Il teorema di Fatou

Marco Inversi

17 Gennaio 2020

Notazione

Nel seguito denoteremo con U la palla unitaria aperta nel piano complesso e con T il suo bordo. A seconda dei casi, identificheremo gli spazi $L^p(T)$ e $C(T)$ con i corrispondenti spazi di funzioni 2π-periodiche a valori complessi, se non diversamente indicato.

Data una funzione $f \in C(T)$, denoteremo con

$$\|f\|_T := \sup_T |f|\,;$$

data una funzione $f \in L^p(T)$, denoteremo

$$\|f\|_p := \|f\|_{L^p(T)}\,.$$

Data una funzione $u : U \to \mathbb{C}$ e fissato $r \in (0,1)$, denoteremo con $u_r : T \to \mathbb{C}$ la sua restrizione alla circonferenza di centro 0 e raggio r; per la precisione, vale

$$u_r(e^{i\theta}) := u(re^{i\theta})\ \forall e^{i\theta} \in T.$$

1 Introduzione

Sia data una funzione armonica f in U. É possibile identificare una funzione g su T che permetta di ricostruire completamente f? Ammesso che questa funzione esista, vale qualche proprietà di continuità? In altri termini, ci chiediamo se l'incollamento tra f e g su T avviene in maniera "regolare".

2 Richiami sulle funzioni armoniche

Definizione 2.1 (Funzione armonica)**.**
Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(U)$. Si dice che U è armonica se

$$\Delta f(z) = 0\ \forall z \in U.$$

Una funzione a valori complessi è armonica se lo sono la sua parte reale e la sua parte immaginaria.

Definizione 2.2 (Proprietà della media).
Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dice che f ha la proprietà della media sulle palle se per ogni $z_0 \in U$ per ogni $r > 0$ tale che $B(z_0; r)$ è relativamente compatto in U vale che

$$f(z_0) = \fint_{B(z_0;r)} f(z)\, dz.$$

Si dice che f ha la proprietà della media sulle sfere se per ogni $z_0 \in U$ per ogni $r > 0$ tale che $B(z_0; r)$ è relativamente compatto in U vale che

$$f(z_0) = \fint_{\partial B(z_0;r)} f(z)\, ds.$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 2.3. *Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sono fatti equivalenti:*

- *$f \in C^2(U)$ ed è armonica;*
- *f gode della proprietà della media sulle sfere;*
- *f gode della proprietà della media sulle palle.*

Se vale una delle seguenti condizioni, si ha che $f \in C^\infty(U)$.

Gli ingredienti essenziali per dimostrare il teorema appena enunciato sono la formula della divergenza e la regolarizzazione per convoluzione. Segue facilmente un corollario di grande importanza.

Corollario 2.4 (Principio del massimo).
Sia $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $\overline{U}$ e armonica in U; allora vale che

$$\min_{\overline{U}} f = \min_{T} f, \quad \max_{\overline{U}} f = \max_{T} f.$$

Ricordiamo anche il seguente risultato fondamentale, la sui dimostrazione è un'immediata applicazione delle equazioni di Cauchy-Riemann.

Teorema 2.5. *Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa è armonica, cioè lo sono la sua parte reale e la sua parte immaginaria, come funzioni a valori reali.*

Essendo tutte le definizioni date e tutti i risultati enunciati di carattere locale, il fatto che U sia la palla unitaria in $\mathbb{C}$ non ha alcuna importanza.

3 Estensioni armoniche

Sia data una funzione f o una misura μ su T. Vogliamo costruire in maniera canonica una funzione armonica su U in modo che l'incollamento al bordo avvenga in maniera abbastanza "regolare".

3.1 Nucleo di Poisson

Definizione 3.1 (Nucleo di Poisson)**.**
Per ogni $r \in [0,1)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ definiamo il nucleo di Poisson

$$P_r(t) := \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|} e^{int},$$

con la convenzione che $P_0(t) = 1$.

Osservazione 3.2. Fissato $r \in [0,1)$, notiamo che la serie che definisce il nucleo di Poisson converge totalmente in $\mathbb{R}$, allora $P_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione continua ben definita.

Dalla convergenza uniforme della serie che definisce P_r si ha che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\ dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} e^{int}\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\ dt = 1.$$

Un semplice conto mostra che

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \Re\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right) \\ &= \Re\left(\frac{1+2ir\sin t - r^2}{1-2r\cos t + r^2}\right) \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}, \end{aligned}$$

quindi P_r è una funzione a valori reali positivi. É utile ricordare tutte queste espressioni di $P_r(t)$. Chiaramente, possiamo vedere $P_r(t)$ come una funzione di due variabili oppure come una famiglia di funzioni di variabile t indicizzata da r. Dalla formula trovata segue anche che $(P_r)_r$ converge uniformemente a 0 per $r \to 1^-$ sui compatti di $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

3.2 Estensione armonica di funzioni

Definizione 3.3 (Integrale di Poisson)**.**
Sia data una funzione $f \in L^1(T)$. Definiamo

$$F(re^{it}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\ dt.$$

La funzione $F : U \to \mathbb{R}$ è detta integrale di Poisson di f in U. Adotteremo la notazione

$$F = P[f].$$

Osservazione 3.4. Se $f \in L^1(T)$ è una funzione a valori complessi, essendo $P_r(t)$ a valori reali, notiamo che

$$P[f] = P[\Re(f)] + iP[\Im(f)].$$

Analizziamo il caso in una funzione continua.

Teorema 3.5. *Sia $f \in L^1(T)$; l'integrale di Poisson di f è una funzione armonica in U.*

Dimostrazione. Essendo $P[f] = P[\Re(f)] + iP[\Im(f)]$, possiamo ragionare separatamente per la parte reale e la parte immaginaria. In altri termini, possiamo supporre che f sia a valori reali.

Ricordando le formule ottenute in 3.2 ed essendo f a valori reali, vale che

$$\begin{aligned} F(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\; dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Re\left(\frac{1 + re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}}\right) f(t)\; dt \\ &= \Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} f(t)\; dt\right). \end{aligned}$$

Ponendo $z = re^{i\theta}$, abbiamo che

$$F(z) = \Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t)\; dt\right).$$

Notiamo che la funzione $G : U \to \mathbb{C}$ tale che

$$G(z) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t)\; dt$$

è olomorfa in U: verificare che G soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann è un esercizio di derivazione sotto il segno di integrale (infatti, fissato $z_0 \in U$, l'integranda che definisce G è olomorfa e uniformemente limitata in norma C^1 in intorno di z_0 abbastanza piccolo). Deduciamo che F è armonica, in quanto parte reale di una funzione olomorfa. □

Teorema 3.6. *Sia $f \in C(T)$; definiamo*

$$Hf(re^{it}) \coloneqq \begin{cases} f(e^{it}) & \text{se } r = 1, \\ P[f](re^{it}) & \text{se } r \in [0, 1). \end{cases}$$

Allora Hf è continua in $\overline{U}$.

Dimostrazione. Siccome $P_r(t) > 0$ per ogni $r \in [0, 1)$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$ (vedi 3.2), per ogni funzione $g \in C(T)$ vale che

$$\begin{aligned} \left|P[g](re^{it})\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(t)\; dt\right| \\ &\le \|g\|_T \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(\theta - t)|\; dt \\ &= \|g\|_T \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\; dt \\ &= \|g\|_T . \end{aligned}$$

Deduciamo che per ogni $g \in C(T)$ vale la stima

$$\|Hg\|_{\overline{U}} \le \|g\|_T .$$

Sia g è un polinomio trigonometrico, diciamo

$$g(e^{i\theta}) \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\theta n};$$

un semplice calcolo mostra che

$$Hg(re^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{in\theta};$$

quindi $Hg \in C(\overline{U})$.

Fissiamo $f \in C(T)$; per densità dei polinomi trigonometrici in $C(T)$ (questo è un risultato classico che segue, per esempio, dal teorema di Stone-Weierstrass), esiste una successione $(g_k)_k$ di polinomi trigonometrici che converge a f uniformemente in T. Dalla linearità dell'operatore H, segue che

$$\|Hg_k - Hf\|_{\overline{U}} = \|H(g_k - f)\|_{\overline{U}} \leq \|g_k - f\|_T \to 0.$$

Dunque $Hg_k \to Hf$ uniformemente in $\overline{U}$; essendo $(Hg_k)_k$ una successione di funzioni continue, deduciamo che Hf è una funzione continua. □

Osservazione 3.7. I teoremi 3.5 e 3.6 risolvono il problema di Laplace con condizioni al bordo di Dirichlet continue, cioè data una funzione continua $f \in C(T)$, la funzione Hf è una funzione continua in $\overline{U}$, armonica in U e che coincide con f su T. Inoltre è anche l'unica possibile estensione armonica di U; supponiamo che u, v siano due estensioni armoniche di f a U. Notiamo che $w := u - v$ è una funzione armonica in U, continua in $\overline{U}$ e nulla su T; dal principio del massimo (vedi 2.4) segue immediatamente che w è nulla in $\overline{U}$.

Per riassumere, abbiamo ottenuto che una funzione armonica in U e continua in $\overline{U}$ coincide con l'integrale di Poisson della sua restrizione a T.

Analizziamo il caso di una funzione $f \in L^p(T)$ per qualche $p \in [1, +\infty]$.

Teorema 3.8. *Siano $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p(T)$ e $u := P[f]$.*

- *Per ogni $r \in [0, 1)$ vale che*
$$\|u_r\|_p \leq \|f\|_p .$$
- *Se $p \in [1, +\infty)$, vale che*
$$\lim_{r\to 1} \|u_r - f\|_p = 0.$$
- *Se $p = +\infty$ e $f \in C(T)$, vale che*
$$\lim_{r\to 1} \|u_r - f\|_T = 0.$$

Dimostrazione. **1)** Supponiamo $p \in [1, +\infty)$. Fissiamo $f \in L^p(T)$, $r \in (0, 1)$ e sia $e^{i\theta} \in T$; ricordiamo che f assume generalmente valori complessi. Poichè $P_r(\theta - t) > 0$ e

$$\frac{1}{2\pi} \int_T P_r(\theta - t)\ dt = 1,$$

la misura $\nu_\theta := \frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t)dt$ (cioè la misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue su T, avente densità $\frac{1}{2\pi} P_r(\theta - \cdot)$) è una probabilità su T. Applicando la disuguaglianza di Jensen rispetto a questa misura di probabilità, deduciamo che

$$\begin{aligned}
\left|u_r(e^{i\theta})\right|^p &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta-t)\ dt\right|^p \\
&= \left|\int_T f(t)\ d\nu_\theta\right|^p \\
&\le \left(\int_T |f|\ d\nu_\theta\right)^p \\
&\le \int_T |f|^p\ d\nu_\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, P_r(\theta-t)\ dt.
\end{aligned}$$

Integrando rispetto a θ e usando il teorema di Fubini, si trova che

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|u_r(e^{i\theta})\right|^p\ d\theta &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, P_r(\theta-t)\ dt\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \left(\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\ d\theta\right)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(e^{i\theta})\right|^p 2\pi\ dt \\
&= \|f\|_p^p .
\end{aligned}$$

Notiamo che se $p=+\infty$, è banale ottenere la stima richiesta.

2) Sia g un polinomio trigonometrico, diciamo

$$g(e^{i\theta}) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}.$$

Abbiamo già osservato che

$$P[g](re^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|} c_n e^{in\theta}.$$

In questo caso è ovvio che $P[g]_r \to g$ uniformemente in T se $r\to 1$. In particolare, la convergenza vale in $L^p(T)$ per ogni $p\in[1,+\infty)$. Fissata $p\in[1,+\infty)$, per densità dei polinomi trigonometrici in $L^p(T)$, siano $\varepsilon>0$ e g un polinomio trigonometrico tale che

$$\|g-f\|_p \le \varepsilon.$$

Vale che

$$\begin{aligned}
\|P[f]_r - f\|_p &\le \|P[f]_r - P[g]_r\|_p + \|P[g]_r - g\|_p + \|g-f\|_p \\
&\le 2\|f-g\|_p + \|P[g]_r - g\|_p \\
&\le 2\varepsilon + \|P[g]_r - g\|_p .
\end{aligned}$$

Passando al limite per $r\to 1$, si trova che

$$\lim_{r\to 1}\|P[f]_r - f\|_p \le 2\varepsilon$$

e la conclusione segue dall'arbitrarietà di ε.

3) Se $f\in C(T)$, si procede in maniera totalmente analoga al caso precedente, osservando che i polinomi trigonometrici sono densi in $C(T)$. $\square$

3.3 Estensione armonica di misure

Osservazione 3.9. Se poniamo $z = re^{i\theta}$, notiamo che

$$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= \Re\left(\frac{1 + re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}}\right) = \Re\left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}}\right) \\ &= \Re\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} \\ &= P(z; e^{it}). \end{aligned}$$

Allora, possiamo scrivere l'integrale di Poisson di una funzione $f \in L^1(T)$ come

$$P[f](z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z; e^{it})f(t)\ dt = \int_T P(z; e^{it})\ d\mu(e^{it}),$$

dove μ è la misura boreliana su T definita dalla densità $\frac{f}{2\pi}$ rispetto alla misura di Lebesgue.

Quanto osservato dà lo spunto per estendere la definizione di integrale di Poisson al contesto delle misure.

Definizione 3.10 (Integrale di Poisson di una misura)**.**
Data una misura boreliana μ su T a valori complessi, si definisce l'integrale di Poisson di μ come la funzione $P[d\mu] : U \to \mathbb{C}$ tale che

$$P[d\mu](z) \coloneqq \int_T P(z; e^{it})\ d\mu(e^{it}).$$

Osservazione 3.11. Anche in questo caso (il nucleo di Poisson assume valori reali positivi), scrivendo $\mu = \Re(\mu) + i\Im(\mu)$, otteniamo che

$$P[d\mu] = P[d\Re(\mu)] + iP[d\Im(\mu)].$$

Ricordiamo che, data una misura boreliama μ su T a valori complessi, si denota

$$\|\mu\| \coloneqq |\mu|(T),$$

dove $|\mu|$ indica la variazione totale di μ.

In analogia al caso già analizzato, vale il seguente risultato.

Teorema 3.12. *Data una misura boreliana μ su T a valori complessi, l'integrale di Poisson $P[d\mu]$ è una funzione armonica in U (cioè lo sono la sua parte reale e la sua parte immaginaria). Inoltre, per ogni $r \in [0, 1)$ vale che*

$$\|P[d\mu]_r\|_1 \leq \|\mu\|,$$

facendo la norma L^1 in T rispetto alla misura σ.

Dimostrazione. La verifica dell'armonicità può essere svolta come nel teorema 3.5. Fissiamo $r \in [0, 1)$; in analogia al teorema 3.8, ricordando che $P(z; e^{it}) > 0$, per ogni $e^{i\theta} \in T$ troviamo che

$$\begin{aligned} \left|(P[d\mu]_r)(e^{i\theta})\right| &= \left|P[d\mu](re^{i\theta})\right| \\ &= \left|\int_T P(e^{i\theta}; e^{it})d\mu(e^{it})\right| \\ &\leq \int_T P(e^{i\theta}; e^{it})d\,|\mu|. \end{aligned}$$

Integrando rispetto a θ e applicando il teorema di Fubini ($|\mu|$ è una misura boreliana su T a valori non negativi), troviamo

$$\begin{aligned}\|P[d\mu]_r\|_1 &\leq \int_T \left(\int_T P(e^{i\theta}; e^{it}) d\,|\mu| \right) \, d\sigma \\ &= \int_T \left(\int_T P(e^{i\theta}; e^{it}) \, d\sigma \right) \, d\,|\mu| \\ &= \int_T 1 \, d\,|\mu| \\ &= |\mu| \, (T).\end{aligned}$$

□

4 Il problema della convergenza puntuale

Dal teorema 3.8 si deduce che per ogni funzione $f \in L^p(T)$, con $p \in [1, +\infty)$ vale che per ogni successione $r_j \to 1$ esiste una sottosuccessione $(r_{j_k})_k$ tale che per quasi ogni $e^{i\theta} \in T$ vale che

$$\lim_{k \to +\infty} P[f]_{r_{j_k}}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}).$$

Tuttavia, l'insieme di misura nulla in cui non c'è convergenza puntuale dipende dalla sottosuccessione. Questo non implica che esiste $A \subseteq T$ di misura piena tale che

$$\lim_{r \to 1} P[f]_r(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

per ogni $e^{i\theta} \in A$. Per indagare le questioni di convergenza puntuale, dobbiamo introdurre le opportune funzioni massimali.

4.1 Funzioni massimali

Definizione 4.1 (Regione di approccio)**.**
Dati $\alpha \in (0, 1)$ e $e^{i\theta} \in T$, denotiamo con $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ l'unione del disco aperto $B(0; \alpha)$ e di tutti i segmenti aperti aventi un estremo in $e^{i\theta}$ e l'altro nel disco $B(0; \alpha)$.

Osservazione 4.2. Fissato $e^{i\theta} \in T$, se α aumenta, le regioni $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ si ingrandiscono e vale

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1)} e^{i\theta}\Omega_\alpha = U;$$

invece

$$\bigcap_{\alpha \in (0,1)} e^{i\theta}\Omega_\alpha = [0, 1).$$

Notiamo anche che una curva in $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ che tende a $e^{i\theta}$ non può essere tangente a T.

Definizione 4.3 (Funzioni massimali)**.**
Siano $\alpha \in (0, 1)$ e $u : U \to \mathbb{C}$. Si definisce la funzione massimale non-tangente di U su T come

$$\mathcal{N}_\alpha u(e^{i\theta}) := \sup\{|u(z)| \mid z \in e^{i\theta}\Omega_\alpha\}.$$

Si definisce la funzione massimale non radiale di u su T come

$$\mathcal{M}_{rad} u(e^{i\theta}) := \sup\{\left|u(re^{i\theta})\right| \mid r \in [0, 1)\}.$$

Osservazione 4.4. Notiamo che se u è continua, i sottolivelli delle funzioni massimali introdotte in 4.3 sono chiusi (essendo intersezione di chiusi). Allora $\mathcal{N}_\alpha u$ e $\mathcal{M}_{rad}u$ sono semicontinue inferiormente; in particolare, sono funzioni misurabili. Inoltre, è ovvio che $\mathcal{M}_{rad}u \leq \mathcal{N}_\alpha u$ e $\mathcal{N}_\alpha u$ cresce se α aumenta.

Per semplificare la notazione, d'ora in avanti porremo

$$\sigma := \frac{\mathscr{L}\lfloor_T}{2\pi},$$

dove $\mathscr{L}\lfloor_T$ denota l'usuale misura di Lebesgue su T. In questo modo σ è una misura di probabilità boreliana su T.

Definizione 4.5 (Funzione massimale di una misura)**.**
Data una misura boreliana μ su T a valori complessi, si pone

$$\mathcal{M}_\mu(e^{i\theta}) := \sup \frac{|\mu|(I)}{\sigma(I)},$$

dove l'estremo superiore è fatto su tutti gli archi aperti I in T contenenti $e^{i\theta}$, incluso lo stesso T.

Valgono le seguenti stime sulle funzioni massimali. La dimostrazione si basa sul fatto che gli insiemi $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ hanno un angolo in prossimità di $e^{i\theta}$.

Teorema 4.6. *Sia $\alpha \in (0,1)$. Esiste una costante $c_\alpha > 0$ tale che per ogni misura boreliana μ finita e positiva su T per ogni $e^{i\theta} \in T$ vale che*

$$c_\alpha(\mathcal{N}_\alpha P[d\mu])(e^{i\theta}) \leq (\mathcal{M}_{rad}P[d\mu])(e^{i\theta}) \leq \mathcal{M}_\mu(e^{i\theta}).$$

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che si può supporre $\theta = 0$; se mostriamo la disuguaglianza in questo caso, con un costante $c_\alpha > 0$ indipendente dalla misura μ, otteniamo la tesi per ogni $e^{i\theta} \in T$ sostituendo al posto di una misura μ la sua versione ruotata μ_θ tale che

$$\mu_\theta(E) := \mu(e^{i\theta}E).$$

1) Supponiamo che esista una costante $c_\alpha > 0$ (indipendente da μ) tale che per ogni $z \in \Omega_\alpha$ per ogni $e^{it} \in T$ vale che

$$c_\alpha P(z; e^{it}) \leq P(|z|; e^{it}). \tag{1}$$

Allora deduciamo che (per ogni misura μ boreliana su T a valori reali non negativi) per ogni $z \in \Omega_\alpha$ vale che

$$\begin{aligned} c_\alpha |u(z)| &= c_\alpha \int_T P(z; e^{it})\, d\mu(e^{it}) \\ &\leq \int_T P(|z|; e^{it})\, d\mu(e^{it}) \\ &\leq \mathcal{M}_{rad}u(1); \end{aligned}$$

passando all'estremo superiore in Ω_α, troviamo che

$$c_\alpha \mathcal{N}_\alpha u(1) \leq \mathcal{M}_{rad}u(1).$$

Dall'espressione di $P(z; e^{it})$, deduciamo per ottenere (1) possiamo equivalentemente mostrare che

$$c_\alpha \left|e^{it} - r\right|^2 \leq \left|e^{it} - z\right|^2,$$

avendo posto $r = |z|$, per ogni $e^{it} \in T$ per ogni $z \in \Omega_\alpha$. Notiamo che per come è definito Ω_α, la funzione $\frac{|z-r|}{1-\rho}$ è limitata dall'alto in Ω_α, diciamo che una costante γ_α. Allora, per ogni $z \in \Omega_\alpha$ per ogni $e^{it} \in T$, posto $r = |z|$, si trova che

$$\begin{aligned} \left|e^{it} - r\right| &\leq \left|e^{it} - z\right| + |z - r| \\ &\leq \left|e^{it} - z\right| + \gamma_\alpha \left|1 - r\right| \\ &\leq (1 + \gamma_\alpha) \left|e^{it} - z\right|. \end{aligned}$$

Allora, basta porre

$$c_\alpha := (1 + \gamma_\alpha)^{-2}.$$

2) Per quanto riguarda la seconda disuguaglianza, dobbiamo mostrare che

$$\int_T P_r(t)\ d\mu(e^{it}) \leq \mathcal{M}_\mu(1).$$

Scegliamo degli archi aperti

$$I_1 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_{n-1} \subseteq I_n = T$$

centrati in 1. Per ogni $j \in \{1; \ldots; n\}$, sia $\mathbb{1}_j$ la funzione indicatrice di I_j e denotiamo che h_j il più grande numero positivo tale che $\mathbb{1}_j h_j \leq P_r$ su T (è facile vedere che h_j è ben definito). Poniamo

$$K := \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1}) \mathbb{1}_j,$$

avendo posto $h_{n+1} = 0$. Siccome $P_r(t)$ è una funzione pari in t che cresce se t aumenta da 0 a π, si nota che $h_j - h_{j+1} \geq 1$, che $K = h_j$ su $I_j \setminus I_{j-1}$ (con la convenzione che $I_0 = \emptyset$) e che $K \leq P_r$. Dalla definizione di $\mathcal{M}_\mu$ segue che

$$\mu(I_j) \leq \mathcal{M}_\mu(1)\sigma(I_j).$$

Allora, posto $M = \mathcal{M}_\mu(1)$, si trova che

$$\begin{aligned} \int_T K\ d\mu &= \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1})\mu(I_j) \leq M \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1})\sigma(I_j) \\ &= M \int_T K\ d\sigma \leq M \int_T P_r\ d\sigma = M. \end{aligned}$$

Infine, scegliendo gli archi in modo tale che i loro punti finali formino una partizione abbastanza fine di T, otteniamo una successione di step functions $(K_l)_l$ che converge a P_r uniformemente in T. Segue la tesi. $\square$

4.2 Limite non-tangente

Definizione 4.7 (Limite non-tangente)**.**
Si dice che una funzione $F : U \to \mathbb{C}$ ha limite non tangente λ in $e^{i\theta} \in T$ se per ogni $\alpha \in (0,1)$ per ogni successione $(z_j)_j \subseteq e^{i\theta}\Omega_\alpha$ tale che $z_j \to e^{i\theta}$ vale che

$$\lim_{j\to+\infty} F(z_j) = \lambda.$$

Definizione 4.8 (Derivata di una misura)**.**
Data una misura boreliana μ su T a valori complessi, si dice che μ ammette derivata in $e^{i\theta}$ se esiste ed è finito

$$\mathcal{D}\mu(e^{i\theta}) \coloneqq \lim \frac{\mu(I)}{\sigma(I)},$$

dove il limite è fatto sugli archi aperti aventi centro in $e^{i\theta}$ e la cui ampiezza tende a 0.

Teorema 4.9. *Siano μ una misura boreliana positiva su T e $e^{i\theta} \in T$ tale che $\mathcal{D}\mu(e^{i\theta}) = 0$. Allora $u \coloneqq P[d\mu]$ ha limite non-tangente 0 in $e^{i\theta}$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$; dalla definizione 4.8 segue che esiste un arco I_0 centrato in $e^{i\theta}$ tale che per ogni altro arco $I \subseteq I_0$ e centrato in $e^{i\theta}$ vale che

$$\mu(I) \leq \varepsilon\sigma(I).$$

Denotiamo $I_1 \coloneqq T \setminus I_0$; siano

$$\mu_0 \coloneqq \mu_{\lfloor I_0}, \quad \mu_1 \coloneqq \mu_{\lfloor I_1}.$$

Notiamo che sono entrambe misure boreliane non negative su T. Poniamo

$$u_0 \coloneqq P[d\mu_0], \quad u_1 \coloneqq P[d\mu_1]$$

e notiamo che $u_0 + u_1 = u$. Fissiamo $\alpha \in (0,1)$ e una successione $(z_j)_j \in e^{i\theta}\Omega_\alpha$ tendente a $e^{i\theta}$. Notiamo che $(z_j)_j$ ha distanza uniformemente positiva da I_1; poichè $P(z_j; e^{it}) \to 0$ uniformemente in I_1, deduciamo che

$$\lim_{j\to+\infty} u_1(z_j) = \lim_{j\to+\infty} \int_{I_1} P(z_j; e^{it})\ d\mu(e^{it}) = 0.$$

Per il teorema 4.6 esiste una costante $c_\alpha > 0$ tale che

$$c_\alpha \mathcal{N}_\alpha u_0(e^{i\theta}) \leq \mathcal{M}\mu_0(e^{i\theta}) \leq \varepsilon,$$

per l'ipotesi su I_0. Allora per ogni $z \in e^{i\theta}\Omega_\alpha$ vale che

$$|u_0(z)| \leq \mathcal{N}_\alpha u_0(e^{i\theta}) \leq \frac{\varepsilon}{c_\alpha}.$$

Segue che

$$\limsup_{j\to 0} |u_0(z_j)| \leq \frac{\varepsilon}{c_\alpha}.$$

Essendo $u = u_0 + u_1$, si ottiene la tesi dall'arbitrarietà di ε. $\square$

Definizione 4.10 (Punti di Lebesgue)**.**
Data una funzione $f \in L^1(T)$, si dice che $e^{i\theta}$ è un punto di Lebesgue per f se

$$\lim \frac{1}{\sigma(I)} \int_I \left| f - f(e^{i\theta}) \right| \, d\sigma = 0,$$

dove il limite è fatto sugli archi aperti aventi centro in $e^{i\theta}$ e la cui ampiezza tende a 0.

Corollario 4.11. *Siano $f \in L^1(T)$ e $e^{i\theta} \in T$ un punto di Lebesgue per f. Allora $P[f]$ ha limite non tangente in $f(e^{i\theta})$ in $e^{i\theta}$.*

Dimostrazione. A meno di aggiungere una costante, possiamo supporre che $f(e^{i\theta}) = 0$. Dalla definizione 4.10 deduciamo che

$$\lim \frac{1}{\sigma(I)} \int_I |f| \, d\sigma = 0,$$

dove il limite è fatto sugli archi aperti aventi centro in $e^{i\theta}$ e la cui ampiezza tende a 0. Sia μ la misura boreliana (finita) su T assolutamente continua rispetto a σ e definita dalla densità $|f|$, cioè

$$\mu(E) := \int_E |f| \, d\sigma.$$

Nelle nostre ipotesi, vale che $\mathcal{D}\mu(e^{i\theta}) = 0$; dal il teorema 4.9 segue che $P[d\mu]$ ha limite non tangente 0 in $e^{i\theta}$. La stessa conclusione vale per $P[f]$, essendo le seguenti stime puntuali banalmente vere:

$$|P[f]| \leq P[|f|] = P[d\mu].$$

□

Corollario 4.12. *Se μ è una misura boreliana a valori complessi su T, sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione boreliana a valori complessi tale che*

$$\mu = f \, d\sigma + d\mu_\perp$$

è la decomposizione di μ nella sua parte assolutamente continua e nella sua parte singolare rispetto alla misura di Lebesgue; per la precisione, vale che $f \in L^1(T)$ e $\mu_\perp$ è concentrata in un insieme di misura di Lebesgue nulla. Allora $P[d\mu]$ ha limite non tangenziale $f(e^{i\theta})$ per quasi ogni punto $e^{i\theta} \in T$ (rispetto alla misura di Lebesgue).

Dimostrazione. Vale

$$P[d\mu] = P[f \, d\sigma] + P[d\mu_\perp] = P[f] + P[d\mu_\perp].$$

Ricordando che l'insieme dei punti di Lebesgue di f ha misura di Lebesgue piena in T, deduciamo dal corollario 4.11 che per quasi ogni $e^{i\theta} \in T$ (rispetto alla misura di Lebesgue) vale che $P[f]$ ha limite non tangente $f(e^{i\theta})$ in $e^{i\theta}$. Per concludere, basta mostrare che $P[d\mu_\perp]$ ha limite non tangente 0 quasi ovunque in T (rispetto alla misura di Lebesgue). Inoltre, ricordando che per una misura boreliana ν su T a valori in $[0, +\infty)$ singolare rispetto alla misura di Lebesgue vale che $D\nu(e^{i\theta}) = 0$ quasi ovunque in T (rispetto alla misura di Lebesgue), possiamo applicare il teorema 4.9 alla parte positiva e negativa della parte reale e immaginaria di $\mu_\perp$ (che sono misure boreliane finite su T a valori non negativi singolari rispetto alla misura di Lebesgue). □

4.3 Estensione di funzioni armoniche

Ricordiamo i seguenti risultati classici di Analisi Funzionale.

Teorema 4.13 (Banach-Alaouglu sequenziale).
Siano $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach separabile e $\{\Lambda_n\}_n$ una successione di operatori lineari continui tali che

$$\sup_n \|\Lambda_n\|_{\mathbb{X}'} = M < +\infty,$$

*dove $\|\cdot\|_{\mathbb{X}'}$ indica la norma nello spazio duale. Esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed un funzionale $\Lambda \in \mathbb{X}'$ tale che $\Lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Lambda$ (converge debole *), cioè per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \Lambda_n(x) = \Lambda(x).$$

Teorema 4.14 (Rappresentazione di Riesz).
Valgono i seguenti fatti.

- *Siano $p \in [1,+\infty)$ e $q \in (1,+\infty]$ l'esponente coniugato a p. Definiamo $J : L^q(T;\mathbb{R}) \to (L^p(T;\mathbb{R}))'$ tale che per ogni $f \in L^p(T;\mathbb{R})$ per ogni $g \in L^q(T;\mathbb{R})$ vale che*

  $$J_g(f) := \int_T fg \; d\sigma.$$

  J è un'isometria lineare bigettiva.

- *Denotiamo con $\mathcal{M}(T;\mathbb{R})$ lo spazio delle misure boreliane su T a valori in $\mathbb{R}$ dotato della norma della variazione totale. Sia $J : \mathcal{M}(T;\mathbb{R}) \to (C(T;\mathbb{R}))'$ tale che per ogni $\mu \in \mathcal{M}(T;\mathbb{R})$ per ogni $f \in C(T;\mathbb{R})$ vale che*

  $$J_\mu(f) := \int_T f \; d\mu.$$

  J è un'isometria lineare bigettiva.

Possiamo finalmente mostrare il teorema seguente.

Teorema 4.15. *Sia $u : U \to \mathbb{C}$ armonica in u; supponiamo che esista $p \in [1,+\infty]$ tale che*

$$\sup_{r\in(0,1)} \|u_r\|_p = M < +\infty.$$

- *Se $p = 1$ esiste un'unica misura boreliana μ su T a valori complessi tale che $u = P[d\mu]$.*
- *Se $p > 1$ esiste un'unica funzione $f \in L^p(T)$ tale che $u = P[f]$.*

Dimostrazione. Separando parte reale e parte immaginaria, possiamo supporre che u sia a valori reali.

1) Supponiamo $p = 1$. Per ogni $r \in [0,1)$ definiamo il funzionale $\Lambda_r : C(T;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\Lambda_r(g) := \int_T g u_r \; d\sigma.$$

Dall'ipotesi, si deduce immediatamente che $\|\Lambda_r\|_{(C(T;\mathbb{R}))'} \leq M$. Ricordiamo che $C(T;\mathbb{R})$ è separabile (un denso numerabile è dato dalle parti reali dei polinomi trigonometrici a coefficienti razionali). Per il teorema di Banach-Alaoglu sequenziale (vedi 4.13) e per il teorema di rappresentazione di Riesz (vedi 4.14), esistono una successione $r_j \to 1$ ed una misura $\mu \in \mathcal{M}(T;\mathbb{R})$ tale che

$$\lim_{j\to+\infty} \int_T g u_{r_j} \, d\sigma = \int_T g \, d\mu$$

per ogni funzione $g \in C(T;\mathbb{R})$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ poniamo $h_j(z) := u(r_j z)$; notiamo che h_j è armonica in U e continua in $\overline{U}$; come osservato in 3.7, h_j è l'integrale di Poisson della sua restrizione a T. Fissato $z \in U$, poniamo $g(e^{it}) := P(z;e^{it})$; essendo $g \in C(T;\mathbb{R})$ e poichè vale $h_j(e^{it}) = u_{r_j}(e^{it})$, abbiamo che

$$\begin{aligned} u(z) &= \lim_{j\to+\infty} u(r_j z) = \lim_{j\to+\infty} h_j(z) \\ &= \lim_{j\to+\infty} \int_T P(z;e^{it}) h_j(e^{it}) \, d\sigma(e^{it}) \\ &= \int_T P(z;e^{it}) \, d\mu(e^{it}) \\ &= P[d\mu](z). \end{aligned}$$

Questo argomento mostra l'esistenza di una misura μ con le proprietà richieste. Per quanto riguarda l'unicità, vista la linearità di tutti gli operatori, è sufficiente provare che se $P[d\mu] = 0$, allora $\mu = 0$. Sia $f \in C(T;\mathbb{R})$; poniamo $u := P[f]$ e $v := P[d\mu]$. Dal teorema di Fubini e dalla simmetria del nucleo di Poisson, cioè

$$P(re^{i\theta}; e^{it}) = P(re^{it}; e^{i\theta}),$$

per ogni $r \in (0,1)$ si deduce che

$$\int_T u_r \, d\mu = \int_T v_r f \, d\sigma.$$

Essendo $v = 0$, vale che $v_r = 0$ per ogni $r \in (0,1)$. Siccome $u_r \to f$ uniformemente in T per $r \to 1$ (vedi 3.8), concludiamo che

$$\int_T f \, d\mu = 0.$$

Dall'arbitrarietà di $f \in C(T)$ (e dal teorema di rappresentazione di Riesz enunciato in 4.14), si deduce che $\mu = 0$.

2) Se $p \in (1+\infty]$, si ragiona in maniera totalmente analoga, ricordando che l'esponente coniugato q di p è in $[1,+\infty)$ e che $L^p(T;\mathbb{R})$ è canonicamente isomorfo al duale di $L^q(T;\mathbb{R})$ (vedi 4.14). □

Osservazione 4.16. Siccome tutte le funzioni olomorfe sono armoniche, tutti i risultati precedenti si applicano al caso olomorfo.

Per concludere, presentiamo il teorema di Fatou, come conseguenza dei risultati ottenuti.

Teorema 4.17 (Fatou)**.**
Sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa globalmente limitata. Allora esiste $f^* \in L^\infty(T)$ tale che per quasi ogni $e^{i\theta} \in T$ vale che

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta}).$$

Inoltre vale che

$$\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty \, .$$

Dimostrazione. Per il teorema 4.15, esiste una funzione $g \in L^\infty(T)$ tale che $f = P[g]$. Per il teorema 4.11, per quasi ogni $e^{i\theta} \in T$ (rispetto alla misura di Lebesgue) vale che

$$\lim_{r \to 1} P[g](re^{i\theta}) = g(e^{i\theta}).$$

Ponendo $f^* := g$, la tesi segue dal fatto che l'insieme dei punti di Lebesgue di una funzione in L^∞ forma un insieme di misura piena rispetto alla misura di Lebesgue. Per concludere, precisiamo che la disuguaglianza

$$\|f\|_\infty \leq \|f^*\|_\infty$$

segue dal teorema 3.8; la disuguaglianza opposta, invece, è ovvia. □

Riferimenti bibliografici

[1] Rudin, W. *Real and complex analysis, [chapter 11].* McGraw-Hill.