Un concetto generalizzato di curvatura e il Teorema del Toro Piatto

Kirill Kuzmin

15 ottobre 2012

Curvatura

Curvatura

La curvatura può essere pensata come una proprietà degli spazi metrici che li distingue dallo spazio euclideo.

Curvatura

La curvatura può essere pensata come una proprietà degli spazi metrici che li distingue dallo spazio euclideo.

Esamineremo due differenti approcci alla curvatura:

Curvatura

La curvatura può essere pensata come una proprietà degli spazi metrici che li distingue dallo spazio euclideo.

Esamineremo due differenti approcci alla curvatura:

- Approccio differenziale: Geometria Riemanniana;

Curvatura

La curvatura può essere pensata come una proprietà degli spazi metrici che li distingue dallo spazio euclideo.

Esamineremo due differenti approcci alla curvatura:

- Approccio differenziale: Geometria Riemanniana;
- Approccio metrico: Aleksandrov, Cartan, Topogonov, Gromov ed altri.

Curvatura

La curvatura può essere pensata come una proprietà degli spazi metrici che li distingue dallo spazio euclideo.

Esamineremo due differenti approcci alla curvatura:

- Approccio differenziale: Geometria Riemanniana;
- Approccio metrico: Aleksandrov, Cartan, Topogonov, Gromov ed altri.

Quest'ultimo è sintetizzato nella condizione CAT(κ).

Spazi metrici

Spazi metrici

Sia X un insieme.

Spazi metrici

Sia X un insieme.

- Distanza su X: funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ tale che
  - $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
  - $d(x, y) = d(y, x)$;
  - $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Spazi metrici

Sia X un insieme.

- Distanza su X: funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ tale che
  - $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
  - $d(x, y) = d(y, x)$;
  - $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.
- Immersione isometrica: funzione tra spazi metrici che preserva le distanze.

Spazi metrici

Sia X un insieme.

- Distanza su X: funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ tale che
  - $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
  - $d(x, y) = d(y, x)$;
  - $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.
- Immersione isometrica: funzione tra spazi metrici che preserva le distanze.
- Isometria: biiezione tra spazi metrici che preserva le distanze.

Spazi metrici

Spazi metrici

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Spazi metrici

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Il loro prodotto è l'insieme $X \times Y$ con la distanza

$$d\left((x, y), (x', y')\right) = \sqrt{d_X\left(x, x'\right)^2 + d_Y\left(y, y'\right)^2}$$

Spazi metrici

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Il loro prodotto è l'insieme $X \times Y$ con la distanza

$$d\left((x, y), (x', y')\right) = \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}$$

Una curva in uno spazio metrico (X, d) è una funzione continua da un intervallo I di $\mathbb{R}$ in X.

Lunghezza di una curva

Lunghezza di una curva

Sia (X, d) uno spazio metrico e $\alpha : [a, b] \to X$ una curva.

Lunghezza di una curva

Sia (X, d) uno spazio metrico e $\alpha : [a, b] \to X$ una curva.
Sia $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$. La lunghezza di α associata a $\mathcal{P}$ è

$$\ell\left(\alpha, \mathcal{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\alpha\left(t_{i-1}\right), \alpha\left(t_i\right)\right).$$

Lunghezza di una curva

Sia (X, d) uno spazio metrico e $\alpha : [a, b] \to X$ una curva.
Sia $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$. La lunghezza di α associata a $\mathcal{P}$ è

$$\ell(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)).$$

La lunghezza metrica di α è l'estremo superiore di $\ell(\alpha, \mathcal{P})$ al variare di $\mathcal{P}$ tra le possibili partizioni di $[a, b]$.

Geodetiche

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Geodetica metrica: curva $\gamma : I \to X$ tale che per ogni $t, t' \in I$ si abbia $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$.

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Geodetica metrica: curva $\gamma : I \to X$ tale che per ogni $t, t' \in I$ si abbia $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$.

Una geodetica definita su tutto $\mathbb{R}$ si dice *linea*.

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Geodetica metrica: curva $\gamma : I \to X$ tale che per ogni $t, t' \in I$ si abbia $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$.

Una geodetica definita su tutto $\mathbb{R}$ si dice *linea*.

- Geodetica parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco: curva $\gamma : I \to X$ per cui esiste $\lambda \geqslant 0$ tale che per ogni t, t' in I si abbia $d(\gamma(t), \gamma(t')) = \lambda |t - t'|$.

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Geodetica metrica: curva $\gamma : I \to X$ tale che per ogni $t, t' \in I$ si abbia $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$.

Una geodetica definita su tutto $\mathbb{R}$ si dice *linea*.

- Geodetica parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco: curva $\gamma : I \to X$ per cui esiste $\lambda \geqslant 0$ tale che per ogni t, t' in I si abbia $d(\gamma(t), \gamma(t')) = \lambda |t - t'|$.
- Geodetica locale: curva $\gamma : I \to X$ tale che per ogni t in I esista un intorno di t in I ristretta al quale γ è una geodetica.

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Geodetica tra due punti p, q in X: geodetica $\gamma : [a, b] \to X$ tale che $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Geodetica tra due punti p, q in X: geodetica $\gamma : [a, b] \to X$ tale che $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

Una geodetica tra p e q si indica con $[p, q]$.

Geodetiche

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Geodetica tra due punti p, q in X: geodetica $\gamma : [a, b] \to X$ tale che $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

Una geodetica tra p e q si indica con $[p, q]$.
Non è necessariamente unica.

Spazi geodetici

Spazi geodetici

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Spazi geodetici

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- X si dice *geodetico* se per ogni coppia di punti esiste una geodetica che li congiunge.

Spazi geodetici

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- X si dice *geodetico* se per ogni coppia di punti esiste una geodetica che li congiunge.
- X si dice *unicamente geodetico* se tale geodetica è unica.

Convessità

Convessità

Sia (X, d) uno spazio geodetico.

Convessità

Sia (X, d) uno spazio geodetico.

- Un sottoinsieme di X si dice convesso se una qualunque geodetica che unisce una coppia qualunque dei suoi punti è interamente contenuta nell'insieme.

Convessità

Sia (X, d) uno spazio geodetico.

- Un sottoinsieme di X si dice convesso se una qualunque geodetica che unisce una coppia qualunque dei suoi punti è interamente contenuta nell'insieme.
- Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni geodetica $\gamma : I \to X$ la funzione $f \circ \gamma$ è convessa su I.

Convessità

Sia (X, d) uno spazio geodetico.

- Un sottoinsieme di X si dice convesso se una qualunque geodetica che unisce una coppia qualunque dei suoi punti è interamente contenuta nell'insieme.
- Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni geodetica $\gamma : I \to X$ la funzione $f \circ \gamma$ è convessa su I.

I sottolivelli di una funzione convessa sono convessi.

Triangoli di confronto

Triangoli di confronto

Sia (X, d) uno spazio geodetico.

Triangoli di confronto

Sia (X, d) uno spazio geodetico.

- Dati tre punti p, q, r in X il triangolo $\triangle(p, q, r)$ che li ha per vertici è l'unione dei lati $[p, q]$, $[q, r]$, $[r, p]$

Triangoli di confronto

Sia (X, d) uno spazio geodetico.

- Dati tre punti p, q, r in X il triangolo $\triangle(p, q, r)$ che li ha per vertici è l'unione dei lati $[p, q]$, $[q, r]$, $[r, p]$
- Il triangolo di confronto per $\triangle(p, q, r)$ è un triangolo $\overline{\triangle}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ nel piano euclideo $\left(\mathbb{E}^2, \overline{d}\right)$ tale che

$$d(p, q) = \overline{d}(\overline{p}, \overline{q}), d(q, r) = \overline{d}(\overline{q}, \overline{r}), d(r, p) = \overline{d}(\overline{r}, \overline{p}).$$

Triangoli di confronto

Sia (X, d) uno spazio geodetico.

- Dati tre punti p, q, r in X il triangolo $\triangle(p, q, r)$ che li ha per vertici è l'unione dei lati $[p, q]$, $[q, r]$, $[r, p]$
- Il triangolo di confronto per $\triangle(p, q, r)$ è un triangolo $\overline{\triangle}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ nel piano euclideo $\left(\mathbb{E}^2, \overline{d}\right)$ tale che

$$d(p, q) = \overline{d}(\overline{p}, \overline{q}), d(q, r) = \overline{d}(\overline{q}, \overline{r}), d(r, p) = \overline{d}(\overline{r}, \overline{p}).$$

Il triangolo di confronto è unico a meno di isometrie del piano euclideo.

Angoli

Angoli

Sia (X, d) uno spazio geodetico, e siano p, q, r in X, con $p \neq q, r$.

Angoli

Sia (X, d) uno spazio geodetico, e siano p, q, r in X, con $p \neq q, r$.

- L'angolo di confronto $\angle_p(q, r)$ tra q ed r con vertice in p è l'angolo euclideo tra i lati uscenti da $\overline{p}$ di $\overline{\triangle}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$.

Angoli

Sia (X, d) uno spazio geodetico, e siano p, q, r in X, con $p \neq q, r$.

- L'angolo di confronto $\angle_p(q, r)$ tra q ed r con vertice in p è l'angolo euclideo tra i lati uscenti da $\overline{p}$ di $\overline{\triangle}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$.

Siano γ_1 e γ_2 due geodetiche in X definite su $[0, a]$ tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$.

Angoli

Sia (X, d) uno spazio geodetico, e siano p, q, r in X, con $p \neq q, r$.

- L'angolo di confronto $\angle_p (q, r)$ tra q ed r con vertice in p è l'angolo euclideo tra i lati uscenti da $\overline{p}$ di $\overline{\triangle} (\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$.

Siano γ_1 e γ_2 due geodetiche in X definite su $[0, a]$ tali che $\gamma_1 (0) = \gamma_2 (0) = p$.

- L'angolo di Aleksandrov tra γ_1 e γ_2 è

$$\limsup_{(t,t')\to(0,0)} \angle_p \left(\gamma_1 (t), \gamma_2 (t')\right).$$

Diseguaglianza CAT(0)

Diseguaglianza CAT(0)

Sia (X, d) uno spazio geodetico, e sia x in X su una geodetica $[p, q]$.

Diseguaglianza CAT(0)

Sia (X, d) uno spazio geodetico, e sia x in X su una geodetica $[p, q]$.

- Il punto $\overline{x}$ su $[\overline{p}, \overline{q}]$ in $\left(\mathbb{E}^2, \overline{d}\right)$ è di confronto per x se $d\left(p, x\right) = \overline{d}\left(\overline{p}, \overline{x}\right)$.

Diseguaglianza CAT(0)

Sia (X, d) uno spazio geodetico, e sia x in X su una geodetica $[p, q]$.

- Il punto $\overline{x}$ su $[\overline{p}, \overline{q}]$ in $\left(\mathbb{E}^2, \overline{d}\right)$ è di confronto per x se $d\left(p, x\right) = \overline{d}\left(\overline{p}, \overline{x}\right)$.

Lo spazio (X, d) è CAT(0) se, per ogni triangolo $\triangle\left(p, q, r\right)$ in X e per ogni coppia di punti x, y in tale triangolo, per i relativi punti di confronto su $\overline{\triangle}\left(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}\right)$ vale

$$d\left(x, y\right) \leqslant \overline{d}\left(\overline{x}, \overline{y}\right).$$

Diseguaglianza CAT(0)

Sia (X, d) uno spazio geodetico, e sia x in X su una geodetica $[p, q]$.

- Il punto $\overline{x}$ su $[\overline{p}, \overline{q}]$ in $\left(\mathbb{E}^2, \overline{d}\right)$ è di confronto per x se $d\,(p, x) = \overline{d}\,(\overline{p}, \overline{x})$.

Lo spazio (X, d) è CAT(0) se, per ogni triangolo $\triangle\,(p, q, r)$ in X e per ogni coppia di punti x, y in tale triangolo, per i relativi punti di confronto su $\overline{\triangle}\,(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ vale

$$d\,(x, y) \leqslant \overline{d}\,(\overline{x}, \overline{y})\,.$$

Lo spazio (X, d) è CAT(0) localmente, o di curvatura di Aleksandrov non positiva, se ogni suo punto ha un intorno CAT(0).

Definizioni equivalenti di spazio CAT(0)

Definizioni equivalenti di spazio CAT(0)

Per uno spazio geodetico (X, d) sono condizioni equivalenti:

Definizioni equivalenti di spazio CAT(0)

Per uno spazio geodetico (X, d) sono condizioni equivalenti:

- Vale la condizione CAT(0);

Definizioni equivalenti di spazio CAT(0)

Per uno spazio geodetico (X, d) sono condizioni equivalenti:

- Vale la condizione CAT(0);
- Fissato un vertice p di un triangolo $\triangle(p, q, r)$, l'angolo tra $[p, q]$ e $[p, r]$ è minore o uguale a $\angle_p(q, r)$.

Varietà Riemanniane

Varietà Riemanniane

Una varietà riemanniana è una varietà liscia M con una 2-forma g, il tensore metrico, che ristretto a ciascuno spazio tangente T_pM, è un prodotto scalare $g|_p$ definito positivo.

Varietà Riemanniane

Una varietà riemanniana è una varietà liscia M con una 2-forma g, il tensore metrico, che ristretto a ciascuno spazio tangente T_pM, è un prodotto scalare $g|_p$ definito positivo.

Il prodotto scalare $g|_p$ induce su T_pM una norma $\|\cdot\|_p$

Varietà Riemanniane

Una varietà riemanniana è una varietà liscia M con una 2-forma g, il tensore metrico, che ristretto a ciascuno spazio tangente T_pM, è un prodotto scalare $g|_p$ definito positivo.

Il prodotto scalare $g|_p$ induce su T_pM una norma $\|\cdot\|_p$

Il modo canonico, compatibile con la metrica, per derivare un tensore T rispetto ad un campo X è la connessione di Levi-Civita

$$\nabla_X T.$$

Varietà Riemanniane

Una varietà riemanniana è una varietà liscia M con una 2-forma g, il tensore metrico, che ristretto a ciascuno spazio tangente T_pM, è un prodotto scalare $g|_p$ definito positivo.

Il prodotto scalare $g|_p$ induce su T_pM una norma $\|\cdot\|_p$

Il modo canonico, compatibile con la metrica, per derivare un tensore T rispetto ad un campo X è la connessione di Levi-Civita

$$\nabla_X T.$$

Fissato T, l'applicazione $X \mapsto \nabla_X T$ è un tensore.

Curvatura sezionale

Curvatura sezionale

Derivare due volte non è in generale un'operazione commutativa nei campi rispetto cui si deriva.

Curvatura sezionale

Derivare due volte non è in generale un'operazione commutativa nei campi rispetto cui si deriva.

Dati tre campi X, Y, Z, il seguente

$$\nabla_Y (\nabla X)(Z) - \nabla_X (\nabla Y)(Z) =$$

$$= \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_X (\nabla_Y Z) + \nabla_{[X,Y]} Z = R(X, Y) Z$$

è un tensore detto operatore di Riemann.

Curvatura sezionale

Derivare due volte non è in generale un'operazione commutativa nei campi rispetto cui si deriva.

Dati tre campi X, Y, Z, il seguente

$$\nabla_Y(\nabla X)(Z) - \nabla_X(\nabla Y)(Z) =$$

$$= \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_{[X,Y]} Z = R(X,Y)Z$$

è un tensore detto operatore di Riemann.

Curvatura sezionale: fissati p in M, un 2-piano π in T_pM, e una base $\{u, v\}$ di π, la curvatura sezionale di π è

$$Sec(p,\pi) = \frac{g|_p(R(u,v)u,v)}{\|u\|_p{}^2\|v\|_p{}^2 - g|_p(u,v)^2}.$$

Curvatura sezionale

Derivare due volte non è in generale un'operazione commutativa nei campi rispetto cui si deriva.

Dati tre campi X, Y, Z, il seguente

$$\nabla_Y (\nabla X)(Z) - \nabla_X (\nabla Y)(Z) =$$

$$= \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_X (\nabla_Y Z) + \nabla_{[X,Y]} Z = R(X,Y)Z$$

è un tensore detto operatore di Riemann.

Curvatura sezionale: fissati p in M, un 2-piano π in T_pM, e una base $\{u, v\}$ di π, la curvatura sezionale di π è

$$Sec(p,\pi) = \frac{g|_p (R(u,v)u, v)}{\|u\|_p{}^2 \|v\|_p{}^2 - g|_p (u,v)^2}.$$

La curvatura sezionale dipende solo da p e da π.

Geodetiche

Geodetiche

Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia $\gamma : I \to M$ una curva liscia.

Geodetiche

Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia $\gamma : I \to M$ una curva liscia.

- Y definito su I a valori nel fibrato tangente TM è un campo lungo γ se $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Geodetiche

Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia $\gamma : I \to M$ una curva liscia.

- Y definito su I a valori nel fibrato tangente TM è un campo lungo γ se $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$.
- Il vettore $\dot{\gamma} = \dfrac{d\gamma}{dt}$ tangente a γ è un campo lungo γ.

Geodetiche

Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia $\gamma : I \to M$ una curva liscia.

- Y definito su I a valori nel fibrato tangente TM è un campo lungo γ se $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$.
- Il vettore $\dot{\gamma} = \dfrac{d\gamma}{dt}$ tangente a γ è un campo lungo γ.
- La connessione di Levi-Civita si estende in modo canonico ad una derivata $\dfrac{D}{dt}$ dei campi lungo γ.

Geodetiche

Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia $\gamma : I \to M$ una curva liscia.

- Y definito su I a valori nel fibrato tangente TM è un campo lungo γ se $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$.
- Il vettore $\dot{\gamma} = \dfrac{d\gamma}{dt}$ tangente a γ è un campo lungo γ.
- La connessione di Levi-Civita si estende in modo canonico ad una derivata $\dfrac{D}{dt}$ dei campi lungo γ.
- Se $\dfrac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$, la curva si dice geodetica.

Applicazione esponenziale

Applicazione esponenziale

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n.

Applicazione esponenziale

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n.

- Dato v in T_pM, si definisce $\exp(v)$ come $\gamma_v(1)$, se esiste, ove $\gamma_v : [0,1] \to M$ è l'unica geodetica per cui $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

Applicazione esponenziale

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n.

- Dato v in T_pM, si definisce $\exp(v)$ come $\gamma_v(1)$, se esiste, ove $\gamma_v : [0,1] \to M$ è l'unica geodetica per cui $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$.
- Per ogni p in M, la restrizione $\exp_p$ di $\exp$ a T_pM è un diffeomorfismo tra un intorno dell'origine 0_p di T_pM e un intorno di p in M.

Applicazione esponenziale

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n.

- Dato v in T_pM, si definisce $\exp(v)$ come $\gamma_v(1)$, se esiste, ove $\gamma_v : [0,1] \to M$ è l'unica geodetica per cui $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$.
- Per ogni p in M, la restrizione $\exp_p$ di $\exp$ a T_pM è un diffeomorfismo tra un intorno dell'origine 0_p di T_pM e un intorno di p in M.

Identificando $T_{0_p}(T_pM)$ con T_pM, il differenziale di $\exp_p$ in 0_p è l'identità; intuitivamente, una varietà riemanniana è localmente indistinguibile dallo spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ al prim'ordine.

Distanza

Distanza

Sia (M, g) una varietà riemanniana.

Distanza

Sia (M, g) una varietà riemanniana.

- La lunghezza riemanniana di una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti $\alpha : [a, b] \to M$ è
$$\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)}\, dt.$$

Distanza

Sia (M, g) una varietà riemanniana.

- La lunghezza riemanniana di una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti $\alpha : [a, b] \to M$ è
$$\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)} \, dt.$$
- La distanza tra due punti su M è l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve $\mathcal{C}^1$ a tratti che li congiungono.

Distanza

Sia (M, g) una varietà riemanniana.

- La lunghezza riemanniana di una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti $\alpha : [a, b] \to M$ è
$$\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)}\, dt.$$

- La distanza tra due punti su M è l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve $\mathcal{C}^1$ a tratti che li congiungono.
- Per una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti la lunghezza riemanniana e metrica coincidono.

Distanza

Sia (M, g) una varietà riemanniana.

- La lunghezza riemanniana di una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti $\alpha : [a, b] \to M$ è
$$\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)} \, dt.$$
- La distanza tra due punti su M è l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve $\mathcal{C}^1$ a tratti che li congiungono.
- Per una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti la lunghezza riemanniana e metrica coincidono.
- La topologia di varietà coincide con quella indotta dalla distanza.

Geodetiche metriche e riemanniane

Geodetiche metriche e riemanniane

Sia (M, g) una varietà riemanniana.

Geodetiche metriche e riemanniane

Sia (M, g) una varietà riemanniana.

- Ogni punto p ha un intorno tale che due suoi qualunque punti q ed r sono congiunti da una curva che è sia l'unica geodetica metrica, sia l'unica geodetica riemanniana di estremi q ed r ed interamente contenuta nell'intorno.

Geodetiche metriche e riemanniane

Sia (M, g) una varietà riemanniana.

- Ogni punto p ha un intorno tale che due suoi qualunque punti q ed r sono congiunti da una curva che è sia l'unica geodetica metrica, sia l'unica geodetica riemanniana di estremi q ed r ed interamente contenuta nell'intorno.
- Una curva su una varietà è una geodetica riemanniana se e solo se è una geodetica locale parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco dal punto di vista metrico.

Angoli

Angoli

Sia (M, g) una varietà riemanniana e p un suo punto.

Angoli

Sia (M, g) una varietà riemanniana e p un suo punto.

- L'angolo riemanniano tra due vettori u e v di T_pM è

$$\arccos\left(\frac{g|_p(u, v)}{\|u\|_p \|v\|_p}\right)$$

Angoli

Sia (M, g) una varietà riemanniana e p un suo punto.

- L'angolo riemanniano tra due vettori u e v di T_pM è

$$\arccos\left(\frac{g|_p\,(u, v)}{\|u\|_p\,\|v\|_p}\right)$$

- L'angolo riemanniano tra due geodetiche uscenti da p è l'angolo in T_pM tra i loro vettori tangenti in p.

Angoli

Sia (M, g) una varietà riemanniana e p un suo punto.

- L'angolo riemanniano tra due vettori u e v di T_pM è

$$\arccos\left(\frac{g|_p(u, v)}{\|u\|_p\,\|v\|_p}\right)$$

- L'angolo riemanniano tra due geodetiche uscenti da p è l'angolo in T_pM tra i loro vettori tangenti in p.

L'angolo riemanniano tra due geodetiche coincide con l'angolo di Aleksandrov tra di esse.

Curvatura

Curvatura

Sia (M, g) una varietà riemanniana di curvatura sezionale non positiva, p un suo punto e U un suo intorno unicamente geodetico. Possiamo sceglierlo in modo che per ogni q in U esso sia diffeomorfo ad un intorno di 0_q in T_qM mediante $\exp_q^{-1}$; allora U è CAT(0).

Curvatura

Sia (M, g) una varietà riemanniana di curvatura sezionale non positiva, p un suo punto e U un suo intorno unicamente geodetico. Possiamo sceglierlo in modo che per ogni q in U esso sia diffeomorfo ad un intorno di 0_q in T_qM mediante $\exp_q^{-1}$; allora U è CAT(0).

Prendo un triangolo $\triangle(q, r, s)$ in U, e lo porto con $\exp_q^{-1}$ sullo spazio euclideo T_qM. In curvatura non positiva, $\exp_q$ non diminuisce le lunghezze in un intorno di q. Allora

$$\left\|\exp_q^{-1}(r) - \exp_q^{-1}(s)\right\|_q \leqslant \ell\left(\exp_q^{-1}([r, s])\right) \leqslant d(r, s).$$

Curvatura

Sia (M, g) una varietà riemanniana di curvatura sezionale non positiva, p un suo punto e U un suo intorno unicamente geodetico. Possiamo sceglierlo in modo che per ogni q in U esso sia diffeomorfo ad un intorno di 0_q in T_qM mediante $\exp_q^{-1}$; allora U è CAT(0).

Prendo un triangolo $\triangle(q, r, s)$ in U, e lo porto con $\exp_q^{-1}$ sullo spazio euclideo T_qM. In curvatura non positiva, $\exp_q$ non diminuisce le lunghezze in un intorno di q. Allora

$$\left\|\exp_q^{-1}(r) - \exp_q^{-1}(s)\right\|_q \leqslant \ell\left(\exp_q^{-1}([r, s])\right) \leqslant d(r, s).$$

Ne discende la condizione CAT(0) nella sua espressione con gli angoli tra i lati.

Curvatura

Curvatura

Sia (M, g) una varietà riemanniana e p un suo punto tale che esiste π un 2-piano in T_pM di curvatura sezionale $\kappa > 0$.

Curvatura

Sia (M, g) una varietà riemanniana e p un suo punto tale che esiste π un 2-piano in T_pM di curvatura sezionale $\kappa > 0$.

Siano u, v ortonormali in π. Allora

$$d\left(\exp_p(\varepsilon u), \exp_p(\varepsilon v)\right) \leqslant \sqrt{2}\varepsilon - \frac{\kappa\sqrt{2}}{12}\varepsilon^3 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^4\right).$$

Curvatura

Sia (M, g) una varietà riemanniana e p un suo punto tale che esiste π un 2-piano in T_pM di curvatura sezionale $\kappa > 0$.

Siano u, v ortonormali in π. Allora

$$d\left(\exp_p(\varepsilon u), \exp_p(\varepsilon v)\right) \leqslant \sqrt{2}\varepsilon - \frac{\kappa\sqrt{2}}{12}\varepsilon^3 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^4\right).$$

Quindi, per ε sufficientemente piccoli, il triangolo $\triangle\left(p, \exp_p(\varepsilon u), \exp_p(\varepsilon v)\right)$ fornisce un controesempio alla proprietà CAT(0).

Geodetiche e convessità

Geodetiche e convessità

Sia (X, d) uno spazio CAT(0).

Geodetiche e convessità

Sia (X, d) uno spazio CAT(0).

- X è unicamente geodetico.

Geodetiche e convessità

Sia (X, d) uno spazio CAT(0).

- X è unicamente geodetico.
- Un sottospazio convesso di X è ancora CAT(0).

Geodetiche e convessità

Sia (X, d) uno spazio CAT(0).

- X è unicamente geodetico.
- Un sottospazio convesso di X è ancora CAT(0).
- Se γ_1, γ_2 sono due linee geodetiche tali che la funzione $t \mapsto d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ è limitata, allora tale funzione è costante.

Geodetiche e convessità

Sia (X, d) uno spazio CAT(0).

- X è unicamente geodetico.
- Un sottospazio convesso di X è ancora CAT(0).
- Se γ_1, γ_2 sono due linee geodetiche tali che la funzione $t \mapsto d\left(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\right)$ è limitata, allora tale funzione è costante.

Due tali geodetiche sono dette parallele.

Alcuni sottospazi piatti

Sia X uno spazio CAT(0).

Alcuni sottospazi piatti

Sia X uno spazio CAT(0).

- Se γ_1 e γ_2 sono due linee geodetiche parallele, allora esiste D reale ed un'immersione isometrica $f : [0, D] \times \mathbb{R} \to X$ tale che $f|_{\{0\}\times\mathbb{R}}$ e $f|_{\{D\}\times\mathbb{R}}$ sono le parametrizzazioni di γ_1 e γ_2 rispettivamente, a meno di traslazioni.

Alcuni sottospazi piatti

Sia X uno spazio CAT(0).

- Se γ_1 e γ_2 sono due linee geodetiche parallele, allora esiste D reale ed un'immersione isometrica $f : [0, D] \times \mathbb{R} \to X$ tale che $f|_{\{0\}\times\mathbb{R}}$ e $f|_{\{D\}\times\mathbb{R}}$ sono le parametrizzazioni di γ_1 e γ_2 rispettivamente, a meno di traslazioni.
- L'insieme delle linee geodetiche parallele ad una data è isometrico ad un prodotto $Y \times \mathbb{R}$, con Y ancora CAT(0).

Azioni di gruppo

Azioni di gruppo

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Azioni di gruppo

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Sia f un'isometria di X. Un sottospazio Y di X si dice f-invariante se la restrizione di f a Y è ancora un'isometria.

Azioni di gruppo

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Sia f un'isometria di X. Un sottospazio Y di X si dice f-invariante se la restrizione di f a Y è ancora un'isometria.

Sia G che agisce su X mediante isometrie.

Azioni di gruppo

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Sia f un'isometria di X. Un sottospazio Y di X si dice f-invariante se la restrizione di f a Y è ancora un'isometria.

Sia G che agisce su X mediante isometrie.

- Un sottospazio Y di X si dice G-invariante se è g-invariante per ogni g in G.

Azioni di gruppo

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Sia f un'isometria di X. Un sottospazio Y di X si dice f-invariante se la restrizione di f a Y è ancora un'isometria.

Sia G che agisce su X mediante isometrie.

- Un sottospazio Y di X si dice G-invariante se è g-invariante per ogni g in G.
- L'azione è propria se ogni punto ha un intorno U tale che i g in G per cui $g \cdot U$ interseca U sono finiti; propriamente discontinua se l'intorno può essere scelto in modo che $g \cdot U$ intersechi U solo per g elemento neutro di G.

Azioni di gruppo

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Sia f un'isometria di X. Un sottospazio Y di X si dice f-invariante se la restrizione di f a Y è ancora un'isometria.

Sia G che agisce su X mediante isometrie.

- Un sottospazio Y di X si dice G-invariante se è g-invariante per ogni g in G.
- L'azione è propria se ogni punto ha un intorno U tale che i g in G per cui $g \cdot U$ interseca U sono finiti; propriamente discontinua se l'intorno può essere scelto in modo che $g \cdot U$ intersechi U solo per g elemento neutro di G.
- L'azione è cocompatta se esiste un compatto le cui immagini mediante l'azione di G ricoprono X.

$\mathrm{Min}(f)$

Min(f)

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

Min(f)

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- La funzione d_f che manda un punto x di X in $d(x, f(x))$ è detta *funzione di displacement* di f.

Min(f)

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- La funzione d_f che manda un punto x di X in $d(x, f(x))$ è detta *funzione di displacement* di f.
- La lunghezza di traslazione $|f|$ è l'estremo inferiore di d_f su X.

Min(f)

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- La funzione d_f che manda un punto x di X in $d(x, f(x))$ è detta *funzione di displacement* di f.
- La lunghezza di traslazione $|f|$ è l'estremo inferiore di d_f su X.
- $\mathrm{Min}(f)$ è il sottoinsieme su cui d_f vale esattamente $|f|$.

Min(f)

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- La funzione d_f che manda un punto x di X in $d(x, f(x))$ è detta *funzione di displacement* di f.
- La lunghezza di traslazione $|f|$ è l'estremo inferiore di d_f su X.
- $\mathrm{Min}(f)$ è il sottoinsieme su cui d_f vale esattamente $|f|$.
- Se un gruppo G agisce su X mediante isometrie, $\mathrm{Min}(G)$ è l'intersezione dei $\mathrm{Min}(g)$ al variare di g in G.

Min(f)

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- La funzione d_f che manda un punto x di X in $d(x, f(x))$ è detta *funzione di displacement* di f.
- La lunghezza di traslazione $|f|$ è l'estremo inferiore di d_f su X.
- $\mathrm{Min}(f)$ è il sottoinsieme su cui d_f vale esattamente $|f|$.
- Se un gruppo G agisce su X mediante isometrie, $\mathrm{Min}(G)$ è l'intersezione dei $\mathrm{Min}(g)$ al variare di g in G.

Se $\mathrm{Min}(f)$ è non vuoto, f si dice semisemplice.

Min(f)

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- La funzione d_f che manda un punto x di X in $d(x, f(x))$ è detta *funzione di displacement* di f.
- La lunghezza di traslazione $|f|$ è l'estremo inferiore di d_f su X.
- $\mathrm{Min}(f)$ è il sottoinsieme su cui d_f vale esattamente $|f|$.
- Se un gruppo G agisce su X mediante isometrie, $\mathrm{Min}(G)$ è l'intersezione dei $\mathrm{Min}(g)$ al variare di g in G.

Se $\mathrm{Min}(f)$ è non vuoto, f si dice semisemplice.

Se f è semisemplice e $|f| > 0$, si dice iperbolica.

Min(f) e curvatura

Min(f) e curvatura

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

Min(f) e curvatura

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- Se X è CAT(0), allora d_f è una funzione convessa.

$\mathrm{Min}(f)$ e curvatura

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- Se X è CAT(0), allora d_f è una funzione convessa.
- Se X è CAT(0), allora $\mathrm{Min}\,(f)$ è convesso.

Min(f) e curvatura

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- Se X è CAT(0), allora d_f è una funzione convessa.
- Se X è CAT(0), allora $\mathrm{Min}\,(f)$ è convesso.
- Se X è CAT(0) e C è un sottospazio convesso non vuoto, invariante e completo rispetto alla metrica indotta, allora $|f| = |f|_C|$.

Min(f) e curvatura

Sia f un'isometria di uno spazio metrico (X, d).

- Se X è CAT(0), allora d_f è una funzione convessa.
- Se X è CAT(0), allora $\mathrm{Min}\,(f)$ è convesso.
- Se X è CAT(0) e C è un sottospazio convesso non vuoto, invariante e completo rispetto alla metrica indotta, allora $|f| = |\,f|_C|$.
- Se X e C sono come sopra, allora f è semisemplice se e solo se $f|_C$ lo è.

Azioni su prodotti

Azioni su prodotti

Sia f un'isometria del prodotto di spazi metrici $X \times Y$ che si scompone come (f_X, f_Y) con f_X isometria di X e f_Y isometria di Y. Allora f è semisemplice se e solo se f_X e f_Y lo sono.

Azioni su prodotti

Sia f un'isometria del prodotto di spazi metrici $X \times Y$ che si scompone come (f_X, f_Y) con f_X isometria di X e f_Y isometria di Y. Allora f è semisemplice se e solo se f_X e f_Y lo sono.

Sia G un gruppo che agisce propriamente su un prodotto di spazi metrici $X \times Y$ in modo che ogni elemento g di G si decomponga come prodotto di isometrie (g_X, g_Y) sui fattori e, detto H il sottoguppo degli elementi che fissano X, l'azione di H su Y sia cocompatta. Allora l'azione di G/H su X con $(g_X, g_Y)\,H$ che agisce come g_X, è propria.

Azioni semisemplici di $\mathbb{Z}$

Azioni semisemplici di $\mathbb{Z}$

Sia X uno spazio CAT(0) e f una sua isometria.

Azioni semisemplici di $\mathbb{Z}$

Sia X uno spazio CAT(0) e f una sua isometria.

- f è iperbolica se e solo se esiste un suo asse, ossia una linea geodetica invariante su cui f agisce per traslazione.

Azioni semisemplici di $\mathbb{Z}$

Sia X uno spazio CAT(0) e f una sua isometria.

- f è iperbolica se e solo se esiste un suo asse, ossia una linea geodetica invariante su cui f agisce per traslazione.
- Se f è iperbolica, i suoi assi sono paralleli e la loro unione è $\mathrm{Min}(f)$, il quale si scompone come un prodotto $Y \times \mathbb{R}$, con Y ancora CAT(0).

Azioni semisemplici di $\mathbb{Z}$

Sia X uno spazio CAT(0) e f una sua isometria.

- f è iperbolica se e solo se esiste un suo asse, ossia una linea geodetica invariante su cui f agisce per traslazione.
- Se f è iperbolica, i suoi assi sono paralleli e la loro unione è $\mathrm{Min}(f)$, il quale si scompone come un prodotto $Y \times \mathbb{R}$, con Y ancora CAT(0).
- $\mathrm{Min}(f) \cong Y \times \mathbb{R}$ è f-invariante; l'azione indotta è per identità su Y e per traslazione su $\mathbb{R}$.

Azioni semisemplici di $\mathbb{Z}$

Sia X uno spazio CAT(0) e f una sua isometria.

- f è iperbolica se e solo se esiste un suo asse, ossia una linea geodetica invariante su cui f agisce per traslazione.
- Se f è iperbolica, i suoi assi sono paralleli e la loro unione è $\mathrm{Min}(f)$, il quale si scompone come un prodotto $Y \times \mathbb{R}$, con Y ancora CAT(0).
- $\mathrm{Min}(f) \cong Y \times \mathbb{R}$ è f-invariante; l'azione indotta è per identità su Y e per traslazione su $\mathbb{R}$.

Un asse di f è chiaramente un asse del sottogruppo generato da f, che perciò è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Quindi l'ultimo risultato si generalizza ad azioni proprie per isometrie semisemplici di $\mathbb{Z}$ su uno spazio CAT(0).

Teorema del Toro Piatto

Teorema del Toro Piatto

Versione originale di Gromoll-Wolf e Lawson-Yau: se il gruppo fondamentale di una varietà riemanniana M compatta a curvatura sezionale non positiva contiene $\mathbb{Z}^n$, allora esiste un n-toro piatto totalmente geodeticamente immerso, non necessariamente embedded, in M.

Teorema del Toro Piatto

Versione originale di Gromoll-Wolf e Lawson-Yau: se il gruppo fondamentale di una varietà riemanniana M compatta a curvatura sezionale non positiva contiene $\mathbb{Z}^n$, allora esiste un n-toro piatto totalmente geodeticamente immerso, non necessariamente embedded, in M.

Versione metrica: se $G \cong \mathbb{Z}^n$ agisce propriamente per isometrie semisemplici su uno spazio CAT(0), allora $\mathrm{Min}\,(G)$ è non vuoto, G-invariante ed isometrico ad un prodotto $Y \times \mathbb{E}^n$; l'azione di G su esso è l'identità su Y e per traslazioni su $\mathbb{E}^n$, e il quoziente di ciascun $\{y\} \times \mathbb{E}^n$ per l'azione di G è un n-toro piatto.

Teorema del Toro Piatto

Versione originale di Gromoll-Wolf e Lawson-Yau: se il gruppo fondamentale di una varietà riemanniana M compatta a curvatura sezionale non positiva contiene $\mathbb{Z}^n$, allora esiste un n-toro piatto totalmente geodeticamente immerso, non necessariamente embedded, in M.

Versione metrica: se $G \cong \mathbb{Z}^n$ agisce propriamente per isometrie semisemplici su uno spazio CAT(0), allora $\mathrm{Min}\,(G)$ è non vuoto, G-invariante ed isometrico ad un prodotto $Y \times \mathbb{E}^n$; l'azione di G su esso è l'identità su Y e per traslazioni su $\mathbb{E}^n$, e il quoziente di ciascun $\{y\} \times \mathbb{E}^n$ per l'azione di G è un n-toro piatto.

Dimostrazione: per induzione su n.

Rivestimento universale

Rivestimento universale

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di curvatura non positiva. Allora:

Rivestimento universale

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di curvatura non positiva. Allora:

- Il suo rivestimento universale $\widetilde{M}$ è globalmente CAT(0).

Rivestimento universale

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di curvatura non positiva. Allora:

- Il suo rivestimento universale $\widetilde{M}$ è globalmente CAT(0).
- L'azione di $\pi_1(M)$ su $\widetilde{M}$ è cocompatta, propriamente discontinua e per isometrie semisemplici.

Rivestimento universale

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di curvatura non positiva. Allora:

- Il suo rivestimento universale $\widetilde{M}$ è globalmente CAT(0).
- L'azione di $\pi_1(M)$ su $\widetilde{M}$ è cocompatta, propriamente discontinua e per isometrie semisemplici.

Pertanto, se il gruppo fondamentale di M contiene una copia di $\mathbb{Z}^n$, il suo rivestimento universale contiene copie convesse di $\mathbb{E}^n$, quindi ha sottospazi piatti negli spazi tangenti ai punti di tale sottoinsieme. La piattezza passa al quoziente; degli spazi euclidei rimangono immersioni di tori.

Corollari

Corollari

Se M, N sono varietà compatte contenenti $\mathbb{Z}$ nel gruppo fondamentale, $M \times N$ non ammette metriche di curvatura strettamente negativa.

Corollari

Se M, N sono varietà compatte contenenti $\mathbb{Z}$ nel gruppo fondamentale, $M \times N$ non ammette metriche di curvatura strettamente negativa.

Esempi: n-toro o $S^1 \times M$, con M come sopra.

This is the end...