Una classe di problemi di discontinuità libera in dimensione uno

Marco Inversi

Il funzionale di Mumford-Shah è un prototipo di problema di discontinuità libera, presentato dai matematici David Mumford e Jayant Shah nel 1989. Nella sua formulazione originale, era motivato dal problema della segmentazione di immagini; nell'elaborato, invece, esaminiamo una classe di problemi unidimensionali che generalizza il funzionale di Mumford-Shah in dimensione uno e permette di affrontare il problema della segmentazione di segnali. Per la precisione, dato un segnale h, siamo interessati a trovare la sua "migliore" approssimazione: in altri termini, vogliamo mostrare che nella classe dei segnali ne esiste uno che sia quanto più possibile "regolare" e "fedele" al dato iniziale.

Per la formulazione matematica di questo problema, si pensano i segnali come funzioni a valori reali definite in $[0,1]$ e si introduce lo spazio $\mathcal{SBV}$ come sottoinsieme di L^2: possiamo ben definire il funzionale di Mumford-Shah generalizzato. Siano date una funzione convessa $\varphi : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ e una funzione $\psi : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ subadditiva tali che

$$\liminf_{\theta \to +\infty} \frac{\varphi(\theta)}{|\theta|} = \liminf_{\theta \to 0} \frac{\psi(\theta)}{|\theta|} = +\infty.$$

Data u_0 in $\mathcal{SBV}$, definiamo

$$\mathcal{E}_{\varphi;\psi}(u_0) \coloneqq \int_0^1 (h-u)^2 \, dx + \int_0^1 \varphi(\dot{u}_0) \, dx + \sum_{x \in \mathcal{S}(u_0)} \psi(\Delta u_0(x)),$$

dove $\dot{u}_0$ indica la derivata debole di u_0 (opportunamente interpretata), $\mathcal{S}(u_0)$ denota l'insieme delle discontinuità essenziali di u_0 (che stiamo assumendo al più numerabile) e $\Delta u_0(x)$ è l'altezza del salto di u_0 in x. Precisiamo che, se $\varphi(x) \coloneqq x^2$ e $\psi(x) \coloneqq 1$, $\mathcal{E}_{\varphi;\psi}$ è la versione unidimensionale del funzionale di Mumford-Shah originariamente introdotto.

La scrittura di $\mathcal{E}_{\varphi;\psi}$ dà un significato preciso a quanto detto in precedenza: cerchiamo di approssimare h con una funzione che sia vicina in norma L^2 al dato iniziale, che abbia una quantità al più numerabile di punti di discontinuità e che sia derivabile in senso debole altrove.

Si mostra che $\mathcal{E}_{\varphi;\psi}$ è semicontinuo inferiormente e vale un teorema di compattezza dei sottolivelli. Concludiamo che ammette almeno un punto di minimo. Si introduce un'approssimazione discreta di $\mathcal{E}_{\varphi;\psi}$ e si mostra che la famiglia di funzionali approssimanti Γ-converge al funzionale di Mumford-Shah generalizzato rispetto alla metrica di L^2. Un risultato di compattezza dei sottolivelli garantisce l'equicoercività dei problemi approssimanti. Pertanto, possiamo applicare un teorema classico per l'approssimazione dei punti di minimo del funzionale di Mumford-Shah basato sulla determinazione dei punti di minimo dei funzionali approssimanti. Precisiamo che la famiglia di funzionali approssimanti è ambientata in $\mathbb{R}^n$ (con n crescente), mentre il funzionale limite è ambientato in uno spazio di dimensione infinita. Pertanto, la semplificazione introdotta è davvero rilevante.

Nell'ultimo capitolo, introduciamo la nozione di pendenza metrica discendente di un funzionale F definito su uno spazio metrico $\mathbb{X}$ a valori in $[0, +\infty]$. Si tratta di un indicatore della regolarità del funzionale particolarmente utile nello studio dei problemi di minimo. Dato un punto x_0 in $\mathbb{X}$, la pendenza metrica discendente di F in x_0 misura quanto è possibile diminuire il valore del funzionale in termini della distanza da x_0.

Vogliamo calcolare la pendenza del funzionale di Mumford-Shah generalizzato. Consideriamo una funzione u_0 in $\mathcal{SBV}$ tale che la pendenza di $\mathcal{E}_{\varphi;\psi}$ in u_0 sia finita. Si dimostra che u_0 deve avere un numero finito di salti e deve essere almeno di classe C^1 nei tratti di continuità; si scopre anche che le altezze dei salti di u_0 devono soddisfare condizioni abbastanza rigide imposte dalle funzioni φ e ψ, che caratterizzano il funzionale di Mumford-Shah generalizzato; inoltre, è possibile legare il valore delle altezze di tali salti alla regolarità locale della funzione ψ. Si ottiene anche una stima dal basso per la pendenza metrica di $\mathcal{E}_{\varphi;\psi}$.

Infine, consideriamo una funzione u_0 in $\mathcal{SBV}$ che soddisfa tutte le condizioni descritte. In maniera abbastanza sorprendente, si dimostra che la pendenza metrica del funzionale di Mumford-Shah generalizzato in u_0 è finita; in altri termini, mostriamo che le condizioni necessarie descritte in precedenza caratterizzano completamente le funzioni u_0 in $\mathcal{SBV}$ per cui la pendenza metrica di $\mathcal{E}_{\varphi;\psi}$ in u_0 sia finita. In conclusione, si ottiene una limitazione dall'alto per la pendenza che, nella maggior parte dei casi, coincide con quella dal basso.