morrey e di Hölder sono più "naturali" degli spazi di Campanato. Tuttavia, questi ultimi hanno il pregio di non essere mai banali, a differenza degli spazi di Morrey, e più maneggevoli rispetto agli spazi di Hölder, avendo una caratterizzazione integrale e non puntuale.

4.4 Legame con gli spazi di Sobolev

Vogliamo studiare la relazione tra gli spazi di Campanato e gli spazi di Sobolev. In particolare, vogliamo mostrare che una funzione in uno spazio di Sobolev con derivata debole in uno spazio di Campanato ha ulteriori proprietà di regolarità. Questo risultato sarà molto utile nel seguito.

Premettiamo la dimostrazione di una disuguaglianza classica, che presentiamo nella forma seguente per evidenziare le proprietà di riscalamento della costante.

Lemma 4.4.1 (Disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger)**.** *Siano $B_r(x_0)$ una palla in $\mathbb{R}^n$ e $p \in [1, +\infty)$. Esiste una costante $c(n,p) > 0$ indipendente da r e da x_0 tale che per ogni $u \in W^{1,p}(B_r(x_0))$ vale che*

$$\int_{B_r(x_0)} \left|u - u_{B_r(x_0)}\right|^p \, dx \leq cr^p \left\|\nabla u\right\|^p_{L^p(B_r(x_0))}.$$

Dimostrazione. **Step 1)**: Innanzitutto notiamo che la disuguaglianza è invariante per traslazione, quindi si può supporre che $x_0 = 0$. Mostriamo con un argomento di riscalamento che è possibile ridursi al caso in cui $r = 1$. Supponiamo che la disuguaglianza valga in questo caso. Siano $r > 0$ e $u \in W^{1,p}(B_r)$. Notiamo che $u_r(x) := u(rx)$ è una funzione in $W^{1,p}(B_1)$. Sappiamo che esiste una costante $c(n,p) > 0$ (indipendente da u e da r) tale che

$$\int_{B_1} |u_r(x) - (u_r)_{B_1}|^p \, dx \leq c \int_{B_1} |\nabla u_r(x)|^p \, dx \tag{4.3}$$

Innazitutto osserviamo che

$$(u_r)_{B_1} = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} u(rx) \, dx = \frac{1}{r^n |B_1|} \int_{B_r} u(y) \, dy = u_{B_r}.$$

Esplicitando i termini della disuguaglianza (4.3) ed effettuando il cambio di variabili $y = rx$, troviamo

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |u(y) - u_{B_r}|^p \ dy &= r^n \int_{B_1} |u_r(x) - (u_r)B_1|^p \ dx \\ &\leq cr^n \int_{B_1} |\nabla u_r(x)|^p \ dx \\ &= cr^{n+p} \int_{B_1} |\nabla u(rx)|^p \ dx \\ &= cr^p \int_{B_r} |\nabla u|^p \ dy. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Step 2): Mostriamo che la disuguaglianza cercata vale in B_1. Notiamo che possiamo limitarci a mostrarla per le funzioni $u \in W^{1,p}(B_1)$ a media nulla. Supponiamo per assurdo che esista una successione $(u_n)_n$ di funzioni in $W^{1,p}(B_1)$ a media nulla tale che

$$\|u_n\|^p_{L^p(B_1)} = 1, \quad \|\nabla u_n\|^p_{L^p(B_1)} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema di immersione compatta, a meno di passare ad ulteriori sottosuccessioni, esiste una funzione $u \in L^p(B_1)$ tale che $u_n \to u$ in $L^p(B_1)$. In particolare, deduciamo che $\|u\|_{L^p(B_1)} = 1$ e che u ha media nulla. Tuttavia, sapendo che $\nabla u_n \to 0$ in $L^p(B_1)$, deduciamo che $u \in W^{1,p}(B_1)$ e $\nabla u = 0$. Essendo B_1 connesso, deduciamo che u è costante. Allora, le condizioni $\|u\|_{L^p(B_1)} = 1$ e $u_{B_1} = 0$ sono chiaramente incompatibili. □

Osservazione 4.4.2. La disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger vale per tutti gli aperti limitati regolari e connessi, con la stessa dimostrazione presentata in 4.4.1 (si veda il secondo passo). In questi casi, però, non vale la proprietà di riscalamento nella forma enunciata.

Evidenziamo una semplice proprietà, che sarà decisiva in seguito.

Osservazione 4.4.3. Sia data una funzione $f \in L^2(\Omega)$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto di misura finita. Vale che

$$\int_\Omega |f - f_\Omega|^2 \ dx = \min_{s \in \mathbb{R}} \int_\Omega |f - s|^2 \ dx.$$

Infatti, funzione di variabile reale

$$\varphi(s) := \int_\Omega |f - s|^2 \ dx = \int_\Omega f^2 \ dx - 2s \int_\Omega f \ dx + s^2 |\Omega|$$

è una parabola con la concavità verso l'alto di vertice f_Ω.

Il legame tra gli spazi di Morrey-Campanato e gli spazi di Sobolev può essere stabilito in maniera semplice grazie alla disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger (vedi 4.4.1) e alla proprietà evidenziata in 4.4.3. Presentiamo il risultato seguente nel caso in cui $p = 2$, perchè sarà quello che utilizzeremo in seguito; precisiamo che vale un teorema analogo per $p \in [1, +\infty)$.

Teorema 4.4.4. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $\lambda \in [0, n)$. Se $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ e ∇u appartiene allo spazio di Campanato $\mathscr{L}^{2,\lambda}_{loc}(\Omega)$ (vedi 4.3.1), allora $u \in \mathscr{L}^{2,\lambda+2}_{loc}(\Omega)$. Inoltre, per ogni coppia di aperti $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ esiste una costante $c(n, \Omega, \Omega_0, \Omega_1) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che*

$$[u]_{\mathscr{L}^{2,\lambda+2}(\Omega_0)} \leq c \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{\mathscr{L}^{2,\lambda}(\Omega_1)} .$$

In particolare, vale che

$$\|u\|_{\mathscr{L}^{2,\lambda+2}(\Omega_0)} \leq c \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{\mathscr{L}^{2,\lambda}(\Omega_1)} + \|u\|_{0,2,\Omega_1} ;$$

se $\lambda + 2 > n$, detto $\gamma := 1 - \frac{n-\lambda}{2}$, vale che $u \in C^{0,\gamma}(\Omega_0)$ e vale la stima

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega_0)} \leq c \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{\mathscr{L}^{2,\lambda}(\Omega_1)} + \|u\|_{0,2,\Omega_1} .$$

Dimostrazione. Fissiamo una coppia di aperti $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$; per semplicità denotiamo con $c(n, \Omega, \Omega_0, \Omega_1) > 0$ una costante indipendente da ogni altro parametro, che può cambiare da linea a linea. Possiamo supporre che Ω_0 e Ω_1 siano aperti con bordo di classe C^1 (notiamo che sono anche aperti di tipo A); infatti, se mostriamo che la tesi vale per tutte le coppie di aperti con bordo C^1 relativamente compatti in Ω, allora deduciamo che vale per qualsiasi coppia di aperti relativamente compatti in Ω (infatti Ω ha un'esaustione in compatti che siano la chiusura di aperti con bordo C^1).

Sia $0 < \delta_0 < \operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega^c) > 0$. Possiamo supporre che $\delta_0/2 < \operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega_1^c)$. Sia $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che $\nabla u \in \mathscr{L}^{2,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dati $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ e $r < \delta_0/2$, valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0 \cap B_r(x_0)} \left| u - u_{\Omega_0 \cap B_r(x_0)} \right|^2 \, dx &\leq \int_{\Omega_0 \cap B_r(x_0)} \left| u - u_{B_r(x_0)} \right|^2 \, dx \qquad (4.5)\\
&\leq \int_{B_r(x_0)} \left| u - u_{B_r(x_0)} \right|^2 \, dx \\
&\leq c r^2 \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \qquad (4.6)\\
&\leq c r^{\lambda+2} \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_1)} \qquad (4.7)\\
&\leq c r^{\lambda+2} \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,\lambda}(\Omega_1)} . \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Precisiamo che in (4.5) abbiamo usato la proprietà espressa in 4.4.3, in (4.6) la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger (vedi 4.4.1), in (4.7) la definizione di norma di Morrey (vedi 4.2.1) e il fatto che la palla $B_r(x_0)$ è relativamente compatta in Ω_1 (per la scelta di r) e in (4.8) l'equivalenza tra gli spazi di Morrey e di Campanato (vedi 4.3.9). Se

$r \in [\delta_0/2, d_{\Omega_0}]$, è immediato trovare che

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0 \cap B_r(x_0)} \left| u - u_{\Omega_0 \cap B_r(x_0)} \right|^2 \, dx &\leq \int_{\Omega_0} \left| u - u_{\Omega_0} \right|^2 \, dx \\
&\leq c \left\| \nabla u \right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \\
&\leq c r^{2+\lambda} \left(\frac{2}{\delta_0} \right)^{2+\lambda} \left\| \nabla u \right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \\
&\leq c r^{2+\lambda} \left(\frac{2}{\delta_0} \right)^{2+\lambda} \left\| \nabla u \right\|^2_{\mathscr{L}^{2,\lambda}(\Omega_0)}
\end{aligned}$$

In ogni caso, abbiamo mostrato che esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ per ogni $r \in (0, d_{\Omega_0}]$ vale che

$$\int_{\Omega_0 \cap B_r(x_0)} \left| u - u_{\Omega_0 \cap B_r(x_0)} \right|^2 \, dx \leq c r^{\lambda+2} \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i u \right\|^2_{\mathscr{L}^{2,\lambda}(\Omega_1)} .$$

Dividendo per $r^{\lambda+2}$ e passando all'estremo superiore su $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ e $r \in (0, d_{\Omega_0}]$ troviamo la prima parte della tesi. La seconda parte, invece, segue banalmente dalla definizione della norma di Campanato (vedi 4.3.3) e dal teorema 4.3.10. □

4.5 Appendice: lo spazio BMO

Presentiamo brevemente lo spazio di funzioni BMO (bounded mean oscillation), per la sua importanza capitale nella teoria della regolarità dei problemi ellittici. In questo contesto, però, non presenteremo risultati di regolarità in tale spazio, quindi ci limitiamo ad una introduzione molto stringata. Sia $Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un cubo n-dimensionale.

Definizione 4.5.1 (BMO)**.** Sia $u \in L^1(Q_0)$; si dice che $u \in BMO(Q_0)$ se vale

$$[u]_{BMO(Q_0)} \coloneqq \sup_Q \fint_Q |u - u_Q| \, dx < +\infty,$$

dove l'estremo superiore è fatto su tutti i cubi $Q \subseteq Q_0$ n-dimensionali con lati paralleli a quelli di Q_0. Poniamo

$$\|u\|_{BMO(Q_0)} \coloneqq \|u\|_{L^1(Q_0)} + [u]_{BMO(Q_0)}.$$

Osservazione 4.5.2. La quantità $[\cdot]_{BMO(Q_0)}$ definita in 4.5.1 è una seminorma sullo spazio $BMO(Q_0)$; invece, la quantità $\|\cdot\|_{BMO(Q_0)}$ è una norma in $BMO(Q_0)$.

Osservazione 4.5.3. Lo spazio $BMO(Q_0)$ è isomorfo allo spazio di Campanato $\mathscr{L}^{1,n}(Q_0)$ (vedi 4.3.1): infatti, in un caso si lavora con cubi concentrici, nell'altro con palle concentriche; tuttavia è evidente che è possibile stimare la media sulle palle con la media sui cubi e viceversa.

Definizione 4.5.4 (Spazio di John-Nirenberg)**.** Siano dato un cubo n-dimensionale $Q \subseteq Q_0$ con lati paralleli a quelli di Q_0, $u \in L^1(Q_0)$ e $\sigma > 0$. Si pone

$$S(\sigma, Q) \coloneqq \{x \in Q \mid |u(x) - u_Q| > \sigma\}.$$

Si dice che $u \in \mathcal{E}_0(Q_0)$ (spazio di John-Nirenberg) se esistono due costanti positive H, β tali che per ogni $\sigma > 0$ per ogni cubo n-dimensionale $Q \subseteq Q_0$ con lati paralleli a quelli di Q_0 vale che

$$|S(\sigma, Q)| \leq He^{-\beta\sigma} |Q| .$$

Osservazione 4.5.5. Se $u \in \mathcal{E}_0(Q_0)$, allora $u \in \mathscr{L}^{p,n}(Q_0)$ per ogni $p \geq 1$. Infatti, preso un cubo n-dimensionale $Q_0 \subseteq Q$ con lati paralleli a quelli di Q_0, usando una formula classica per calcolare la norma L^p di una funzione integrando le misure dei sopralivelli, troviamo che

$$\begin{aligned}
\int_Q |u - u_Q|^p \ dx &= p \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1} |S(\sigma, Q)| \ d\sigma \\
&\leq |Q| \, Hp \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1} e^{-\beta\sigma} \ d\sigma \\
&= \frac{|Q| \, Hp}{\beta^p} \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1} e^{-\sigma} \ d\sigma \\
&= \frac{|Q| \, Hc(p)}{\beta^p}.
\end{aligned}$$

Deduciamo che

$$[u]^p_{\mathscr{L}^{p,n}(\Omega)} \leq \frac{c(p)H}{\beta^p}.$$

In effetti, vale anche il viceversa; si può mostrare che se $u \in \mathscr{L}^{p,n}(Q_0)$ per qualche $p \geq 1$, allora $u \in \mathcal{E}_0(Q_0)$.

Vale il risultato seguente, che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema 4.5.6. *Sono fatti equivalenti:*

- $u \in \mathscr{L}^{p,n}(Q_0)$ *per ogni* $p \geq 1$*;*
- $u \in \mathcal{E}_0(Q_0)$*;*
- *esiste* $p \geq 1$ *tale che* $u \in \mathscr{L}^{p,n}(Q_0)$.

Corollario 4.5.7. *Gli spazi di Campanato* $\mathscr{L}^{p,n}(Q_0)$ *sono tutti equivalenti tra loro.*

Osservazione 4.5.8. La definizione degli spazi BMO può essere data anche per aperti che non siano cubi. Le funzioni in BMO non sono generalmente limitate: infatti, la funzione $\log(|x|)$ è in $BMO(\mathbb{R}^n)$ ma non in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tuttavia, si può dimostrare che

$$BMO(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Capitolo 5

Regolarità negli spazi di Morrey e Campanato

Gli spazi di Morrey e di Campanato sono stati introdotti per studiare la regolarità delle soluzioni di problemi ellittici. Data una soluzione $u \in H^1_{\text{loc}}$ del problema uniformemente ellittico

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a_{i,j} D_j u] = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i,$$

cerchiamo risultati del tipo

$$a_{i,j} \in C^0,\ \ f_i \in L^{2,\lambda}_{\text{loc}} \Rightarrow \nabla u \in L^{2,\lambda}_{\text{loc}}$$

$$a_{i,j} \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}},\ \ f_i \in \mathscr{L}^{2,\lambda}_{\text{loc}} \Rightarrow \nabla u \in \mathscr{L}^{2,\lambda}_{\text{loc}}.$$

In altri termini, vogliamo ottenere la continuità della derivata. Questi risultati rientrano nella teoria di Schauder.

5.1 Stime fondamentali per la regolarità all'interno

5.1.1 Disuguaglianza di Caccioppoli

Il primo passo essenziale per lo studio della regolarità delle soluzioni di problemi ellittici è la disuguaglianza di Caccioppoli, che mostra un fenomeno di autoregolazione delle soluzioni dei problemi uniformemente ellittici.

Teorema 5.1.1 (Disuguaglianza di Caccioppoli). *Siano $R > 0$, $A = (a_{i,j})$ una matrice uniformemente ellittica in $B_R(x_0)$ con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) e coefficienti in $L^\infty(B_R(x_0))$ e $f_i \in L^2(B_R(x_0))$. Sia $u \in H^1(B_R)$ una soluzione debole dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a_{i,j} D_j u] = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i, \tag{5.1}$$

Esiste una costante $c(\|a_{i,j}\|_{L^\infty(B_R(x_0))}, n, \nu) > 0$ (indipendente da R, f_i e u) tale che per ogni $r \in (0, R)$ per ogni $s, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ vale che

$$\|\nabla u\|^2_{0,2,B_r(x_0)} \leq c \left[\frac{1}{(R-r)^2} \int_{B_R(x_0)} |u(x) - s|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} |f_j(x) - s_j|^2 \ dx \right]. \tag{5.2}$$

Dimostrazione. **Step 1)**: A meno di una traslazione, possiamo supporre che $x_0 = 0$. Notiamo che la disuguaglianza (5.2) è invariante per riscalamento. Supponiamo di averla dimostrata nel caso in cui $R = 1$. Sia dato $R > 0$; poniamo

$$u^R(x) \coloneqq u(Rx), \quad a^R_{i,j}(x) \coloneqq a_{i,j}(Rx), \quad f^R_i(x) \coloneqq f_i(Rx).$$

Notiamo che la matrice $A^R = (a^R_{i,j})$ è uniformemente ellittica in B_1 con lo stesso coefficiente di ellitticità $\nu > 0$ di A e che i suoi coefficienti sono in $L^\infty(B_1)$ con la stessa norma L^∞ di A in B_R. Questo dice che la costante c non varia con R; inoltre, le funzioni f^R_i sono in $L^2(B_1)$.

La funzione u^R appartiene a $H^1(B_1)$; inoltre, con un cambio di variabile $y = Rx$ verifichiamo che è soluzione debole dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a^R_{i,j} D_j u^R] = \sum_{i=1}^n D_i(Rf^R_i), \tag{5.3}$$

in B_1. Data una funzione test $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$, ponendo $\varphi^R(x) \coloneqq \varphi\left(\frac{x}{R}\right)$ e notando che φ^R è una funzione test in $C^\infty_c(B_R)$, notiamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \int_{B_1} a^R(x) D_j u^R(x) D_i\varphi(x)\, dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_{B_1} a(Rx) R D_j u(Rx) D_i \varphi(x)\, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{R}{R^n} \int_{B_R} a(y) D_j u(y) D_i \varphi\left(\frac{y}{R}\right)\, dy \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{R^2}{R^n} \int_{B_R} a(y) D_j u(y) D_i \varphi^R(y)\, dy \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{R^2}{R^n} \int_{B_R} f_i(y) D_i \varphi^R(y)\, dy \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{R}{R^n} \int_{B_R} f_i(y) D_i \varphi\left(\frac{y}{R}\right)\, dy \\
&= \sum_{i=1}^n R \int_{B_1} f_i(Rx) D_i \varphi(x)\, dx \\
&\sum_{i=1}^n \int_{B_1} R f^R_i(x) D_i \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Sappiamo che esiste una costante $c(\left\|a^R_{i,j}\right\|_{L^\infty(B_1)}, n, \nu) > 0$ (indipendente da f^R_i e u^R) tale che per ogni $r \in (0,1)$ per ogni $s, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ vale che

$$\left\|\nabla u^R\right\|^2_{0,2,B_r} \le c\left[\frac{1}{(1-r)^2}\int_{B_1}\left|u^R(x) - s\right|^2\, dx + \sum_{i=1}^n \int_{B_1}\left|Rf^R_j(x) - s_j\right|^2\, dx\right]. \tag{5.4}$$

Espandendo i termini, otteniamo che

$$\begin{aligned}
&R^2 \sum_{i=1}^n \int_{B_1} |D_i u(Rx)|^2\, dx \\
&\quad \le c\left[\frac{1}{(1-r)^2}\int_{B_1} |u(Rx) - s|^2\, dx + \sum_{i=1}^n \int_{B_1} |Rf_j(Rx) - s_j|^2\, dx\right].
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Effettuando il cambio di variabili $y = Rx$ e semplificando il fattore R^{-n} che moltiplica tutti i termini, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i u(y)|^2 \ dx$$
$$\leq c \left[\frac{1}{(R - rR)^2} \int_{B_R} |u(y) - s|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left| f_j(y) - \frac{s_j}{R} \right|^2 \ dx \right]. \tag{5.6}$$

Osservando che al variare di $r \in (0,1)$ e di $s_j \in \mathbb{R}$ le quantità rR e s_j/R variano rispettivamente in $(0,R)$ e $\mathbb{R}$, otteniamo la disuguaglianza (5.2).

Step 2): Supponiamo $x_0 = 0$ e $R = 1$; denotiamo con $c > 0$ una costante dipendente esclusivamente da $\|a_{i,j}\|_{L^\infty(B_1)}$, ν e n. Tale costante può cambiare da linea a linea.

Per definizione, per ogni funzione test $\varphi \in H_0^1(B_1)$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j u D_i \varphi \ dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_1} f_i D_i \varphi \ dx. \tag{5.7}$$

Dati $s, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$ notiamo che per ogni $\varphi \in H_0^1(B_1)$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j (u - s) D_i \varphi \ dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_1} (f_i - s_i) D_i \varphi \ dx. \tag{5.8}$$

Fissiamo $r \in (0,1)$. Possiamo scegliere una funzione cut-off $\theta \in C^\infty(B_r, [0,1])$ tale che $\theta(x) = 1$ se $x \in B_r$ e inoltre

$$|D_i \theta(x)| \leq \frac{c}{1 - r}$$

per ogni $x \in B_1$, per una costante $c > 0$ opportuna dipendente esclusivamente da n. Scegliamo come funzione test in (5.8) $\varphi = \theta^2[u - s]$ (notiamo che è in $H_0^1(B_1)$). Sviluppando i termini in (5.8), otteniamo

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} [a_{i,j} D_j (u - s) \theta D_i (\theta(u - s)) + a_{i,j} D_j (\theta - s)(D_i \theta) \theta (u - s)] \ dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{B_1} [(f_i - s_i) \theta D_i (\theta(u - s)) + (f_i - s_i)(D_i \theta)(\theta(u - s))] \ dx$$

Allora, deduciamo che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j (\theta(u - s)) D_i (\theta(u - s)) \ dx$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j \theta D_i (\theta(u - s))(u - s) \ dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j (u - s) \theta D_i (\theta(u - s)) \ dx$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j \theta D_i (\theta(u - s))(u - s) \ dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j (\theta - s)(D_i \theta) \theta (u - s) \ dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{B_1} (f_i - s_i) \theta D_i (\theta(u - s)) \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_1} (f_i - s_i)(D_i \theta)(\theta(u - s)) \ dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j \theta D_i(\theta(u-s))(u-s)\ dx \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j(\theta - s)(D_i\theta)\theta(u-s)\ dx \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j\theta D_i\theta (u-s)^2\ dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_1} (f_i - s_i)\theta D_i(\theta(u-s))\ dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_1} (f_i - s_i)(D_i\theta)\theta(u-s)\ dx
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Stimiamo separatamente ciascun dei cinque addendi, utilizzando disuguaglianze di Hölder e di Cauchy-Schwarz. Per il primo addendo, notiamo che

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j\theta D_i(\theta(u-s))(u-s)\ dx \right| \leq \int_{B_1} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|\, |D_j\theta|\, |D_i(\theta(u-s))|\, |u-s|\ \ dx \\
&\quad \leq c \int_{B_1} \left(\sum_{j=1}^{n} |D_j\theta|\, |u-s| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i(\theta(u-s))| \right)\ dx \\
&\quad \leq c \int_{B_1} \left(\sum_{j=1}^{n} |D_j\theta|^2 |u-s|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i(\theta(u-s))|^2 \right)^{\frac{1}{2}}\ dx \\
&\quad \leq c \left(\int_{B_1} \sum_{j=1}^{n} |D_j\theta|^2 |u-s|^2\ \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_1} \sum_{i=1}^{n} |D_i(\theta(u-s))|^2\ \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq \frac{c^2}{2\varepsilon} \int_{B_1} \sum_{j=1}^{n} |D_j\theta|^2 |u-s|^2\ \ dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_1} \sum_{i=1}^{n} |D_i(\theta(u-s))|^2\ \ dx \\
&\quad \leq \frac{c^2}{2\varepsilon(1-r)^2} \int_{B_1} |u-s|^2\ \ dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_1} \sum_{i=1}^{n} |D_i(\theta(u-s))|^2\ \ dx
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Nel penultimo passaggio abbiamo usato una disuguaglianza di Young pesata

$$|ab| \leq \frac{1}{2\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{2} b^2$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ per ogni $\varepsilon > 0$; precisiamo che sceglieremo in seguito ε e che tutte le costanti sono indipendenti anche da ε. Il secondo addendo si stima in maniera completamente analoga; per ogni $\varepsilon > 0$ otteniamo che

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_1} a_{i,j} D_j\theta D_i(\theta(u-s))(u-s)\ dx \right| \leq \int_{B_1} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|\, |D_j\theta|\, |D_i(\theta(u-s))|\, |u-s|\ \ dx \\
&\quad \leq \frac{c^2}{2\varepsilon(1-r)^2} \int_{B_1} |u-s|^2\ \ dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_1} \sum_{i=1}^{n} |D_i(\theta(u-s))|^2\ \ dx
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Per il terzo addendo, invece, abbiamo che

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{B_1} a_{i,j}D_j\theta D_i\theta(u-s)^2\ dx\right| &\le \int_{B_1}\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|\,|u-s|^2\,|D_i\theta|\,|D_j\theta|\ dx\\ &\le \frac{c}{(1-r)^2}\int_{B_1}|u-s|^2\ dx. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Per il quarto addendo, abbiamo che

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{B_1}(f_i-s_i)\theta D_i(\theta(u-s))\ dx\right| &\le \int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|\,|\theta|\,|D_i(\theta(u-s))|\ dx\\ &\le \int_{B_1}\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{n}|D_i(\theta(u-s))|^2\right)^{\frac12}\ dx\\ &\le \left(\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\ dx\right)^{\frac12}\left(\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|D_i(\theta(u-s))|^2\ dx\right)^{\frac12}\\ &\le \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\ dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|D_i(\theta(u-s))|^2\ dx, \end{aligned} \tag{5.13}$$

dove il parametro $\varepsilon > 0$ verrà scelto in seguito. Per il quinto addento, infine, abbiamo che

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{B_1}(f_i-s_i)(D_i\theta)\theta(u-s)\ dx\right| &\le \int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|\,|D_i\theta|\,|\theta|\,|u-s|\ dx\\ &\le \frac{c}{1-r}\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|\,|u-s|\ dx\\ &\le \frac{c}{1-r}\int_{B_1}\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\right)^{\frac12}\sqrt{n}\,|u-s|\ dx\\ &\le \frac{c}{1-r}\left(\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\ dx\right)^{\frac12}\left(\int_{B_1}|u-s|^2\ dx\right)^{\frac12}\\ &\le \frac12\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\ dx+\frac{c}{(1-r)^2}\int_{B_1}|u-s|\ dx^2. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Dall'uniforme ellitticità della matrice $(a_{i,j})$ e dalle disuguaglianze (5.9), (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) e (5.14) deduciamo che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\begin{aligned}\nu\sum_{i=1}^{n}\int_{B_1}|D_i(\theta(u-s))|^2\ dx &\le \sum_{i,j=1}^{n}\int_{B_1}a_{i,j}D_j(\theta(u-s))D_i(\theta(u-s))\ dx\\ &\le \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{c}{(1-r)^2}\int_{B_1}|u-s|^2\ dx+c\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{B_1}|D_i(\theta(u-s))|^2\ dx\\ &\quad+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\ dx. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ricordiamo che la costante c dipende solo da n, ν e dalla norma infinito della matrice A. Scegliendo $\varepsilon = \frac{\nu}{2c}$ e riordinando i termini, otteniamo che

$$\frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{B_1}|D_i(\theta(u-s))|^2\ dx \le \frac{c}{(1-r)^2}\int_{B_1}|u-s|^2\ dx + c\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\ dx. \quad (5.16)$$

Dividendo per $\frac{\nu}{2}$ e ricordando che $\theta \equiv 1$ su B_r, abbiamo la tesi:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_{B_r}|D_iu|^2\ dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{B_r}|D_i(u-s)|^2\ dx\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\int_{B_1}|D_i(\theta(u-s))|^2\ dx\\ &\le \frac{c}{(1-r)^2}\int_{B_1}|u-s|^2\ dx + c\int_{B_1}\sum_{i=1}^{n}|f_i-s_i|^2\ dx.\end{aligned}$$

□

5.1.2 Il caso dei coefficienti costanti

Dalla disuguaglianza di Caccioppoli seguono alcune stime fondamentali per studiare la regolarità dei problemi ellittici. Iniziamo esaminando il caso in cui i coefficienti siano costanti.

Lemma 5.1.2. *Sia $B_R(x_0)$ una palla in $\mathbb{R}^n$; sia $A = (a_{i,j})$ una matrice (precisiamo che i coefficienti sono costanti) ellittica con coefficiente ν (vedi 1.1.5). Sia $u \in C^\infty(\overline{B_R(x_0)})$ una soluzione dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}D_{i,j}(u) = 0;$$

esiste una costante $c(\nu, n, a_{i,j}) > 0$ indipendente da R tale che per ogni $r \in (0, R)$ vale che

$$\int_{B_r(x_0)}|u(x)|^2\ dx \le c\left(\frac{r}{R}\right)^n\int_{B_R(x_0)}|u(x)|^2\ dx.$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che con un argomento di riscalamento del tutto analogo a quello mostrato esplicitamente nella dimostrazione della disuguaglianza di Caccioppoli (vedi 5.1.1), possiamo assumere che $x_0 = 0$ e $R = 1$.

Per semplicità, denotiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}) > 0$ una costante che dipende esclusivamente da $n, \nu, a_{i,j}$ (indipendente da ogni altro parametro).

Applichiamo la disuguaglianza di Caccioppoli (vedi 5.1.1) scegliendo $s = s_i = 0$ e $f_i = 0$ per $i \in \{1, \dots, n\}$. Per ogni $r_1, r_2 \in (0, 1)$ con $r_1 < r_2$ otteniamo che

$$\int_{B_{r_1}}|\nabla u(x)|^2\ dx \le c\frac{1}{(r_2-r_1)^2}\int_{B_{r_2}}|u(x)|^2\ dx. \quad (5.17)$$

Osserviamo che, essendo l'equazione a coefficienti costanti, per ogni multi-indice α vale che

$$0 = D^\alpha\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}D_{i,j}u\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}D_{i,j}(D^\alpha u).$$

Allora vale la disuguaglianza (5.17) con $D^\alpha u$ al posto di u. Fissiamo $k \in \mathbb{N}^+$, introduciamo i punti equispaziati

$$\frac{1}{2} = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_{k-1} < \sigma_k = 1,$$

cioè $\sigma_i = \frac{i}{2k} + \frac{1}{2}$ per ogni $i \in \{0, \ldots, k\}$. Applichiamo la disuguaglianza (5.17):

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=k-1} \int_{B_{\sigma_0}} |\nabla D^\alpha u|^2 \, dx &\leq \frac{c}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} \sum_{|\alpha|=k-1} \int_{B_{\sigma_1}} |D^\alpha u|^2 \, dx \\
&\leq c(2k)^2 \sum_{|\alpha|=k-2} \int_{B_{\sigma_1}} |\nabla D^\alpha u|^2 \, dx \\
&\leq \frac{c^2(2k)^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)^2} \sum_{|\alpha|=k-2} \int_{B_{\sigma_2}} |D^\alpha u|^2 \, dx \\
&\quad \cdots \\
&\leq c^{k-1}(2k)^{2(k-1)} \sum_{|\alpha|=1} \int_{B_{\sigma_{k-1}}} |D^\alpha u|^2 \, dx \\
&\leq \frac{c^k k^{2(k-1)}}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2} \int_{B_{\sigma_k}} |u|^2 \, dx \\
&= c^k (2k)^{2k} \int_{B_1} |u|^2 \, dx;
\end{aligned}$$

troviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ vale che

$$|u|^2_{k,2,B_{1/2}} \leq \sum_{|\alpha|=k-1} \int_{B_{1/2}} |\nabla D^\alpha u|^2 \, dx \leq c^k (2k)^{2k} \int_{B_1} |u|^2 \, dx. \tag{5.18}$$

Precisiamo che la costante c è indipendente da k. Fissiamo $k_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che $k_0 > n/2$; per il teorema di immersione di Sobolev esiste una costante c dipendente soltanto da n tale che

$$\|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq c \, \|u\|_{k_0,2,B_{1/2}} .$$

Dalla stima (5.18) deduciamo che esiste una costante c dipendente soltanto da $n, \nu, a_{i,j}$ tale che

$$\|u\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} \leq c \int_{B_1} |u(x)|^2 \, dx. \tag{5.19}$$

Fissiamo $r \in (0, 1/2)$; integrando la stima (5.19) in B_r troviamo che

$$\int_{B_r} |u(x)|^2 \, dx \leq c r^n \, \|u\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} \leq c r^n \int_{B_1} |u(x)|^2 \, dx. \tag{5.20}$$

Infine, se $r \in [1/2, 1)$ notiamo banalmente che

$$\int_{B_r} |u(x)|^2 \, dx \leq \int_{B_1} |u(x)|^2 \, dx \leq r^n 2^n \int_{B_1} |u(x)|^2 \, dx. \tag{5.21}$$

Prendendo il massimo tra la costante c in (5.20) e 2^n (vedi (5.21)) otteniamo la tesi. $\square$

Corollario 5.1.3. *Nelle ipotesi del lemma 5.1.2, esiste una costante* $c(\nu, n, a_{i,j}) > 0$ *indipendente da* R *tale che per ogni* $r \in (0, R)$ *per ogni multi-indice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *vale che*

$$\int_{B_r(x_0)} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \le c \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(x_0)} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx.$$

Dimostrazione. Fissato un multi-indice α, basta osservare che $D^\alpha u$ risolve la stessa equazione di u e applicare il lemma 5.1.2. □

Osservazione 5.1.4. In un certo senso, il lemma 5.1.2 dice che la "massa" della soluzione di un'equazione ellittica a coefficienti costanti è distribuita in maniera proporzionale nelle corone concentriche.

Possiamo migliorare in qualche senso la disuguaglianza ottenuta nel lemma 5.1.2.

Lemma 5.1.5. *Nelle ipotesi del lemma 5.1.2, esiste una costante* $c(n, \nu, a_{i,j}) > 0$ *che dipende soltanto da* $n, \nu, a_{i,j}$ *(indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni* $r \in (0, R)$ *vale che*

$$\int_{B_r} \left|u - u_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx \le c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} \left|u - u_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx.$$

Dimostrazione. Con un argomento di riscalamento completamente analogo a quello mostrato esplicitamente nella dimostrazione della disuguaglianza di Caccioppoli (vedi 5.2), possiamo assumere che $R = 1$. Infatti, la media di una funzione è invariante per riscalamento.

Per semplicità, denotiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}) > 0$ una costante che dipende esclusivamente da $n, \nu, a_{i,j}$ (indipendente da ogni altro parametro).

Fissiamo $s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}^+$; procedendo come nel lemma 5.1.2 (basta applicare la disuguaglianza (5.18) alla funzione $u - s$) otteniamo che

$$|u - s|^2_{k,2,B_{1/2}} \le c^k (2k)^{2k} \int_{B_1} |u - s|^2 \, dx. \tag{5.22}$$

Precisiamo che la costante c è indipendente da k e da s. Se scegliamo $k_0 > 1 + n/2$, per il teorema di immersione di Sobolev, esiste una costante c dipendente solo da n tale che

$$\|\nabla(u - s)\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} \le c \, \|\nabla(u - s)\|^2_{k_0,2,B_{1/2}} ;$$

dalla stima (5.22) deduciamo che esiste una costante c dipendente solo da $n, \nu, a_{i,j}$ tale che

$$\|\nabla u\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} = \|\nabla(u - s)\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} \le c \int_{B_1} |u - s|^2 \, dx. \tag{5.23}$$

Precisiamo che la costante c dipende solo da $n, \nu, a_{i,j}$ (infatti k_0 è stato fissato). Prendiamo $r \in (0, 1/2)$; per il teorema di Lagrange, per ogni $x \in B_r$ vale che

$$|u(x) - u(0)|^2 \le cr^2 \, \|\nabla u\|^2_{L^\infty(B_r)} \le cr^2 \int_{B_1} |u - s|^2 \, dx. \tag{5.24}$$

Integrando la disuguaglianza (5.24) in B_r, otteniamo che

$$\int_{B_r} |u(x) - u(0)|^2 \, dx \le cr^{n+2} \int_{B_1} |u - s|^2 \, dx.$$

Passando all'estremo inferiore su $s \in \mathbb{R}$ e ricordando quanto osservato in 4.4.3 deduciamo che per ogni $r \in (0, 1/2)$ vale che

$$\int_{B_r} |u - u_{B_r}|^2 \ dx \le c r^{n+2} \int_{B_1} |u - u_{B_1}|^2 \ dx. \tag{5.25}$$

Se $r \in [1/2, 1)$, dalla proprietà evidenziata in 4.4.3, deduciamo che per ogni $s \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_{B_r} |u - u_{B_r}|^2 \ dx \le \int_{B_r} |u - s|^2 \ dx \le 2^{n+2} r^{n+2} \int_{B_1} |u - s|^2 \ dx. \tag{5.26}$$

Prendendo l'estremo inferiore su $s \in \mathbb{R}$ e ricordando la proprietà 4.4.3, otteniamo che

$$\int_{B_r} |u - u_{B_r}|^2 \ dx \le 2^{n+2} r^{n+2} \int_{B_1} |u - u_{B_1}|^2 \ dx. \tag{5.27}$$

La tesi segue prendendo il massimo tra la costante c in (5.25) e 2^{n+2} in (5.27). □

Corollario 5.1.6. *Nelle ipotesi del lemma 5.1.5, esiste una costante $c(\nu, n, a_{i,j}) > 0$ indipendente da R tale che per ogni $r \in (0, R)$ per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vale che*

$$\int_{B_r(x_0)} \left| D^\alpha u - (D^\alpha u)_{B_r(x_0)} \right|^2 \ dx \le c \left(\frac{r}{R} \right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} \left| D^\alpha u - (D^\alpha u)_{B_R(x_0)} \right|^2 \ dx.$$

Dimostrazione. Fissato un multi-indice α, basta osservare che $D^\alpha u$ risolve la stessa equazione di u e applicare il lemma 5.1.5. □

Osservazione 5.1.7. Precisiamo che in questo risultati (vedi 5.1.2 e 5.1.5), l'ipotesi che la soluzione u sia di classe C^∞ non è restrittiva. Infatti, ricordiamo che le soluzioni di un problema ellittico a coefficienti costanti sono sempre C^∞ nell'aperto di definizione (vedi 3.2.3).

5.1.3 Il caso dei coefficienti continui

Possiamo ottenere risultati analoghi a quelli dei lemmi 5.1.2 e 5.1.5 nel caso di problemi uniformemente ellittici con coefficienti continui. Utilizzeremo il cosiddetto metodo di Korn, che consiste nel decomporre la soluzione dell'equazione in due funzioni, di cui una è soluzione di un problema a coefficienti costanti. Consideriamo il seguente problema differenziale

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i [a_{i,j} D_j u] = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i. \tag{5.28}$$

Mostreremo le disuguaglianze seguenti in palle centrate nell'origine, pur essendo tutte ovviamente invarianti per traslazione; quindi, valgono in ogni palla con le stesse costanti.

Lemma 5.1.8. *Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice uniformemente ellittica in B_R di costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) con coefficienti di classe $C^0(\overline{B_R})$; siano f_i funzioni in $L^2(B_R)$. Poniamo*

$$\omega(r)^2 := \sup \left\{ |a_{i,j}(x) - a_{i,j}(0)|^2 \ \middle| \ i, j \in \{1, \ldots, n\}, \ x \in \overline{B_r} \right\}.$$

Sia $u \in H^1(B_R)$ soluzione debole del problema (5.28). Esiste una costante $c(n, \nu, a_{i,j}(0)) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni $r \in (0, R)$ vale che

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 \ dx \le c \left\{ \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n + \omega(R)^2 \right] \int_{B_R} |\nabla u|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |f_i|^2 \ dx \right\}.$$

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}(0)) > 0$ una costante dipendente esclusivamente da $n, \nu, a_{i,j}(0)$ (indipendente da ogni altro parametro) che può cambiare da linea a linea.

Per definizione, sappiamo che per ogni funzione test $\varphi \in H_0^1(B_R)$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_R} a_{i,j} D_j u D_i \varphi \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} f_i D_i \varphi \, dx.$$

Possiamo equivalentemente scrivere che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_R} a_{i,j}(0) D_j u D_i \varphi \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left\{ f_i + \sum_{j=1}^{n} [a_{i,j}(0) - a_{i,j}] D_j u \right\} D_i \varphi \, dx.$$

Notiamo che è possibile scrivere $u = v + w$ dove $v \in H_u^1(B_R)$ (equivalentemente $u - v \in H_0^1(B_R)$) è soluzione debole del problema

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(0) D_{ij} v = 0 \tag{5.29}$$

e $w \in H_0^1(B_R)$ è soluzione debole del problema

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(0) D_{ij} w = \sum_{i=1}^{n} D_i \left\{ f_i + \sum_{j=1}^{n} [a_{i,j}(0) - a_{i,j}] D_j u \right\} \tag{5.30}$$

Notiamo che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ la funzione

$$f_i + \sum_{j=1}^{n} [a_{i,j}(0) - a_{i,j}] D_j u$$

è in $L^2(B_R)$; pertanto i problemi (5.29) e (5.30) hanno soluzione unica (infatti, in entrambi i casi stiamo imponendo il dato al bordo). Poichè v è soluzione di un problema omogeneo ellittico con coefficienti costanti, per i risultati di regolarità interna iterata (vedi 3.2.3) vale che $v \in H^k_{\text{loc}}(B_R)$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$; deduciamo dal teorema di immersione di Sobolev che $v \in C^\infty(B_R)$. Fissiamo $r \in (0, R)$; scegliamo $\sigma \in (R/2, R)$ tale che $r \in (0, \sigma)$; allora abbiamo che $v \in C^\infty(\overline{B_\sigma})$ e possiamo applicare il corollario 5.1.2. Deduciamo che esiste una costante $c(n, \nu, a_{i,j}(0)) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro, in particolare da r, σ, R, u e v) tale che

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i v|^2 \, dx \le c \left(\frac{r}{\sigma}\right)^n \int_{B_\sigma} |\nabla v|^2 \, dx \le c 2^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R} |\nabla v|^2 \, dx. \tag{5.31}$$

Per stimare w, invece, utilizzando proprio w come funzione test nella formulazione debole del problema (5.30) otteniamo

$$\begin{aligned}
\nu \|\nabla w\|_{0,2,B_R}^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{B_R} |D_i w|^2 \, dx \\
&\le \sum_{i,j=1}^n \int_{B_R} a_{i,j}(0) D_j w D_i w \, dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{B_R} \left\{ f_i + \sum_{j=1}^n [a_{i,j}(0) - a_{i,j}] D_j u \right\} D_i w \, dx \\
&\le \sum_{i=1}^n \left\| f_i + \sum_{j=1}^n [a_{i,j}(0) - a_{i,j}] D_j u \right\|_{0,2,B_R} \|\nabla w\|_{0,2,B_R} .
\end{aligned}$$

Deduciamo che

$$\|\nabla w\|_{0,2,B_R} \le \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \left[\|f_i\|_{0,2,B_R} + n\omega(R) \|\nabla u\|_{0,2,B_R} \right].$$

Segue che

$$\|\nabla w\|_{0,2,B_R}^2 \le c \sum_{i=1}^n \int_{B_R} \left[|f_i|^2 + \omega(R)^2 |D_i u|^2 \right] \, dx. \tag{5.32}$$

Fissiamo $r \in (0, R)$; ricordando che $v = u - w$, dalle disuguaglianze (5.31) e (5.32) deduciamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \int_{B_r} |D_i u|^2 \, dx &\le 2 \sum_{i=1}^n \int_{B_r} \left[|D_i v|^2 + |D_i w|^2 \right] \, dx \\
&\le c \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R} |\nabla v|^2 \, dx + c \sum_{i=1}^n \int_{B_R} \left[|f_i|^2 + \omega(R)^2 |D_i u|^2 \right] \, dx \\
&\le c \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx + c \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R} |\nabla w|^2 \, dx \\
&\quad + c \sum_{i=1}^n \int_{B_R} \left[|f_i|^2 + \omega(R)^2 |D_i u|^2 \right] \, dx \\
&\le c \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^n [1 + \omega(R)^2] + \omega(R)^2 \right\} \sum_{i=1}^n \int_{B_R} |D_i u|^2 \, dx \\
&\quad + c \left[\left(\frac{r}{R}\right)^n + 1 \right] \sum_{i=1}^n \int_{B_R} |f_i|^2 \, dx \\
&\le c \left\{ \left[\left(\frac{r}{R}\right)^n + \omega(R)^2 \right] \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{B_R} |f_i|^2 \, dx \right\}.
\end{aligned}$$

□

Possiamo migliorare il risultato del lemma 5.1.8, procedendo in maniera analoga al lemma 5.1.5.

Lemma 5.1.9. *Nelle ipotesi del lemma 5.1.8, esiste una costante $c(n, \nu, a_{i,j}(0)) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni $r \in (0, R)$ vale che*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i u - (D_i u)_{B_r}|^2 \, dx \leq c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i u - (D_i u)_{B_R}|^2 \, dx$$
$$+ c\omega(R)^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i u|^2 \, dx + c \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |f - f_{B_R}|^2 \, dx.$$

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}(0)) > 0$ una costante indipendente da ogni altro parametro, che può cambiare da linea a linea.

Siano v, w come nella dimostrazione del lemma precedente. Ricordiamo che v è soluzione di un problema ellittico omogeneo a coefficienti costanti (vedi (5.29)); procedendo come nella dimostrazione del lemma 5.1.8 e utilizzando il corollario 5.1.6, deduciamo che esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $r \in (0, R)$ vale che

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i v - (D_i u)_{B_r}|^2 \, dx \leq c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i v - (D_i v)_{B_R}|^2 \, dx. \tag{5.33}$$

Notiamo che w risolve il problema (5.30) prendendo $f_i - (f_i)_{B_R}$ al posto di f_i; dalla stima (5.32) segue immediatamente la disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i w|^2 \, dx \leq c \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left[|f_i - (f_i)_{B_R}|^2 + \omega(R)^2 \, |D_i u|^2\right] \, dx. \tag{5.34}$$

Ricordando che $v = u - w$, l'osservazione 4.4.3 e applicando le disuguaglianze (5.33) e (5.34) si ottiene immediatamente che per ogni $r \in (0, R)$ vale che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i u - (D_i u)_{B_r}|^2 \, dx &\leq 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i v - (D_i v)_{B_r}|^2 \, dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i w - (D_i w)_{B_r}|^2 \, dx \\
&\leq c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i v - (D_i v)_{B_R}|^2 \, dx + 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i w|^2 \, dx \\
&\leq c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i v - (D_i v)_{B_R}|^2 \, dx + 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i w|^2 \, dx \\
&\leq c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i u - (D_i u)_{B_R}|^2 \, dx \\
&\quad + c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i w - (D_i w)_{B_R}|^2 \, dx + 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i w|^2 \, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R}\right|^2 \, dx + \left[c\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} + 2\right] \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left|D_i w\right|^2 \, dx \\
&\leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R}\right|^2 \, dx \\
&\quad + \left[c\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} + 2\right] \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left[\left|f_i - (f_i)_{B_R}\right|^2 + \omega(R)^2 \left|D_i u\right|^2\right] \, dx \\
&\leq c\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R}\right|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left|f_i - (f_i)_{B_R}\right|^2 \, dx\right] \\
&\quad + c\omega(R)^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} \left|D_i u\right|^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

□

5.2 Regolarità interna negli spazi di Morrey

Possiamo finalmente mostrare un risultato di regolarità interna per le soluzioni deboli di problemi ellittici negli spazi di Morrey. Come è tipico in questo ambito, premettiamo un lemma di natura algebrica, che ci consentirà di ottenere le stime desiderate.

Lemma 5.2.1. *Sia $f : (0, R_0) \to [0, +\infty)$ una funzione non decrescente; supponiamo che esistano $a > 0, B \geq 0, \varepsilon \in [0, 1)$ e $\alpha > \beta \geq 0$ tali che per ogni $0 < r < R < R_0$ vale che*

$$
f(r) \leq a\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} + \varepsilon\right] f(R) + BR^{\beta}.
$$

Se esiste $\gamma \in (\beta, \alpha)$ tale che

$$
\varepsilon \leq \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}},
$$

allora esiste una costante $c(\alpha, \beta, \gamma, a, \varepsilon) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni $0 < r < R < R_0$ vale che

$$
f(r) \leq c\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\gamma} f(R) + Br^{\beta}\right].
$$

Dimostrazione. Denotiamo con $c(\alpha, \beta, \gamma, a, \varepsilon) > 0$ una costante (indipendente da ogni altro parametro) che può cambiare da linea a linea. Notiamo che si può assumere senza perdita di generalità che $a > 1/2$; allora esiste $\tau \in (0, 1)$ tale che $2a\tau^{\alpha} = \tau^{\gamma}$. Dalla limitazione su ε valida per ipotesi, deduciamo che $\varepsilon \leq \tau^{\alpha}$. Fissiamo $R \in (0, R_0)$; per ipotesi, vale che

$$
f(\tau R) \leq a\left[\tau^{\alpha} + \varepsilon\right] f(R) + BR^{\beta} \leq 2a\tau^{\alpha} f(R) + BR^{\beta} = \tau^{\gamma} f(R) + BR^{\beta}.
$$

Riapplicando la disuguaglianza, troviamo che

$$
\begin{aligned}
f(\tau^2 R) &\leq \tau^{\gamma} f(\tau R) + B\tau^{\beta} R^{\beta} \leq \tau^{2\gamma} f(R) + \tau^{\gamma} BR^{\beta} + B\tau^{\beta} R^{\beta} \\
&\leq \tau^{2\gamma} f(R) + BR^{\beta} \tau^{\beta}(1 + \tau^{\gamma-\beta}).
\end{aligned}
$$

Con una semplice induzione, possiamo facilmente mostrare che per ogni $N \in \mathbb{N}$ vale che

$$
\begin{aligned}
f(\tau^N R) &\leq \tau^{\gamma N} f(R) + BR^\beta \tau^{(N-1)\beta} \sum_{k=0}^{N-1} \tau^{k(\gamma-\beta)} \\
&= \tau^{\gamma N} f(R) + BR^\beta \tau^{(N-1)\beta} \left(\frac{1-\tau^{N(\gamma-\beta)}}{1-\tau^{\gamma-\beta}} \right) \\
&= \tau^{\gamma N} f(R) + \frac{BR^\beta \tau^{(N-1)\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}}. \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

Allora, se $r \in (0, R)$, scegliamo $N \in \mathbb{N}$ tale che $\tau^{N+1} R < r \leq \tau^N R$; dalla disuguaglianza (5.35) e dalla monotonia (debole) di f deduciamo che

$$
\begin{aligned}
f(r) \leq f(\tau^N R) &\leq \tau^{\gamma N} f(R) + \frac{BR^\beta \tau^{(N-1)\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}} \\
&= \tau^{-\gamma} \left(\tau^{(N+1)\gamma} f(R) \right) + \frac{\tau^{-2\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}} \left(BR^\beta \tau^{(N+1)\beta} \right) \\
&\leq \tau^{-\gamma} \left(\frac{r}{R} \right)^\gamma f(R) + \frac{\tau^{-2\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}} \left(Br^\beta \right) \\
&\leq c \left[\left(\frac{r}{R} \right)^\gamma f(R) + Br^\beta \right]. \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

Osserviamo che la disuguaglianza (5.36) implica la tesi perchè τ dipende esclusivamente da $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$. □

Il lemma (5.2.1) consente di riscrivere le ipotesi di crescita di una funzione di una variabile in maniera diversa. Utilizzeremo questo risultato nella dimostrazione dei teoremi seguenti.

Teorema 5.2.2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j} D_j u] = \sum_{i=1}^n D_i f_i.$$

Supponiamo che la matrice $A = (a_{i,j})$ sia uniformemente ellittica con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9) e che i coefficienti siano di classe $C^0(\Omega)$. Per ogni $x_0 \in \Omega$ per ogni $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \Subset \Omega$ denotiamo

$$\omega(r, x_0)^2 := \sup \left\{ |a_{i,j}(x) - a_{i,j}(x_0)| \ \mid \ x \in \overline{B_r(x_0)}, \ i, j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Supponiamo anche che esista $\lambda \in [0, n)$ tale che le funzioni f_i siano nello spazio di Morrey $L^{2,\lambda}_{loc}(\Omega)$ (vedi 4.2.1). Allora per ogni coppia di aperti $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ vale che $D_i u \in L^{2,\lambda}(\Omega_0)$ ed esiste una costante $c(n, \nu, \lambda, a_{i,j}, \Omega_1, \Omega_0) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che

$$\sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_1} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_1)} \right].$$

Dimostrazione. Fissiamo $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$; sia $\delta := \operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega_1^c)$; sia $\delta_0 < \delta$ (lo sceglieremo in seguito). Per semplicità, denotiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}, \lambda, \Omega_1, \Omega_0) > 0$ una costante (indipendente da ogni altro parametro) che può cambiare da linea a linea.

Se prendiamo $R \leq \delta_0/2$ e $x_0 \in \overline{\Omega_0}$, notiamo che la palla $B_R(x_0)$ è relativamente compatta in Ω_1. Per il lemma 5.1.8, esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $r \in (0, R)$ vale che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(x_0)} |D_i u|^2 \, dx &\leq c \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n + \omega(x_0, R)^2 \right] \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx \\ &\quad + cR^\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f_i|^2 \, dx \\ &\leq c \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n + \omega(x_0, \delta_0/2)^2 \right] \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx \\ &\quad + cR^\lambda \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_1)} .\end{aligned}$$

Ponendo

$$\varphi(r) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(x_0)} |D_i u|^2 \, dx, \quad B \coloneqq c \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega)} ,$$

troviamo che per ogni $0 < r < R < \delta_0/2$, vale che

$$\varphi(r) \leq c \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n + \omega(x_0, \delta_0/2) \right] \varphi(R) + R^\lambda B. \tag{5.37}$$

Vogliamo applicare il lemma algebrico 5.36. Notiamo che $\varphi : (0, \delta_0/2) \to [0, +\infty)$ è una funzione non decrescente; inoltre, se poniamo $c = a$, $\lambda = \beta$, $\alpha = n$, $\gamma = (n + \lambda)/2$, dobbiamo richiedere che

$$\omega(x_0, \delta_0/2) < \left(\frac{1}{2c} \right)^{\frac{n}{n - \frac{n+\lambda}{2}}} = \left(\frac{1}{2c} \right)^{\frac{2n}{n-\lambda}} . \tag{5.38}$$

Tuttavia, per la continuità di $a_{i,j}$, possiamo supporre che δ_0 sia abbastanza piccolo in modo che la condizione (5.38) sia soddisfatta. Per compattezza e continuità, possiamo anche supporre che δ_0 sia scelto in maniera indipendente da x_0 che varia in $\overline{\Omega_0}$. Siamo nelle condizioni di applicare il lemma 5.2.1; deduciamo l'esistenza di una costante che denotiamo ancora con c tale che per ogni $0 < r < R < \delta_0/2$ vale che

$$\varphi(r) \leq c \left[\left(\frac{r}{R} \right)^\gamma \varphi(R) + Br^\beta \right] ,$$

ovvero che

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(x_0)} |D_i u|^2 \, dx \leq c \left[\left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+\lambda}{2}} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx + r^\lambda \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_1)} \right] . \tag{5.39}$$

Applichiamo la disuguaglianza (5.39) con $R = \delta_0/4$ e $r < R$; dividendo per r^λ troviamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^\lambda} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} |D_i u|^2 \, dx &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^\lambda} \int_{B_r(x_0)} |D_i u|^2 \, dx \\
&\leq c \left[\frac{r^{\frac{n-\lambda}{2}}}{(\delta_0/4)^{\frac{n+\lambda}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_{(\delta_0/4)}(x_0)} |D_i u|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_1)} \right] \\
&\leq c \left[\left(\frac{\delta_0}{4}\right)^{-\lambda} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_1} |D_i u|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_1)} \right].
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Se, invece, $r \in [\delta_0/4, d_{\Omega_0}]$, allora vale banalmente che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^\lambda} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} |D_i u|^2 \, dx \leq \left(\frac{\delta_0}{4}\right)^{-\lambda} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_1} |D_i u|^2 \, dx. \tag{5.41}$$

Dalle disuguaglianze (5.40) e (5.41) troviamo che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}_0$ per ogni $r \in (0, d_{\Omega_0}]$ vale che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^\lambda} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} |D_i u|^2 \, dx \leq c \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_1} |D_i u|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_1)} \right]. \tag{5.42}$$

Passando all'estremo superiore su $x_0 \in \Omega_0$ e su $r \in (0, d_{\Omega_0}]$ deduciamo che $D_i u \in L^{2,\lambda}(\Omega_0)$ e vale la stima

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_1} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_1)} \right].$$

□

5.3 Regolarità interna negli spazi di Campanato

Nel contesto del teorema 5.2.2, se $f_i \in L^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ (cioè $f_i \in L^\infty(\Omega)$ per la proposizione 4.2.4), non si deduce che $D_i u \in L^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega_0)$, ma soltanto che $D_i u \in L^{2,n-\varepsilon}_{\text{loc}}(\Omega_0)$ per ogni $\varepsilon \in (0, n]$. Tuttavia, ragionando in maniera analoga, possiamo mostrare un risultato di regolarità interna negli spazi di Campanato.

Teorema 5.3.1. *Nel contesto del teorema 5.2.2, supponiamo che i coefficienti $a_{i,j}$ siano di classe $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ per qualche $\alpha \in (0, 1]$ e che le funzioni f_i siano nello spazio di Campanato $\mathscr{L}^{2,n}(\Omega)$ (vedi 4.3.1). Allora per ogni coppia di aperti $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ vale che $D_i u \in \mathscr{L}^{2,n}(\Omega_0)$ ed esiste una costante $c(n, \nu, a_{i,j}, \alpha, \Omega_1, \Omega_0) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che*

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_1} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_1)} \right].$$

Dimostrazione. Fissiamo $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$; sia $\delta := \operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega^c)$; innanzitutto, siccome dobbiamo mostrare un risultato di regolarità interna, a meno di prendere altri aperti relativamente compatti in Ω, possiamo supporre che $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ siano aperti di tipo A (vedi 4.3.7) e che si abbia $\operatorname{dist}(\overline{\Omega_1}, \Omega_2^c) = \delta_0/2$. Per semplicità, denotiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}, \alpha, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) > 0$ una costante (indipendente da ogni altro parametro) che può cambiare da linea a linea.

Ricordiamo che per il teorema 4.1, gli spazi $\mathscr{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega_i)$ e $L^{2,n-2\alpha}(\Omega_i)$ sono isometrici per $i = 0,1,2$. Inoltre, è immediato verificare che l'inclusione $\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_i) \hookrightarrow \mathscr{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega_i)$ è continua per $i = 0,1,2$. Da queste osservazioni e dal teorema 5.2.2, segue che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega_1)} &\le c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega_2)} \right] \\ &\le \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_2)} \right]. \qquad (5.43)\end{aligned}$$

Denotiamo

$$M := \max\left\{ [a_{i,j}]^2_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_2})} \mid i,j \in \{1,\dots,n\} \right\}.$$

Fissato $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ e presi $0 < r < R < \delta_0/2$, notiamo che per la α-hölderianità dei coefficienti vale che

$$\omega(x_0, R)^2 \le M R^{2\alpha}.$$

Dal lemma 5.1.9 segue che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(x_0)} \left| D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)} \right|^2 \, dx &\le c \left(\frac{r}{R} \right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left| D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)} \right|^2 \, dx \\ &\quad + c\omega(x_0,R)^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx + c \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left| f_i - (f_i)_{B_R(x_0)} \right|^2 \, dx \\ &\le c \left(\frac{r}{R} \right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left| D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)} \right|^2 \, dx \qquad (5.44) \\ &\quad + c \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left| f_i - (f_i)_{B_R(x_0)} \right|^2 \, dx + cMR^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R^{n-2\alpha}} \int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx \\ &\le c \left(\frac{r}{R} \right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left| D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)} \right|^2 \, dx + c \sum_{i=1}^{n} R^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_2)} \\ &\quad + cMR^n \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega_2)} \\ &\le c \left(\frac{r}{R} \right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left| D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)} \right|^2 \, dx \\ &\quad + cR^n \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_2)} \right]. \qquad (5.45)\end{aligned}$$

Precisiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la disuguaglianza (5.43). Poniamo

$$\varphi(r) := \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(x_0)} \left| D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)} \right|^2 \, dx,$$

$$B := c\left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_2)}\right];$$

possiamo scrivere la disuguaglianza (5.45) come segue:

$$\varphi(r) \leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \varphi(R) + R^n B \quad 0 < r < R < \delta_0/2. \tag{5.46}$$

Osserviamo che $\varphi : (0, \delta_0/2) \to [0, +\infty)$ è non decrescente. Infatti, dati $0 < r < R < \delta_0/2$, per quanto osservato in 4.4.3, vale che

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \sum_{i=1}^n \int_{B_r(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_r(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&= \varphi(R).
\end{aligned}$$

Possiamo applicare il lemma 5.2.1 con $\varepsilon = 0$ e $\gamma = n + 1$ (ricordiamo che $\gamma \in (n, n+2)$). Otteniamo che per ogni $0 < r < R < \delta_0/2$ vale che

$$\varphi(r) \leq c\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \varphi(R) + r^n B\right]. \tag{5.47}$$

Scegliendo $R = \delta_0/4$ e $r \in (0, R)$, dividendo la disuguaglianza (5.47) per r^n e utilizzando quanto osservato in 4.4.3, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)\cap\Omega_0}\right|^2 \, dx \\
&\qquad\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\leq c \sum_{i=1}^n \int_{B_{\delta_0/4}(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_{\delta_0/4}(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\qquad + c\left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_2)}\right] \\
&\leq c\left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_2)}\right];
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Se, invece, $r \in [\delta_0/4, d_{\Omega_0}]$, allora è immediato trovare che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)\cap\Omega_0}\right|^2 \, dx &\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{\delta_0}\right)^n \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} |D_i u|^2 \, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{\delta_0}\right)^n \int_{\Omega_2} |D_i u|^2 \, dx.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Considerando le disuguaglianze (5.48) e (5.49) e passando all'estremo superiore su $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ e $r \in (0, d_{\Omega_0}]$, troviamo che

$$\sum_{i=1}^{n} [D_i u]^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n}(\Omega_2)} \right].$$

Ricordando la definizione della norma di Campanato (vedi 4.3.3), si ottiene immediatamente la tesi. $\square$

Assumendo che i termini forzanti siano un pò più regolari, possiamo migliorare il risultato del teorema 5.3.1. La dimostrazione è una variante di quella del teorema 5.3.1.

Teorema 5.3.2. *Nel contesto del teorema 5.3.1, supponiamo che i coefficienti $a_{i,j}$ siano di classe $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ per un certo $\alpha \in (0,1]$ e che $f_i \in \mathscr{L}^{2,n+\alpha}_{loc}(\Omega)$. Allora per ogni coppia di aperti $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ esiste una costante $c(n, \alpha, \nu, a_{i,j}, \Omega, \Omega_1, \Omega_0) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che*

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_0)} \leq c \left\{ \|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_1} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_1)} \right\};$$

in particolare, troviamo che $D_i u \in C^{0,\alpha/2}(\Omega_0)$ e vale che

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{C^{0,\alpha/2}(\Omega_0)} \leq c \left\{ \|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_1} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_1)} \right\};$$

Dimostrazione. Fissiamo $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$; sia $\delta := \operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega^c)$; innanzitutto, siccome dobbiamo mostrare un risultato di regolarità interna, a meno di prendere altri aperti relativamente compatti in Ω, possiamo supporre che $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ siano aperti di tipo A (vedi 4.3.7) e che si abbia $\operatorname{dist}(\overline{\Omega_1}, \Omega_2^c) = \delta_0/2$. Per semplicità, denotiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}, \alpha, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) > 0$ una costante (indipendente da ogni altro parametro) che può cambiare da linea a linea.

Ricordiamo che per il teorema 4.1, gli spazi $\mathscr{L}^{2,n-\alpha}(\Omega_i)$ e $L^{2,n-\alpha}(\Omega_i)$ sono isometrici per $i = 0, 1, 2$. Da questa osservazione e dall'applicazione del teorema 5.2.2 segue che

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n-\alpha}(\Omega_1)} \leq c \left\{ \|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n-\alpha}(\Omega_2)} \right\}. \tag{5.50}$$

Denotiamo

$$M := \max \left\{ [a_{i,j}]^2_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_2})} \mid i, j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Fissato $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ e presi $0 < r < R < \delta_0/2$, notiamo che per la α-hölderianità dei coefficienti vale che

$$\omega(x_0, R)^2 \leq M R^{2\alpha}.$$

Dal lemma 5.1.9 segue che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx &\le c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\quad + c\omega(x_0, R)^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx + c \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left|f_i - (f_i)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\le c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\quad + c \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left|f_i - (f_i)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx + cMR^{n+\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R^{n-\alpha}} \int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx \\
&\le c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx + c \sum_{i=1}^{n} R^{n+\alpha} \left\|f_i\right\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)} \\
&\quad + cMR^{n+\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left\|D_i u\right\|^2_{\mathscr{L}^{2,n-\alpha}(\Omega_2)} \\
&\le c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\quad + cR^{n+\alpha} \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)} \right]. \qquad (5.51)
\end{aligned}$$

Precisiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la disuguaglianza (5.50) e il fatto che l'inclusione $i : \mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2) \hookrightarrow \mathscr{L}^{2,n-\alpha}(\Omega_2)$ è continua (come è immediato verificare). Poniamo

$$\varphi(r) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx,$$

$$B \coloneqq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)} \right];$$

possiamo scrivere la disuguaglianza (5.51) come segue:

$$\varphi(r) \le c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \varphi(R) + R^{n+\alpha} B \quad 0 < r < R < \delta_0/2. \qquad (5.52)$$

Come osservato nella dimostrazione del teorema 5.3.1, la funzione $\varphi : (0, \delta_0/2) \to [0, +\infty)$ è non decrescente. Possiamo applicare il lemma 5.2.1 con $\varepsilon = 0$ e $\gamma = n + 1 + \alpha/2$ (ricordiamo che $\gamma \in (n + \alpha, n + 2)$). Otteniamo che per ogni $0 < r < R < \delta_0/2$ vale che

$$\varphi(r) \le c \left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1+\alpha/2} \varphi(R) + r^{n+\alpha} B \right]. \qquad (5.53)$$

Scegliendo $R = \delta_0/4$ e $r \in (0, R)$, dividendo la disuguaglianza (5.53) per $r^{n+\alpha}$ e utilizzando quanto osservato in 4.4.3, otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+\alpha}} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} &\left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)\cap\Omega_0}\right|^2 \, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+\alpha}} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+\alpha}} \int_{B_r(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\leq c \left(\frac{4}{\delta_0}\right)^{n+\alpha} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_{\delta_0/4}(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_{\delta_0/4}(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\quad + c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)} \right] \\
&\leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)} \right]; \qquad (5.54)
\end{aligned}$$

Se, invece, $r \in [\delta_0/4, d_{\Omega_0}]$, allora è immediato trovare che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+\alpha}} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)\cap\Omega_0}\right|^2 \, dx &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{\delta_0}\right)^{n+\alpha} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega_0} |D_i u|^2 \, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{\delta_0}\right)^{n+\alpha} \int_{\Omega_2} |D_i u|^2 \, dx. \qquad (5.55)
\end{aligned}$$

Considerando le disuguaglianze (5.54) e (5.55) e passando all'estremo superiore su $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ e $r \in (0, d_{\Omega_0}]$, troviamo che

$$\sum_{i=1}^{n} [D_i u]^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)} \right].$$

Ricordando la definizione della norma di Campanato (vedi 4.3.3), che $D_i u \in \mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_0)$ e vale la stima

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)} \right].$$

Applicando il teorema 4.3.10, possiamo affermare che $D_i u \in C^{0,\alpha/2}(\Omega_0)$ e vale che

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{C^{0,\alpha/2}(\Omega_0)} \leq c \sum_{i=1}^{n} [D_i u]^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)} \right].$$

□

Assumendo ulteriore regolarità sui termini forzanti, possiamo rafforzare ancora il risultato del teorema 5.3.2; la dimostrazione del teorema seguente è del tutto analoga a quella del teorema 5.3.2.

Teorema 5.3.3. *Nel contesto del teorema 5.3.1, supponiamo che i coefficienti $a_{i,j}$ siano di classe $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ per un certo $\alpha \in (0,1)$ (sottolineiamo gli 1 è escluso) e che $f_i \in \mathscr{L}^{2,n+2\alpha}_{loc}(\Omega)$. Se $\alpha \in (0,1)$, per ogni coppia di aperti $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega_2$ esiste una costante $c(n,\alpha,\nu,a_{i,j},\Omega_1,\Omega_0) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro), tale che*

$$\sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_0)} \leq c\left\{\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_1} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_1)}\right\}.$$

In particolare, vale che $u \in C^{0,\alpha}(\Omega_0)$ e vale che

$$\sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega_0)} \leq c\left\{\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_1} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_1)}\right\}.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$; sia $\delta := \operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega^c)$; innanzitutto, siccome dobbiamo mostrare un risultato di regolarità interna, a meno di prendere altri aperti relativamente compatti in Ω, possiamo supporre che $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ siano aperti di tipo A (vedi 4.3.7) e che si abbia $\operatorname{dist}(\overline{\Omega_1}, \Omega_2^c) = \delta_0/2$. Per semplicità, denotiamo con $c(n,\nu,a_{i,j},\alpha,\Omega_0,\Omega_1,\Omega_2) > 0$ una costante (indipendente da ogni altro parametro) che può cambiare da linea a linea.

Ricordiamo che l'inclusione $\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2) \hookrightarrow \mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)$ è continua (come è immediato verificare). Per il teorema 5.3.2, sappiamo che $D_i u \in C^{0,\alpha/2}(\Omega_1)$; applicando il teorema 4.3.10, deduciamo che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R^n}\int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx &\leq \|D_i u\|^2_{L^\infty(\Omega_1)} \leq c\,\|D_i u\|^2_{C^{0,\alpha/2}(\Omega_1)} \leq c\,\|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_1)} \\
&\leq c\left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_2)}\right] \\
&\leq c\left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)}\right]
\end{aligned}$$

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 5.3.2, dimostriamo che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ per ogni $0 < r < R < \delta_0/2$ vale che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \int_{B_r(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)}\right|^2 \, dx &\leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\quad + cR^{n+2\alpha}\left[\frac{1}{R^n}\sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} |D_i u|^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)}\right] \\
&\leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\quad + cR^{n+2\alpha}\left[\sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2_{L^\infty(\Omega_2)} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)}\right] \\
&\leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} \left|D_i u - (D_i u)_{B_R(x_0)}\right|^2 \, dx \\
&\quad + cR^{n+2\alpha}\left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)}\right].
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Poniamo

$$\varphi(r) := \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(x_0)} \left| D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0)} \right|^2 \, dx,$$

$$B := c \left[\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)} \right];$$

possiamo scrivere la disuguaglianza (5.56) come segue:

$$\varphi(r) \leq c \left(\frac{r}{R} \right)^{n+2} \varphi(R) + R^{n+2\alpha} B \quad 0 < r < R < \delta_0/2. \tag{5.57}$$

Come osservato nella dimostrazione del teorema 5.3.1, la funzione $\varphi : (0, \delta_0/2) \to [0, +\infty)$ è non decrescente. Possiamo applicare il lemma 5.2.1 con $\varepsilon = 0$ e $\gamma = n + 1 + \alpha$ (ricordiamo che $\gamma \in (n + 2\alpha, n + 2)$; in questo passaggio è fondamentale richiedere che $\alpha < 1$). Otteniamo che per ogni $0 < r < R < \delta_0/2$ vale che

$$\varphi(r) \leq c \left[\left(\frac{r}{R} \right)^{n+1+\alpha} \varphi(R) + r^{n+2\alpha} B \right]. \tag{5.58}$$

Scegliendo $R = \delta_0/4$ e $r \in (0, R)$, dividendo la disuguaglianza (5.58) per $r^{n+2\alpha}$ e utilizzando quanto osservato in 4.4.3, con passaggi del tutto analoghi a quelli della dimostrazione del teorema 5.3.2 otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+2\alpha}} \int_{B_r(x_0) \cap \Omega_0} \left| D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0) \cap \Omega_0} \right|^2 \, dx \tag{5.59}$$

$$\leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)} \right]. \tag{5.60}$$

Se, invece, $r \in [\delta_0/4, d_{\Omega_0}]$, allora è immediato trovare che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+2\alpha}} \int_{B_r(x_0) \cap \Omega_0} \left| D_i u - (D_i u)_{B_r(x_0) \cap \Omega_0} \right|^2 \, dx \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{\delta_0} \right)^{n+2\alpha} \int_{\Omega_2} |D_i u|^2 \, dx. \tag{5.61}$$

Considerando le disuguaglianze (5.60) e (5.61) e passando all'estremo superiore su $x_0 \in \overline{\Omega_0}$ e $r \in (0, d_{\Omega_0}]$, troviamo che

$$\sum_{i=1}^{n} [D_i u]^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)} \right].$$

Ricordando la definizione della norma di Campanato (vedi 4.3.3), che $D_i u \in \mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_0)$ e vale la stima

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)} \right].$$

Applicando il teorema 4.3.10, possiamo affermare che $D_i u \in C^{0,\alpha}(\Omega_0)$ e vale che

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_0)} \leq c \sum_{i=1}^{n} [D_i u]^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_0)} \leq c \left[\|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_2)} \right].$$

$\square$

Osservazione 5.3.4. Nel contesto del teorema 5.3.3, se $\alpha = 1$ la dimostrazione presentata fallisce. Infatti, in questo caso vale soltanto che per ogni $\beta \in (n, n+2)$ per ogni coppia di aperti $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ vale che $D_i u \in \mathscr{L}^{2,\beta}(\Omega_0)$ ed esiste una costante $c(n, \nu, \beta, a_{i,j}, \Omega_1, \Omega_0) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathscr{L}^{2,\beta}(\Omega_0)} \le c \left\{ \|\nabla u\|^2_{0,2,\Omega_1} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathscr{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega_1)} \right\}.$$

Questo fatto si ottiene semplicemente applicando il teorema 5.3.3 e notando che l'immersione $\mathscr{L}^{2,n+2}(\Omega_i) \hookrightarrow \mathscr{L}^{2,\beta}(\Omega_i)$ è continua per $i = 0, 1$. Tuttavia, la costante c degenera a $+\infty$ quando β tende a $n+2$.

Riepiloghiamo i risultati mostrati nei teoremi 5.2.2, 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.3 per la regolarità delle soluzioni deboli dell'equazione

$$\sum_{i=1}^{n} D_i[a_{i,j} D_j u] = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i,$$

in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Se $\lambda \in [0, n)$, $f_i \in L^{2,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $a_{i,j} \in C^0(\Omega)$, allora $D_i u \in L^{2,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; per il teorema 4.4.4, vale che $u \in \mathscr{L}^{2,\lambda+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e, se $\lambda \in (n-2, n)$, allora $u \in C^{0,\gamma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con $\gamma = 1 - \frac{n-\lambda}{2}$.
- Se $\lambda = n$, $f_i \in \mathscr{L}^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1]$ e $a_{i,j} \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, allora $D_i u \in \mathscr{L}^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; se u appartiene allo spazio $\mathscr{L}^{2,n+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per il teorema 4.3.10, vale che $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
- Se $\alpha \in (0, 1]$, $f_i \in \mathscr{L}^{2,n+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $a_{i,j} \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, allora $D_i u \in \mathscr{L}^{2,n+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; in particolare, $D_i u \in C^{0,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
- Se $\alpha \in (0, 1)$, $f_i \in \mathscr{L}^{2,n+2\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $a_{i,j} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, allora $D_i u \in \mathscr{L}^{2,n+2\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; in particolare, $D_i u \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

5.4 Regolarità con coefficienti L^∞

Vogliamo studiare la regolarità delle soluzioni deboli di problemi ellittici con coefficienti che siano soltanto L^∞. Presenteremo due tecniche, facendo largo uso dei risultati introdotti nei paragrafi precedenti.

Nel seguito utilizzeremo la notazione seguente. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $A = (a_{i,j})$ una matrice uniformemente ellittica in Ω con costante $\nu > 0$ (vedi 1.1.9); supporremo che i coefficienti $a_{i,j}$ siano di classe $L^\infty(\Omega)$. Denotiamo

$$M := \left\| \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)};$$

applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, si trova che per quasi ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$\nu |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \le \left[\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} |\xi_i|^2 |\xi_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le M \|\xi\|^2.$$

In particolare, vale che $\nu \leq M$. Poniamo $A^+ := (a^+_{i,j})$, $A^- := (a^-_{i,j})$ rispettivamente la parte simmetrica e antisimmetrica di A

$$a^+_{i,j}(x) := \frac{a_{i,j}(x) + a_{j,i}(x)}{2}, \quad a^-_{i,j}(x) := \frac{a_{i,j}(x) - a_{j,i}(x)}{2}.$$

Si nota immediatamente che valgono le proprietà seguenti:

$$\left\| \sum_{i,j=1}^n \left|a^+_{i,j}\right|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad \left\| \sum_{i,j=1}^n \left|a^-_{i,j}\right|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)} \leq M;$$

per quasi ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$\sum_{i,j=1}^n a^+_{i,j}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \quad \sum_{i,j=1}^n a^-_{i,j}(x)\xi_i\xi_j = 0.$$

Presentiamo alcuni semplici lemmi di carattere generale, di cui faremo uso in seguito.

Lemma 5.4.1. *Per quasi ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che*

$$\sum_{i=1}^n \left[M\xi_i - \sum_{j=1}^n a^+_{i,j}(x)\xi_j \right]^2 \leq (M-\nu)^2 \left|\xi\right|^2.$$

Dimostrazione. Fissato $x \in \Omega$, poniamo

$$\mathcal{A}(\xi,\eta) := M \sum_{i=1}^n \eta_i\xi_i - \sum_{i,j=1}^n a^+_{i,j}(x)\eta_i\xi_j, \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}^n.$$

Notiamo che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$\mathcal{A}(\xi,\xi) = M \sum_{i=1}^n \xi_i\xi_i - \sum_{i,j=1}^n a^+_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq (M-M)\left|\xi\right|^2 = 0,$$

$$\mathcal{A}(\xi,\xi) = M \sum_{i=1}^n \xi_i\xi_i - \sum_{i,j=1}^n a^+_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq (M-\eta)\left|\xi\right|^2,$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si trova che per ogni $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$, vale che

$$\left|\mathcal{A}(\xi,\eta)\right| \leq \sqrt{\mathcal{A}(\xi,\xi)}\sqrt{\mathcal{A}(\eta,\eta)} \leq (M-\nu)\left|\xi\right|\left|\eta\right|.$$

Segue che

$$\sup_{|\eta|=1} \left|\mathcal{A}(\xi,\eta)\right| \leq (M-\nu)\left|\xi\right|.$$

Deduciamo le disuguaglianze seguenti:

$$\left|(MId - A^+(x))\xi\right| = \sup_{|\eta|=1} \left|< (MId - A^+(x))\xi, \eta >\right| = \sup_{|\eta|=1} \left|\mathcal{A}(\eta,\xi)\right| \leq (M-\nu)\left|\xi\right|;$$

allora otteniamo la tesi. □

Lemma 5.4.2. *Per quasi ogni $x \in \Omega$, per ogni $\mu > 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che*

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mu M \xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{-}(x) \xi_j \right]^2 \leq M^2 (1 + \mu^2) |\xi|^2 .$$

Dimostrazione. Sviluppando i conti, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left[\mu M \xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{-}(x) \xi_j \right]^2 &= \mu^2 M^2 |\xi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{-}(x) \xi_j \right]^2 - 2M\mu \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{-}(x) \xi_i \xi_j \\
&= \mu^2 M |\xi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{-}(x) \xi_j \right]^2 \\
&\leq \mu^2 M^2 |\xi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left| a_{i,j}^{-} \right|^2 \right] \left[\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \right] \\
&= M^2 (\mu^2 + 1) |\xi|^2 .
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.4.3. *Per quasi ogni $x \in \Omega$, per ogni $\mu > 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale che*

$$\sum_{i=1}^{n} \left[M(1+\mu) \xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x) \xi_j \right]^2 \leq \left[M(1 + \sqrt{1+\mu^2}) - \nu \right]^2 |\xi|^2 .$$

Dimostrazione. Sviluppando i conti, utilizzando la disuguaglianza di Minkowski e i lemmi 5.4.1 e 5.4.2, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=1}^{n} \left[M(1+\mu) \xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x) \xi_j \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad = \left[\sum_{i=1}^{n} \left[M\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{+}(x) \xi_j + M\mu \xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{-}(x) \xi_j \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq \left[\sum_{i=1}^{n} \left[M\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{+}(x) \xi_j \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} \left[M\mu \xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{-}(x) \xi_j \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq |\xi| \left[(M - \nu) + M\sqrt{1+\mu^2} \right] .
\end{aligned}$$

Elevando al quadrato, si ottiene la tesi. □

5.4.1 Il metodo di Campanato

Presentiamo il primo dei metodi menzionati per lo studio delle soluzioni deboli di problemi uniformemente ellittici. Supponiamo che Ω sia limitato; lavoriamo con le assunzioni introdotte nel paragrafo precedente.

Enunciamo un lemma di iterazione nello stesso spirito del lemma 5.2.1, di cui omettiamo la dimostrazione.

Lemma 5.4.4. *Siano $\sigma \in (0,1)$, $\varphi : (0,\delta) \to [0,+\infty)$ una funzione non decrescente, $\alpha > 0$, $K_1 \in (0,1)$ e $A \geq 1$. Supponiamo che per ogni $\sigma \in (0,\delta)$ per ogni $t \in (0,\sigma)$ valga*

$$\varphi(t\sigma) \leq [A(1+K_1)t^\alpha + K_1]\,\varphi(\sigma).$$

Allora esistono $\varepsilon(K_1, A) > 0$ ed una costante $c(\mathcal{A}, K_1) > 0$ tali che per ogni $\sigma \in (0,\delta)$ per ogni $t \in (0,\sigma)$ vale che

$$\varphi(t\sigma) \leq ct^{\alpha\varepsilon}\varphi(\sigma).$$

Per la precisione, vale che

$$\varepsilon = \sup_{0<t<\frac{1-K_1}{1+K_1}} \frac{\ln[(1+K_1)t + K_1]}{\ln(t) - \ln(A)}, \quad C = \frac{1-\varepsilon}{K_1}.$$

Possiamo finalmente presentare due risultati di regolarità interna per le soluzioni di problemi ellittici con coefficienti L^∞; le dimostrazioni sono del tutto simili a quella del teorema di regolarità negli spazi di Morrey (vedi 5.2.2), che richiameremo a tempo debito.

Teorema 5.4.5. *Sia $u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j}D_ju] = 0.$$

Esistono $\varepsilon(\nu, M) > 0$ e $c(\nu, M) > 0$ (indipendenti da ogni altro parametro) tali che per ogni palla $B_R(x_0) \Subset \Omega$ per ogni $r \in (0,R)$ vale che

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_r(x_0)} |D_iu|^2\ dx \leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{n\varepsilon} \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} |D_iu|^2\ dx. \tag{5.62}$$

Dimostrazione. Sia $\mu > 0$ (lo sceglieremo in seguito in dipendenza da M e ν). Per semplicità, denotiamo con $c(n, M, \mu, \nu) > 0$ una costante (indipendente da ogni altro parametro), che può cambiare da linea a linea.

Fissiamo una palla $B_R(x_0) \Subset \Omega$. Possiamo scrivere $u = v + w$, con $w \in H_0^1(B_R(x_0))$ soluzione debole del problema

$$M(1+\mu)\Delta w = \sum_{i=1}^n D_i[M(1+\mu)D_iu - a_{i,j}D_ju], \tag{5.63}$$

e $v \in H_u^1(B_R(x_0))$ è soluzione debole del problema

$$\Delta v = 0. \tag{5.64}$$

Per il lemma 5.1.2, per ogni $r \in (0,R)$ vale che

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_r(x_0)} |D_iv|^2\ dx \leq c(n)\left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} |D_iv|^2\ dx. \tag{5.65}$$

Precisiamo che la costante c in (5.65) dipende esclusivamente dalla dimensione, essendo v indipendente da M, μ e ν; per questa ragione la indichiamo con $c(n)$. Per stimare w, invece, possiamo prendere w stessa come funzione test nella formulazione debole (5.63) e, applicando la disuguaglianza di Hölder e il lemma 5.4.3, troviamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}|D_i w|^2\ dx &\le \frac{1}{[M(1+\mu)]^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}\left|M(1+\mu)D_i u-\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}D_j u\right|^2\ dx\\ &\le \frac{[M(1+\sqrt{1+\mu^2})-\nu]^2}{M^2(1+\mu)^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}|D_i u|^2\ dx. \qquad (5.66)\end{aligned}$$

Se poniamo

$$K(M,\mu,\nu) := \frac{[M(1+\sqrt{1+\mu^2}-\nu)]^2}{M^2(1+\mu)^2},$$

è immediato verificare che $K(M,\mu,\nu)<1$ se vale la condizione

$$\mu > \frac{M^2-\nu^2}{2M\nu};$$

fissiamo μ in modo che $K(M,\mu,\nu)<1$. Allora, utilizzando le stime (5.65) e (5.66), per ogni $r\in(0,R)$ valgono le seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_r(x_0)}|D_i u|^2\ dx\right]^{1/2}\\ &\qquad\le c(n)\left(\frac{r}{R}\right)^{n/2}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}|D_i v|^2\ dx\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}|D_i w|^2\ dx\right]^{1/2}\\ &\le c(n)\left(\frac{r}{R}\right)^{n/2}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}|D_i u|^2\ dx\right]^{1/2}\\ &\qquad+\left[c(n)\left(\frac{r}{R}\right)^{n/2}+1\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}|D_i w|^2\ dx\right]^{1/2}\\ &\le c(n)\left(\frac{r}{R}\right)^{n/2}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}|D_i u|^2\ dx\right]^{1/2}\\ &\qquad+K(M,\nu)^{1/2}\left[c(n)\left(\frac{r}{R}\right)^{n/2}+1\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_0)}|D_i u|^2\ dx\right]^{1/2}. \qquad (5.67)\end{aligned}$$

Osserviamo che esiste $\sigma\in(0,1)$ tale che se $r/R<\sigma$, allora vale

$$K(M,\nu)^{1/2}\left[c(n)\left(\frac{r}{R}\right)^{n/2}+1\right]\le K_1<1.$$

In tal caso, riscrivendo la stima (5.67) troviamo che per ogni palla $B_R(x_0)\Subset\Omega$ per ogni $r\in(0,R\sigma)$ vale che

$$\varphi(r)\le\left[c(n)\left(\frac{r}{R}\right)^{n/2}+K_1\right]\varphi(R), \qquad (5.68)$$

avendo posto

$$\varphi(r) := \left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_r(x_0)}|D_i u|^2\ dx\right]^{1/2}.$$

Per la stima (5.68), la funzione φ soddisfa le ipotesi del lemma 5.4.4; allora la disuguaglianza (5.62) segue immediatamente dall'applicazione del lemma 5.4.4 nel caso in cui $r/R < \sigma$. Precisiamo che le costanti c ed ε date dal lemma dipendono esclusivamente da M, n e ν. Se, invece, $r/R > \sigma$ è banale ottenere la disuguaglianza (5.62) (si può procedere come nella parte finale della dimostrazione del teorema 5.2.2). □

Teorema 5.4.6. *Sia $u \in H^1(\Omega)$ soluzione del problema*

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j}uD_ju] = \sum_{i=1}^n D_if_i.$$

Sia $\varepsilon > 0$ dato dal teorema 5.4.5 e sia $\lambda \in [0, n\varepsilon)$. Supponiamo che $f_i \in L^{2,\lambda}(\Omega)$. Allora esiste una costante $c(M, n, \nu) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni palla $B_R(x_0) \Subset \Omega$ per ogni $r \in (0, R)$ vale la stima

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{B_r(x_0)} |D_iu|^2 \ dx \leq c\left(\frac{r}{R}\right)^\lambda \left[\sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} |D_iu|^2 \ dx + \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega)}\right]. \tag{5.69}$$

In particolare vale che $D_iu \in L^{2,\lambda}_{loc}(\Omega)$.

Dimostrazione. Fissiamo una palla $B_R(x_0) \Subset \Omega$. Consideriamo la decomposizione $u = v + w$, con $v \in H^1_0(B_R(x_0))$ soluzione debole dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j}uD_jw] = \sum_{i=1}^n D_if_i \tag{5.70}$$

e $w \in H^1_u(B_R(x_0))$ soluzione debole dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j}uD_jw] = 0. \tag{5.71}$$

Per stimare v possiamo applicare il teorema 5.4.5 e ottenere che per ogni $r \in (0, R)$ vale la stima

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_r(x_0)} |D_iv|^2 \ dx \leq c(n, M, \nu)\left(\frac{r}{R}\right)^{\varepsilon n} \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} |D_iv|^2 \ dx. \tag{5.72}$$

Per stimare w, invece, utilizzando proprio w come funzione test nella formulazione debole del problema (5.70), otteniamo che

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_R(x_0)} |D_iw|^2 \ dx \leq \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \int_{B_r(x_0)} |f_i|^2 \ dx.. \tag{5.73}$$

A questo punto, si procede come nella dimostrazione del teorema 5.2.2. □

5.4.2 Hole-filling technique

Presentiamo un altro metodo per studiare la regolarità interna per le soluzioni dei problemi ellittici con coefficienti L^∞, noto in letteratura come "hole-filling technique". Tale strategia si basa su una variante della disuguaglianza di Caccioppoli (vedi 5.1.1).

Adotteremo la notazione seguente: dati $x_0 \in \overline{\Omega}$, $r, R > 0$, poniamo

$$\Omega_r(x_0) := \Omega \cap B_r(x_0), \quad \Omega_{r,R}(x_0) := \Omega \cap [B_R(x_0) \setminus B_r(x_0)].$$

Lemma 5.4.7. *Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a_{i,j} D_j u] = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i.$$

Supponiamo che $f_i \in L^2(\Omega)$. Esiste una costante $c(n, \nu, a_{i,j}) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}$ per ogni $0 < r < R \leq d_\Omega$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ vale che

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_r(x_0)} |D_i u|^2 \ dx \leq c \left[\frac{1}{(R-r)^2} \int_{\Omega_{r,R}(x_0)} |u - s|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \ dx \right]. \tag{5.74}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è completamente identica a quella della disuguaglianza di Caccioppoli (vedi 5.1.1), osservando che la funzione cut-off θ vale costantemente 1 in $B_r(x_0)$, pertanto ha gradiente nullo in $B_r(x_0)$. Inoltre θu è in $H_0^1(\Omega_R(x_0))$ perchè θ si annulla su $\partial B_R(x_0)$ e $u \in H_0^1(B_R(x_0))$. □

Corollario 5.4.8. *Nel contesto del lemma 5.4.7, esiste una costante $c(n, \nu, a_{i,j}) > 0$ (indipendente da ogni altro parametro) tale che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}$ per ogni $0 < r < R \leq d_\Omega$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ vale che*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_r(x_0)} |D_i u|^2 \ dx \leq c \left[\frac{R^2}{(R-r)^2} \int_{\Omega_{r,R}(x_0)} |\nabla u|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \ dx \right]. \tag{5.75}$$

Dimostrazione. Per semplicità, indichiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}) > 0$ una costante indipendente da ogni altro parametro, che può cambiare da linea a linea.

Denotiamo con $\tilde{u}$ l'estensione di u a 0 fuori da Ω; essendo $u \in H_0^1(\Omega)$, vale che $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Prendiamo $x_0 \in \overline{\Omega}, 0 < r < R \leq d_\Omega$; denotiamo con $B_{r,R}(x_0)$ la corona circolare centrata in x_0 e di raggi r, R. Applichiamo la disuguaglianza data dal lemma 5.4.7 con $s = (\tilde{u})_{B_{r,R}(x_0)}$, poi una variante della disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger (vedi 4.4.1) per corone circolari e ricordiamo quanto osservato in 4.4.3. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r(x_0)} |\nabla u|^2 \ dx &\leq c \left[\frac{1}{(R-r)^2} \int_{\Omega_{r,R}(x_0)} \left| u - (\tilde{u})_{B_{r,R}(x_0)} \right|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \ dx \right] \\
&\leq c \left[\frac{1}{(R-r)^2} \int_{B_{r,R}(x_0)} \left| \tilde{u} - (\tilde{u})_{B_{r,R}(x_0)} \right|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \ dx \right] \\
&\leq c \left[\frac{R^2}{(R-r)^2} \int_{B_{r,R}(x_0)} |\nabla \tilde{u}|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \ dx \right] \\
&\leq c \left[\frac{R^2}{(R-r)^2} \int_{\Omega_{r,R}(x_0)} |\nabla u|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \ dx \right].
\end{aligned}$$

□

Presentiamo un lemma di iterazione, la cui dimostrazione è nello stesso spirito di quella del lemma 5.2.1.

Lemma 5.4.9. *Siano $\varphi, \Phi : (0,d] \to [0,+\infty)$ funzioni non decrescenti. Supponiamo che esistano $c > 0$ e $p \geq 1$ tali che per ogni $0 < r \leq R < d$ valga che*

$$\varphi(r) \leq \frac{cR^p}{(R-r)^p + cR^p}\varphi(R) + \frac{(R-r)^p}{(R-r)^p + cR^p}\Phi(R).$$

Allora esistono $\gamma(c,p) > 1, \alpha(c,p) \in (0,1)$ tali che per ogni $0 < r \leq R < d$ vale che

$$\varphi(r) \leq \gamma^\alpha \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \varphi(R) + \Phi(R).$$

Dimostrazione. Fissiamo $a > 1$ (lo sceglieremo in seguito). Dato $R \in (0,d)$, sia $r = R/a$; per ipotesi, vale che

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{R}{a}\right) &\leq \frac{cR^p}{\left(R - \frac{R}{a}\right)^p cR^p}\varphi(R) + \frac{\left(R - \frac{R}{a}\right)^p}{\left(R - \frac{R}{a}\right)^p cR^p}\Phi(R) \\
&= \frac{ca^p}{(a-1)^p + ca^p}\varphi(R) + \frac{(a-1)^p}{(a-1)^p ca^p}\Phi(R) \qquad (5.76)\\
&= B\varphi(R) + A\Phi(R), \qquad (5.77)
\end{aligned}$$

avendo posto

$$A := \frac{(a-1)^p}{(a-1)^p + ca^p}, \quad B := \frac{ca^p}{(a-1)^p + ca^p}.$$

Riapplicando la disuguaglianza (5.77), otteniamo che

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{R}{a^2}\right) &\leq B\varphi\left(\frac{R}{a}\right) + A\Phi\left(\frac{R}{a}\right) \\
&\leq B\left[B\varphi(R) + A\Phi(R)\right] + A\Phi\left(\frac{R}{a}\right) \\
&\leq B^2\varphi(R) + A(B+1)\Phi(R).
\end{aligned}$$

Iterando il procedimento, notando che $B < 1$ e $A = 1 - B$, troviamo che per ogni $l \in \mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{R}{a^{l+1}}\right) &\leq B^{l+1}\varphi(R) + A\frac{1 - B^{l+1}}{1 - B}\Phi(R) \\
&\leq B^{l+1}\varphi(R) + \frac{A}{1-B}\Phi(R) \\
&= B^{l+1}\varphi(R) + \Phi(R). \qquad (5.78)
\end{aligned}$$

Siano $0 < r < R < d$; scegliamo $l \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{R}{a^{l+2}} \leq r < \frac{R}{a^{l+1}}.$$

Siccome φ è non decrescente, applicando la disuguaglianza (5.78), troviamo che

$$\varphi(r) \leq \varphi\left(\frac{R}{a^{l+1}}\right) \leq B^{l+1}\varphi(R) + \Phi(R). \qquad (5.79)$$

Notiamo che per ogni $\alpha \in (0,1)$ (lo fisseremo in seguito), vale che

$$\begin{aligned} B^{l+1} &= \frac{[ca^p]^{l+1}}{[(a-1)^p + ca^p]^{l+1}} \frac{r^\alpha}{r^\alpha} \\ &\leq \left[\frac{ca^p}{(a-1)^p + ca^p}\right]^{l+1} \frac{a^{(l+2)\alpha} r^\alpha}{R^\alpha} \\ &= \left[\frac{ca^{p+\alpha}}{(a-1)^p + ca^p}\right]^{l+1} \frac{r^\alpha}{R^\alpha} a^\alpha. \end{aligned}$$

Scegliamo α in modo che

$$\frac{ca^{p+\alpha}}{(a-1)^p + ca^p} = 1,$$

ovvero che

$$\alpha = \frac{1}{\ln(a)} \ln\left(\frac{(a-1)^p + ca^p}{ca^p}\right).$$

Precisiamo che è possibile scegliere $a > 1$ in modo che $\alpha \in (0,1)$; basta osservare che se a è molto grande, vale che

$$\frac{(a-1)^p + ca^p}{ca^p} < a \Longleftrightarrow \frac{(a-1)^p}{a^p} < c.$$

Con questa scelta di $a > 1$ e di $\alpha \in (0,1)$ (che dipendono esclusivamente da c, p) dalla stima (5.79)

$$\varphi(r) \leq a^\alpha \frac{r^\alpha}{R^\alpha} \varphi(R) + \Phi(R).$$

□

Possiamo presentare il risultato di regolarità ellittica con coefficienti L^∞ annunciato.

Teorema 5.4.10. *Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole del problema*

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{i,j} D_j u] = \sum_{i=1}^n D_i f_i.$$

Sia $\lambda \in [0,n)$ e supponiamo che $f_i \in L^{2,\lambda}(\Omega)$. Esiste $\alpha \in (0,1)$ tale che se $\lambda < \alpha$ allora $D_i u \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ e se $\lambda \geq \alpha$ allora $D_i u \in L^{2,\mu}(\Omega)$ per ogni $\mu \in (0,\alpha)$.

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo con $c(n, \nu, a_{i,j}) > 0$ una costante (indipendente da ogni altro parametro), che può cambiare da linea a linea.

Dati $x_0 \in \overline{\Omega}, 0 < r < R \leq d_\Omega$, consideriamo la stima data dal corollario 5.4.8 (vedi (5.75)) e sommiamo ad entrambi i membri la quantità

$$\frac{cR^2}{(R-r)^2} \int_{\Omega_r(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx;$$

riordinando i termini, otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx &\leq \frac{cR^2}{(R-r)^2 + cR^2} \int_{\Omega_R(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \\ &\quad + \frac{(R-r)^2}{(R-r)^2 + cR^2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{5.80}$$

Se poniamo

$$\varphi(\sigma) := \int_{\Omega_\sigma(x_0)} |\nabla u|^2 \ dx, \quad \Phi(\sigma) := \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\sigma(x_0)} |f_i|^2 \ dx,$$

possiamo applicare il lemma 5.4.9 e troviamo che esistono $a > 1$ e $\alpha \in (0,1)$ tali che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}$ per ogni $0 < r < R \leq d_\Omega$ vale che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_r(x_0)} |D_i u|^2 \ dx &\leq a^\alpha \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_R(x_0)} |D_i u|^2 \ dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \ dx \\
&=\leq a^\alpha \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_R(x_0)} |D_i u|^2 \ dx + R^\lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{R^\lambda} \int_{\Omega_R(x_0)} |f_i|^2 \ dx \\
&=\leq a^\alpha \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_R(x_0)} |D_i u|^2 \ dx + R^\lambda \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega)} . \qquad (5.81)
\end{aligned}$$

Se $\lambda < \alpha$, si procede come nella dimostrazione del teorema 5.2.2; se $\lambda \geq \alpha$, la disuguaglianza (5.81) implica che per ogni $\mu \in (0, \alpha)$ esiste una costante $K(\mu) > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}$ per ogni $0 < r < R \leq d_\Omega$ vale che

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_r(x_0)} |D_i u|^2 \ dx \leq a^\alpha \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_R(x_0)} |D_i u|^2 \ dx + R^\mu K(\mu) \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega)} .$$

Allora, si procede come nel caso in cui $\lambda < \alpha$, ovvero come nella dimostrazione del teorema 5.2.2. □