Non smoothable locally CAT(0) spaces

Kirill Kuzmin

17 ottobre 2014

Spazi geodetici

Spazi geodetici

Una *geodetica* in (X, d) è un embedding isometrico $\gamma \colon I \to X$.
Per ogni t_1, t_2 in I vale

$$d\left(\gamma\left(t_1\right), \gamma\left(t_2\right)\right) = \left|t_1 - t_2\right|$$

Spazi geodetici

Una *geodetica* in (X, d) è un embedding isometrico $\gamma\colon I \to X$.
Per ogni t_1, t_2 in I vale

$$d\left(\gamma\left(t_1\right), \gamma\left(t_2\right)\right) = \left|t_1 - t_2\right|$$

Uno spazio metrico è *geodetico* se per ogni coppia di punti c'è una geodetica che li ha come estremi

Spazi modello

Spazi modello

Sia κ un reale ed $n \geqslant 2$ un intero. Lo *spazio modello* $\mathbb{M}^n_\kappa$ è:

Spazi modello

Sia κ un reale ed $n \geqslant 2$ un intero. Lo *spazio modello* $\mathbb{M}^n_\kappa$ è:

$$\kappa < 0 \qquad \kappa = 0 \qquad \kappa > 0$$

$$\left(\mathbb{H}^n, \frac{d_{\mathbb{H}^n}}{\sqrt{-\kappa}}\right) \qquad \mathbb{E}^n \qquad \left(\mathbb{S}^n, \frac{d_{\mathbb{S}^n}}{\sqrt{\kappa}}\right)$$

Spazi modello

Sia κ un reale ed $n \geqslant 2$ un intero. Lo *spazio modello* $\mathbb{M}^n_\kappa$ è:

$$\kappa < 0 \qquad \kappa = 0 \qquad \kappa > 0$$

$$\left(\mathbb{H}^n, \frac{d_{\mathbb{H}^n}}{\sqrt{-\kappa}}\right) \qquad \mathbb{E}^n \qquad \left(\mathbb{S}^n, \frac{d_{\mathbb{S}^n}}{\sqrt{\kappa}}\right)$$

$\mathbb{M}^n_\kappa$ è l'unica varietà Riemanniana completa semplicemente connessa di curvatura sezionale κ.

Condizione CAT (κ)

Condizione CAT (κ)

Uno spazio geodetico (X, d) soddisfa la *condizione* CAT (κ) se per ogni x, y, z in X, p sulla geodetica xy, q sulla geodetica xz, e per ogni $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ in $\mathbb{M}^2_\kappa$, $\overline{p}$ sulla geodetica $\overline{xy}$, $\overline{q}$ sulla geodetica $\overline{xz}$ tali che

Condizione CAT(κ)

Uno spazio geodetico (X, d) soddisfa la *condizione* CAT(κ) se per ogni x, y, z in X, p sulla geodetica xy, q sulla geodetica xz, e per ogni $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ in $\mathbb{M}^2_\kappa$, $\overline{p}$ sulla geodetica $\overline{xy}$, $\overline{q}$ sulla geodetica $\overline{xz}$ tali che

$$d(x,y) = \overline{d}(\overline{x},\overline{y}),\ d(y,z) = \overline{d}(\overline{y},\overline{z}),\ d(z,x) = \overline{d}(\overline{z},\overline{x}),$$
$$d(x,p) = \overline{d}(\overline{x},\overline{p}),\ d(x,q) = \overline{d}(\overline{x},\overline{q}),$$
$$\text{perimetro} < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} \text{ se } \kappa > 0$$

$$\text{vale } d(p,q) \leqslant \overline{d}(\overline{p},\overline{q})$$

Condizione CAT (κ)

Uno spazio geodetico (X, d) soddisfa la *condizione* CAT (κ) se per ogni x, y, z in X, p sulla geodetica xy, q sulla geodetica xz, e per ogni $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ in $\mathbb{M}^2_\kappa$, $\overline{p}$ sulla geodetica $\overline{xy}$, $\overline{q}$ sulla geodetica $\overline{xz}$ tali che

$$d(x,y) = \overline{d}(\overline{x},\overline{y}),\ d(y,z) = \overline{d}(\overline{y},\overline{z}),\ d(z,x) = \overline{d}(\overline{z},\overline{x}),$$
$$d(x,p) = \overline{d}(\overline{x},\overline{p}),\ d(x,q) = \overline{d}(\overline{x},\overline{q}),$$
$$\text{perimetro} < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} \text{ se } \kappa > 0$$
$$\text{vale } d(p,q) \leqslant \overline{d}(\overline{p},\overline{q})$$

Uno spazio metrico è *localmente* CAT (κ) se ogni punto ha un intorno CAT (κ).

Condizione CAT (κ) per le varietà

Condizione CAT (κ) per le varietà

Per le varietà Riemanniane vale il seguente

Teorema

Sec $\leqslant \kappa$ se e solo se localmente CAT (κ).

Condizione CAT(κ) per le varietà

Per le varietà Riemanniane vale il seguente

Teorema

Sec $\leqslant \kappa$ se e solo se localmente CAT(κ).

Domanda

Può succedere che una varietà liscia ammetta funzioni distanza localmente CAT(κ) compatibili con la topologia ma NON metriche Riemanniane con Sec $\leqslant \kappa$?

Condizione CAT (κ) per le varietà

Per le varietà Riemanniane vale il seguente

Teorema

Sec $\leqslant \kappa$ se e solo se localmente CAT (κ).

Domanda

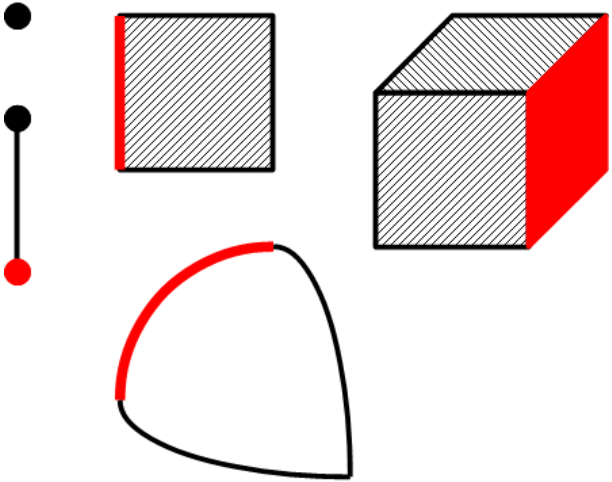
Può succedere che una varietà liscia ammetta funzioni distanza localmente CAT (κ) compatibili con la topologia ma NON metriche Riemanniane con Sec $\leqslant \kappa$?

Risposta

SÌ. Esibiremo un esempio con $\kappa = 0$.

Poliedri e facce

Poliedri e facce



Complesso poliedrale

Complesso poliedrale

Un *complesso poliedrale* è uno spazio topologico K con una famiglia $\{f_\alpha \colon P_\alpha \to K\}$ di embedding topologici chiusa per facce e tale che le immagini delle parti interne coprono K.

Complesso poliedrale

Un *complesso poliedrale* è uno spazio topologico K con una famiglia $\{f_\alpha \colon P_\alpha \to K\}$ di embedding topologici chiusa per facce e tale che le immagini delle parti interne coprono K.

Si possono definire complessi incollando poliedri.

Complesso poliedrale

Un *complesso poliedrale* è uno spazio topologico K con una famiglia $\{f_\alpha \colon P_\alpha \to K\}$ di embedding topologici chiusa per facce e tale che le immagini delle parti interne coprono K.

Si possono definire complessi incollando poliedri.

È definita una pseudodistanza tra p e q in K come inf sulle sequenze $(p = x_0, x_1, \ldots, x_n = q)$ con x_{i-1}, x_i nello stesso poliedro (P_i, d_i) di

$$\sum_{i=1}^{n} d_i\,(x_{i-1}, x_i)$$

Complesso poliedrale

Un *complesso poliedrale* è uno spazio topologico K con una famiglia $\{f_\alpha \colon P_\alpha \to K\}$ di embedding topologici chiusa per facce e tale che le immagini delle parti interne coprono K.

Si possono definire complessi incollando poliedri.

È definita una pseudodistanza tra p e q in K come inf sulle sequenze $(p = x_0, x_1, \ldots, x_n = q)$ con x_{i-1}, x_i nello stesso poliedro (P_i, d_i) di

$$\sum_{i=1}^{n} d_i\,(x_{i-1}, x_i)$$

Per i complessi compatti è una distanza, e gli embedding dei poliedri sono isometrie locali.

Link

Link

Il *link* $\mathrm{lk}_P(v)$ di un vertice v in un poliedro P è l'insieme delle tangenti unitarie alle geodetiche da v ad altri punti di P.

Link

Il *link* $\mathrm{lk}_P(v)$ di un vertice v in un poliedro P è l'insieme delle tangenti unitarie alle geodetiche da v ad altri punti di P.

È un poliedro sferico di dimensione di 1 inferiore rispetto a P.

Link

Il *link* $\mathrm{lk}_P(v)$ di un vertice v in un poliedro P è l'insieme delle tangenti unitarie alle geodetiche da v ad altri punti di P.

È un poliedro sferico di dimensione di 1 inferiore rispetto a P.

Per un vertice v di un complesso K il link $\mathrm{lk}_K(v)$ si ottiene incollando i link rispetto ai poliedri di cui v fa parte.

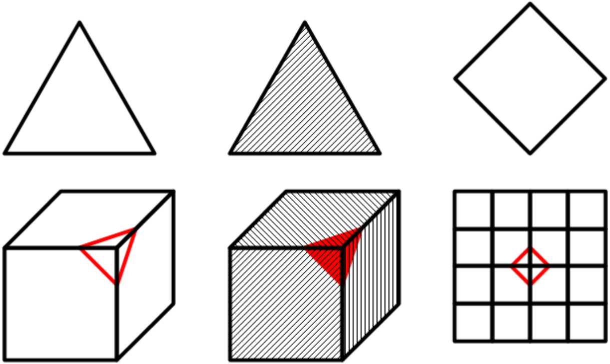
Complesso di Davis

Complesso di Davis

Dato un complesso simpliciale K, il suo *complesso di Davis* P_K è un sottocomplesso cubico di $[0,1]^{v(K)}$ composto da facce corrispondenti ai simplessi di K.

Complesso di Davis

Dato un complesso simpliciale K, il suo *complesso di Davis* P_K è un sottocomplesso cubico di $[0,1]^{v(K)}$ composto da facce corrispondenti ai simplessi di K.



Definizioni sui complessi simpliciali

Definizioni sui complessi simpliciali

Il *sottocomplesso indotto* da un sottoinsieme di vertici è formato dai simplessi che hanno tutti i vertici in quel sottoinsieme

Definizioni sui complessi simpliciali

Il *sottocomplesso indotto* da un sottoinsieme di vertici è formato dai simplessi che hanno tutti i vertici in quel sottoinsieme

Un complesso è detto *bandiera* (flag) se ogni sottoinsieme di vertici che induce l'1-scheletro di un simplesso induce quel simplesso.

Definizioni sui complessi simpliciali

Il *sottocomplesso indotto* da un sottoinsieme di vertici è formato dai simplessi che hanno tutti i vertici in quel sottoinsieme

Un complesso è detto *bandiera* (flag) se ogni sottoinsieme di vertici che induce l'1-scheletro di un simplesso induce quel simplesso.

Un sottocomplesso di un complesso bandiera è detto *pieno* (full) se è indotto dai propri vertici.

Proprietà del complesso di Davis

Proprietà del complesso di Davis

C'è un naturale isomorfismo simpliciale tra K ed il link ad un qualunque vertice di P_K

Proprietà del complesso di Davis

C'è un naturale isomorfismo simpliciale tra K ed il link ad un qualunque vertice di P_K

La funzione distanza è localmente $\mathrm{CAT}(0)$ se e solo se K è un complesso bandiera.

Proprietà del complesso di Davis

C'è un naturale isomorfismo simpliciale tra K ed il link ad un qualunque vertice di P_K

La funzione distanza è localmente CAT (0) se e solo se K è un complesso bandiera.

Se K è bandiera e L è un sottocomplesso pieno, c'è un embedding localmente isometrico, e quindi π_1-iniettivo, di P_L in P_K.

Proprietà del complesso di Davis

C'è un naturale isomorfismo simpliciale tra K ed il link ad un qualunque vertice di P_K

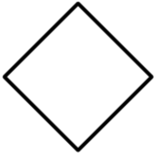
La funzione distanza è localmente CAT (0) se e solo se K è un complesso bandiera.

Se K è bandiera e L è un sottocomplesso pieno, c'è un embedding localmente isometrico, e quindi π_1-iniettivo, di P_L in P_K.

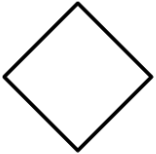
Se K è una triangolazione bandiera e PL di $\mathbb{S}^{n-1}$ allora P_K è una n-varietà liscia il cui rivestimento universale è PL-equivalente ad $\mathbb{R}^n$ standard (Teorema di Stone).

Triangolazione di $\mathbb{S}^3$

Triangolazione di $\mathbb{S}^3$



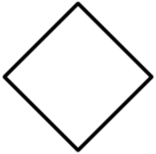
Triangolazione di $\mathbb{S}^3$



Teorema

Data una classe di isotopia di nodi in $\mathbb{S}^3$, esiste una triangolazione bandiera di $\mathbb{S}^3$ con un unico quadrato che disegna un nodo in quella classe di isotopia.

Triangolazione di $\mathbb{S}^3$



Teorema

Data una classe di isotopia di nodi in $\mathbb{S}^3$, esiste una triangolazione bandiera di $\mathbb{S}^3$ con un unico quadrato che disegna un nodo in quella classe di isotopia.

Idea di costruzione: triangolare un intorno del nodo, triangolare il resto, connettere le triangolazioni dei bordi, suddividere opportunamente in modo da garantire la proprietà bandiera ed eliminare gli altri quadrati.

Bordo all'infinito

Bordo all'infinito

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e CAT (0).

Bordo all'infinito

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e $\mathrm{CAT}(0)$.

Due raggi geodetici α, $\beta\colon [0, +\infty) \to X$ si dicono *asintotici* se

$$d(\alpha(t), \beta(t))$$

è limitata.

Bordo all'infinito

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e CAT (0).

Due raggi geodetici α, $\beta\colon [0, +\infty) \to X$ si dicono *asintotici* se

$$d(\alpha(t), \beta(t))$$

è limitata.

Il *bordo all'infinito* ∂X è l'insieme dei raggi quozientati per la relazione di asintoticità.

Bordo all'infinito

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e CAT (0).

Due raggi geodetici α, $\beta \colon [0, +\infty) \to X$ si dicono *asintotici* se

$$d(\alpha(t), \beta(t))$$

è limitata.

Il *bordo all'infinito* ∂X è l'insieme dei raggi quozientati per la relazione di asintoticità.

Indichiamo con $\overline{X}$ lo spazio topologico $X \cup \partial X$.

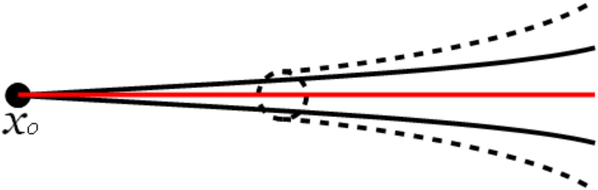
Topologia su $\overline{X}$

Topologia su $\overline{X}$

Per ogni punto x_0 di X e per ogni elemento del bordo, esiste un raggio uscente da x_0 che rappresenta quell'elemento.

Topologia su $\overline{X}$

Per ogni punto x_0 di X e per ogni elemento del bordo, esiste un raggio uscente da x_0 che rappresenta quell'elemento.



Esempi di topologia su $\overline{X}$

Esempi di topologia su $\overline{X}$

Per $X = \mathbb{H}^n$ pensato col modello del disco, $\overline{X}$ è omeomorfo al disco chiuso.

Esempi di topologia su $\overline{X}$

Per $X = \mathbb{H}^n$ pensato col modello del disco, $\overline{X}$ è omeomorfo al disco chiuso.

Per X dato da una struttura Riemanniana di curvatura non positiva su $\mathbb{R}^n$ standard, il bordo ∂X è omeomorfo alla sfera unitaria nel tangente di un punto.

Grafo di Cayley

Grafo di Cayley

Dato un gruppo G finitamente generato da S, il *grafo di Cayley* $\mathcal{C}(G,S)$ ha per vertici gli elementi di G e un arco tra x e y se $x^{-1}y$ appartiene a $S^{\pm}$.

Grafo di Cayley

Dato un gruppo G finitamente generato da S, il *grafo di Cayley* $\mathcal{C}(G, S)$ ha per vertici gli elementi di G e un arco tra x e y se $x^{-1}y$ appartiene a $S^{\pm}$.

Imponendo la lunghezza di tutti gli archi uguale a 1 questo grafo diventa uno spazio metrico.

Grafo di Cayley

Dato un gruppo G finitamente generato da S, il *grafo di Cayley* $\mathcal{C}(G, S)$ ha per vertici gli elementi di G e un arco tra x e y se $x^{-1}y$ appartiene a $S^{\pm}$.

Imponendo la lunghezza di tutti gli archi uguale a 1 questo grafo diventa uno spazio metrico.

La restrizione della funzione distanza ai vertici è detta *metrica delle parole*, poiché la distanza tra x e y è la lunghezza della più corta stringa in $S^{\pm}$ che rappresenta $x^{-1}y$.

Quasi isometrie

Quasi isometrie

Un *embedding* (K, C)*-quasi-isometrico* $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ è una funzione tale che per ogni x_0 e x_1 in X vale

$$\frac{1}{K} d_X(x_0, x_1) - C \leqslant d_Y(f(x_0), f(x_1)) \leqslant \frac{1}{K} d_X(x_0, x_1) + C$$

Quasi isometrie

Un *embedding* (K, C)*-quasi-isometrico* $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ è una funzione tale che per ogni x_0 e x_1 in X vale

$$\frac{1}{K} d_X(x_0, x_1) - C \leqslant d_Y(f(x_0), f(x_1)) \leqslant \frac{1}{K} d_X(x_0, x_1) + C$$

Se poi Y è contenuto in un D-intorno di $f(X)$, allora f si dice *quasi isometria*.

Esempi di quasi isometrie

Esempi di quasi isometrie

Grafi di Cayley dello stesso gruppo rispetto a sistemi di generatori diversi sono quasi isometrici.

Esempi di quasi isometrie

Grafi di Cayley dello stesso gruppo rispetto a sistemi di generatori diversi sono quasi isometrici.

Se un gruppo finitamente generato G agisce geometricamente su uno spazio geodetico proprio, fissato un punto base x_0 la funzione $g \mapsto g \cdot x_0$ tra G con una metrica delle parole e X è una quasi isometria.

Esempi di quasi isometrie

Grafi di Cayley dello stesso gruppo rispetto a sistemi di generatori diversi sono quasi isometrici.

Se un gruppo finitamente generato G agisce geometricamente su uno spazio geodetico proprio, fissato un punto base x_0 la funzione $g \mapsto g \cdot x_0$ tra G con una metrica delle parole e X è una quasi isometria.

Un embedding quasi isometrico di un intervallo è detto *quasi geodetica*. Ad esempio composizioni di geodetiche con quasi isometrie sono quasi geodetiche.

Universi non standard

Universi non standard

Dato un insieme X la sua *superstruttura* è

$$V(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(X).$$

Universi non standard

Dato un insieme X la sua *superstruttura* è

$$V(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(X).$$

È possibile definire un *universo non standard*

$$V({}^*X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n({}^*X),$$

dove $V_0({}^*X) = {}^*X$ è un insieme in cui X si immerge, $V_1({}^*X)$ è fatto di particolari sottoinsiemi di $V_0({}^*X)$ detti *insiemi interni*, $V_2({}^*X)$ è fatto di particolari sottoinsiemi di $V_1({}^*X)$, ecc.

Transfer Principle

Transfer Principle

Teorema

Gli enunciati del primo ordine con variabili e costanti nella superstruttura $V(X)$ si conservano a patto di mettere un asterisco prima delle costanti.

Transfer Principle

Teorema

Gli enunciati del primo ordine con variabili e costanti nella superstruttura $V(X)$ si conservano a patto di mettere un asterisco prima delle costanti.

Una funzione f da X a Y dà una funzione ${}^*f$ da ${}^*X$ a ${}^*Y$; una relazione $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ dà una relazione ${}^*\mathcal{R} \subseteq {}^*X \times {}^*X$.

Esempi di universi non standard

Esempi di universi non standard

Un *campo iperreale* ${}^*\mathbb{R}$ è un sopracampo ordinato dei reali, che possiede elementi infiniti ed infinitesimi.

Esempi di universi non standard

Un *campo iperreale* ${}^*\mathbb{R}$ è un sopracampo ordinato dei reali, che possiede elementi infiniti ed infinitesimi.

Se (X, d) è uno spazio metrico, $({}^*X,\ {}^*d)$ è uno spazio ipermetrico, ovvero con funzione iperdistanza ${}^*d$ a valori ipperreali.

Coni asintotici

Coni asintotici

Dato uno spazio metrico completo (X, d) e scelto un universo non standard $V({}^*X)$, un punto x di ${}^*X$ e un iperreale positivo infinito R, il *cono asintotico* di centro x e raggio R è $\mathcal{C}({}^*X, x, R)$ dato da $C/\sim$, ove C è l'insieme dei punti y di ${}^*X$ tali che

$$\frac{{}^*d(x, y)}{R}$$

è finito, e $\sim$ identifica y_1 e y_2 se $\frac{{}^*d(y_1, y_2)}{R}$ è infinitesimo. La distanza tra y e z è data dalla parte standard di $\frac{{}^*d(y, z)}{R}$.

Sui coni asintotici

Sui coni asintotici

Una quasi isometria $f\colon X \to Y$ dà una quasi isometria ${}^*f\colon {}^*X \to {}^*Y$, che al quoziente diventa un omeomorfismo bi-Lipschitz tra $\mathcal{C}\left({}^*X, x, R\right)$ e $\mathcal{C}\left({}^*Y, {}^*f\left(x\right), R\right)$.

Sui coni asintotici

Una quasi isometria $f\colon X \to Y$ dà una quasi isometria ${}^*f\colon {}^*X \to {}^*Y$, che al quoziente diventa un omeomorfismo bi-Lipschitz tra $\mathcal{C}\left({}^*X, x, R\right)$ e $\mathcal{C}\left({}^*Y, {}^*f\left(x\right), R\right)$.

Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottospazi di X, indicheremo con $\mathcal{C}\left(\mathcal{F}\right) \subseteq \mathcal{C}\left(X\right)$ la famiglia delle proiezioni di sottospazi in ${}^*\mathcal{F}$ al cono.

Sottospazi piatti isolati

Sottospazi piatti isolati

Uno spazio geodetico completo si dice *tree graded* se è un'unione di pezzi convessi tali che l'intersezione di due distinti ha al più un punto ed ogni curva semplice chiusa sta in un solo pezzo.

Sottospazi piatti isolati

Uno spazio geodetico completo si dice *tree graded* se è un'unione di pezzi convessi tali che l'intersezione di due distinti ha al più un punto ed ogni curva semplice chiusa sta in un solo pezzo.

Uno spazio metrico completo X si dice *iperbolico relativamente ad una famiglia di sottospazi* $\mathcal{F}$ se sottospazi distinti in $\mathcal{F}$ hanno distanza di Hausdorff infinita e ogni cono $\mathcal{C}(X)$ è tree graded rispetto a $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

Sottospazi piatti isolati

Uno spazio geodetico completo si dice *tree graded* se è un'unione di pezzi convessi tali che l'intersezione di due distinti ha al più un punto ed ogni curva semplice chiusa sta in un solo pezzo.

Uno spazio metrico completo X si dice *iperbolico relativamente ad una famiglia di sottospazi* $\mathcal{F}$ se sottospazi distinti in $\mathcal{F}$ hanno distanza di Hausdorff infinita e ogni cono $\mathcal{C}(X)$ è tree graded rispetto a $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

Uno spazio X che è $\mathrm{CAT}(0)$, proprio e dotato di un'azione geometrica di un gruppo G si dice avere la *proprietà dei sottospazi piatti isolati* (isolated flats) se esiste una famiglia G-invariante $\mathcal{F}$ di sottospazi piatti a due a due non paralleli rispetto a cui X è relativamente iperbolico.

Quasi isometrie quasi equivarianti

Quasi isometrie quasi equivarianti

Se X e Y sono spazi metrici con un azione geometrica di un gruppo G su entrambi, una quasi isometria $f : X \to Y$ si dice *quasi isometria G-quasi-equivariante* se la distanza tra $f(g \cdot x)$ e $g \cdot f(x)$ è uniformemente limitata.

Quasi isometrie quasi equivarianti

Se X e Y sono spazi metrici con un azione geometrica di un gruppo G su entrambi, una quasi isometria $f : X \to Y$ si dice *quasi isometria G-quasi-equivariante* se la distanza tra $f(g \cdot x)$ e $g \cdot f(x)$ è uniformemente limitata.

Teorema

Se X è uno spazio con sottospazi piatti isolati rispetto all'azione di un gruppo G, Y è $\mathrm{CAT}(0)$ e $f : X \to Y$ è una quasi isometria G-quasi-equivariante, allora anche Y ha sottospazi piatti isolati. Inoltre, f porta geodetiche di X uniformemente vicino a geodetiche di Y

Quasi isometrie quasi equivarianti

Se X e Y sono spazi metrici con un azione geometrica di un gruppo G su entrambi, una quasi isometria $f: X \to Y$ si dice *quasi isometria G-quasi-equivariante* se la distanza tra $f(g \cdot x)$ e $g \cdot f(x)$ è uniformemente limitata.

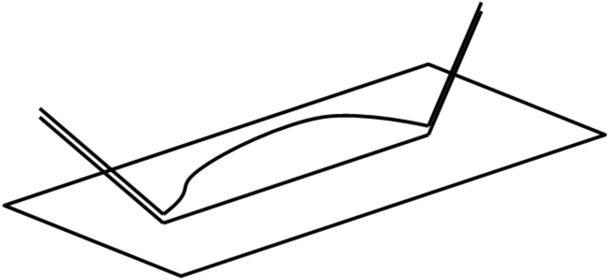
Teorema

Se X è uno spazio con sottospazi piatti isolati rispetto all'azione di un gruppo G, Y è $\mathrm{CAT}(0)$ e $f: X \to Y$ è una quasi isometria G-quasi-equivariante, allora anche Y ha sottospazi piatti isolati. Inoltre, f porta geodetiche di X uniformemente vicino a geodetiche di Y

Ne segue che una tale f induce un omeomorfismo tra i bordi all'infinito.

Dimostrazione

Dimostrazione



Dimostrazione finale

Dimostrazione finale

Prendiamo la triangolazione K di $\mathbb{S}^3$ col nodo che abbiamo costruito e prendiamone il complesso di Davis P_K. Affermo che P_K va bene.

Dimostrazione finale

Prendiamo la triangolazione K di $\mathbb{S}^3$ col nodo che abbiamo costruito e prendiamone il complesso di Davis P_K. Affermo che P_K va bene.

La struttura di K ci permette di descrivere l'azione geometrica del gruppo di Coxeter Γ_K sul rivestimento universale $\widetilde{P}$. C'è una successione esatta corta

$$1 \to \pi_1 P_K \to \Gamma_K \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{v(K)} \to 1$$

Dimostrazione finale

Prendiamo la triangolazione K di $\mathbb{S}^3$ col nodo che abbiamo costruito e prendiamone il complesso di Davis P_K. Affermo che P_K va bene.

La struttura di K ci permette di descrivere l'azione geometrica del gruppo di Coxeter Γ_K sul rivestimento universale $\widetilde{P}$. C'è una successione esatta corta

$$1 \to \pi_1 P_K \to \Gamma_K \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{v(K)} \to 1$$

Il quadrato ci dà in $\widetilde{P}$ un sottospazio piatto. Dal fatto che è l'unico quadrato si dimostra che $\widetilde{P}$ ha sottospazi piatti isolati.

Dimostrazione finale, continua

Dimostrazione finale, continua

Se per assurdo una varietà Riemanniana M con $\operatorname{Sec} M \leqslant 0$ fosse omeomorfa a P_K, l'azione del gruppo fondamentale idurrebbe f quasi isometria $\pi_1 P_K$-quasi-equivariante tra i rivestimenti universali.

Dimostrazione finale, continua

Se per assurdo una varietà Riemanniana M con $\operatorname{Sec} M \leqslant 0$ fosse omeomorfa a P_K, l'azione del gruppo fondamentale idurrebbe f quasi isometria $\pi_1 P_K$-quasi-equivariante tra i rivestimenti universali.

Allora il rivestimento universali $\widetilde{M}$ avrebbe sottospazi piatti isolati e ci sarebbe un omeomorfismo

$$\partial f : \partial P_K \to \partial M$$

tra i bordi all'infinito, che porterebbe anche i bordi dei sottospazi piatti isolati in $\widetilde{P_K}$ nei bordi di quelli in $\widetilde{M}$.

Dimostrazione finale, continua

Se per assurdo una varietà Riemanniana M con $\operatorname{Sec} M \leqslant 0$ fosse omeomorfa a P_K, l'azione del gruppo fondamentale idurrebbe f quasi isometria $\pi_1 P_K$-quasi-equivariante tra i rivestimenti universali.

Allora il rivestimento universali $\widetilde{M}$ avrebbe sottospazi piatti isolati e ci sarebbe un omeomorfismo

$$\partial f \colon \partial P_K \to \partial M$$

tra i bordi all'infinito, che porterebbe anche i bordi dei sottospazi piatti isolati in $\widetilde{P_K}$ nei bordi di quelli in $\widetilde{M}$.

I bordi all'infinito sono entrambi $\mathbb{S}^3$. Nel caso liscio un sottospazio bidimensionale piatto disegna un nodo banale in questa sfera. Nel complesso poliedrale no poiché il sottospazio piatto non è localmente piatto nei vertici per costruzione.

Grazie per l'attenzione!