Università degli Studi di Pisa

Corso di Laurea in Matematica

# Un concetto generalizzato di curvatura e il Teorema del Toro Piatto

15 ottobre 2012

Tesi di Laurea

Candidato
**Kirill Kuzmin**

Relatore
**Dott. Roberto Frigerio**

Anno Accademico 2011/2012

He inspired uneasiness. That was it! Uneasiness. Not a definite mistrust — just uneasiness — nothing more. You have no idea how effective such a... a... faculty can be.

Suscitava disagio. Ecco! Disagio. Non una diffidenza vera e propria — solo disagio — niente di più. Non avete idea di quanto efficace tale... tale... facoltà possa essere.

Joseph Conrad, *Heart of Darkness* (Cuore di Tenebra)

# Introduzione

Questo testo verte attorno al concetto di curvatura non positiva di spazi metrici sotto forma di condizione CAT(0), e arriva a dimostrare e ad enunciare alcune applicazioni del Teorema del Toro Piatto sotto questa ipotesi.

Uno dei modi di pensare alla curvatura è quello di una proprietà degli spazi metrici che li distingue dallo spazio euclideo piatto. Sembra però più intuitivo pensare che si tratti di una proprietà differenziale, ed infatti è già stata studiata da Gauss per le superfici, per arrivare alla formalizzazione più compiuta dovuta a Riemann della branca della geometria che porta il suo nome. I tentativi di trovare una definizione più generale, che non coinvolgesse le forti ipotesi delle varietà, non sono però cessati, approdando a metà del XX secolo, ad opera di Aleksandrov, con articoli come [Ale51] e successivi, e con importanti contributi di Cartan e Topogonov, ad una definizione debole di curvatura che nasce dal confronto di spazi metrici geodetici, in cui per ogni coppia di punti esiste una curva che li unisce di lunghezza pari alla distanza tra gli estremi, con spazi a curvatura costante. L'intera costruzione è riassunta nella condizione CAT($\kappa$), dalle iniziali dei tre studiosi che vi contribuirono. Altri risultati importanti vengono da Gromov, che studiò azioni di gruppi che agiscono su tali spazi per isometrie, o che, dotati di opportuna funzione distanza, sono essi stessi spazi con tale ipotesi.

Il Teorema del Toro Piatto nasce nell'ambito delle varietà riemanniane negli anni '70 del novecento grazie agli sforzi indipendenti di Gromoll e Wolf [GW71] da una parte e Lawson e Yau [LY72] dall'altra. Esso si applica alle varietà riemanniane compatte di curvatura sezionale non positiva e lega la presenza di sottoguppi isomorfi a $\mathbb{Z}^n$ nel gruppo fondamentale alla presenza di tori piatti isometricamente e totalmente geodeticamente immersi in tali varietà. Il teorema qui trattato è una sua generalizzazione al caso in cui $\mathbb{Z}^n$ agisce in un certo modo per isometrie su uno spazio CAT(0), ottenendo l'immersione nello spazio in esame di un prodotto di $\mathbb{R}^n$ per un'ulteriore spazio CAT(0). Il legame tra i due teoremi passa dal rivestimento unversale di una varietà riemanniana con le ipotesi sopra riportate; ad esso si applica il teorema generalizzato.

Nel testo si sviluppano in parallelo due percorsi. Uno è dedicato agli spazi metrici oggetto della trattazione. L'altro riguarda le varietà riemanniane e si concentra soprattutto sul loro essere spazi metrici. Si dimostra infatti che i concetti via via definiti sono adeguate generalizzazioni di analoghi riemanniani, inclusa la condizione CAT(0) come generalizzazione della curvatura sezionale non positiva. Questo sviluppo è giustificato nella parte finale, in cui si esaminano ostruzioni topologiche alla costruzione di metriche riemanniane con certe ipotesi sulla curvatura sezionale.

Nella prima sezione vengono dati senza dimostrazione i concetti di base su spazi metrici e gruppi di isometrie. Nella sezione sucessiva si sviluppa la teoria necessaria al teorema centrale della tesi. Si introducono i concetto di lunghezza, geodetica e di spazio metrico geodetico, e si generalizza il concetto di convessità a tali spazi. Segue una revisione, senza dimostrazioni, dei fatti essenziali sullo spazio euclideo.

Successivamente vengono definite le costruzioni che permettono un confronto tra spazi geodetici generici e lo spazio euclideo: triangoli geodetici ed angoli. Usando queste, si dà la definizione standard di condizione CAT(0), più alcune equivalenti. Si continua introducendo le varietà riemanniane come spazi metrici, si verifica la coerenza di alcune definizioni fornite tra i due ambiti trattati e si dimostra infine che una varietà riemanniana ha tutte le curvature sezionali non positive se e solo se ogni suo punto possiede un intorno che rispetta la condizione CAT(0).

Si passa poi ad un esame più approfondito degli spazi metrici con le ipotesi precedentemente introdotte. Viene approfondito il comportamento delle geodetiche, e viene definita e dimostrata la convessità della funzione distanza. Si passa poi a parlare della proiezione su sottospazi non vuoti, convessi e completi rispetto alla metrica indotta. La sottosezione si conclude esaminando alcune ipotesi che permettano di immergere spazi piatti in uno spazio CAT(0).

Nella sottosezione successiva si inizia a parlare più approfonditamente delle isometrie di uno spazio CAT(0); viene definito l'insieme dei punti spostati della minima distanza da un'isometria e se ne esamina la struttura, arrivando ad un risultato già abbastanza compiuto nel caso in cui $\mathbb{Z}$ agisca in un certo modo su un tale spazio; si ha infatti l'immersione di un prodotto di $\mathbb{R}$ per un certo spazio, ancora CAT(0), nello spazio metrico in esame. Si enunciano anche altri risultati generali su gruppi di isometrie.

La sezione successiva si apre con l'enunciato e la dimostrazione del Teorema del Toro Piatto. Per poterlo sfruttare per le varietà riemanniane, si vede come esso debba applicarsi al loro rivestimento universale e al loro gruppo fondamentale che vi agisce. Come già anticipato, se la varietà in esame è compatta e il gruppo fondamentale contiene sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}^n$, dal Teorema segue un'immersione di $\mathbb{R}^n$ nel rivestimento universale; una richiesta di curvatura sezionale non positiva si traduce in questo modo nella presenza di sottospazi piatti, quindi nell'impossibilità di avere curvatura strettamente negativa. In questo modo si dimostra, ad esempio, che l'$n$-toro, o, in generale, il prodotto di due varietà qualunque contenenti ciascuna una coppia di $\mathbb{Z}$ nel gruppo fondamentale, non ammettono metriche riemanniane di curvatura strettamente negativa.

# Indice

**Introduzione** **4**

**1 Definizioni preliminari** **7**

**2 Curvatura degli spazi metrici** **9**
2.1 Lunghezza . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
2.2 Spazi geodetici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
2.3 Convessità . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
2.4 Geometria di $\mathbb{E}^n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
2.5 Proprietà CAT(0) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
2.6 Generalità sulle varietà Riemanniane . . . . . . . . . . . . . . . . 19
2.7 Varietà Riemanniane come spazi metrici . . . . . . . . . . . . . . 20

**3 Geometria degli spazi CAT(0)** **29**
3.1 Conseguenze geometriche della condizione CAT(0) . . . . . . . . 29
3.2 Isometrie degli spazi CAT(0) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

**4 Teorema del Toro Piatto e conseguenze** **44**
4.1 Teorema del Toro Piatto . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
4.2 Ostruzioni alla curvatura . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

**Ringraziamenti** **46**

**Bibliografia** **47**

# 1 Definizioni preliminari

Questa parte costituisce un richiamo sugli spazi metrici e sulle isometrie. Non contiene dimostrazioni e serve soprattutto per fissare le notazioni e le definizioni adottate.

Uno spazio metrico verrà indicato con una coppia $(X, d)$, ove $X$, o una lettera latina maiuscola di fine alfabeto, è il supporto, e $d$, o lettere analoghe, è la distanza. Quest'ultima verrà spesso omessa se non c'è ambiguità. Gli elementi dello spazio verranno indicati con lettere latine minuscole come $x$ o $p$.

La distanza induce su $(X, d)$ una *topologia* che ha per base le palle aperte, che verranno indicate con $B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r,\ r > 0\}$. Le palle chiuse verranno indicate con $\overline{B}(x, r) = \{y \in X | d(x, y) \leqslant r,\ r > 0\}$, con analogo significato delle lettere. Se non altrimenti specificato, uno spazio metrico si penserà sempre dotato di questa topologia.

Grazie alla diseguaglianza triangolare, la distanza da un punto è lipschitziana di costante 1, quindi continua. La funzione distanza è inoltre continua nella topologia prodotto.

Richiamiamo il concetto di equivalenza tra spazi metrici.

**Definizione 1.0.1.** *Siano $(X, d)$ e $(X', d')$ spazi metrici. Un'applicazione $f : X \to X'$ si dice* isometria *se è una biiezione che preserva le distanze, ossia per ogni $x, y \in X$ si ha $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$. Se tra due spazi metrici esiste un'isometria, questi sono detti* isometrici.

Osserviamo che l'iniettività segue immediatamente dalla condizione sulle distanze, perciò l'unica altra ipotesi necessaria affinché $f$ sia un'isometria è la suriettività. Se manca solo quest'ultima, in questo testo si parlerà di *immersione isometrica*.

Notiamo inoltre che l'inversa di un'isometria è ancora un'isometria, e che la composizione di isometrie è ancora un'applicazione dello stesso tipo. Questa osservazione permetterà di trattare due spazi isometrici come se fossero effettivamente lo stesso spazio metrico. Segue inoltre che le isometrie di uno spazio metrico formano un gruppo con la composizione, che si indicherà con $Isom(X)$.

Una applicazione tra spazi metrici, pur non essendo un'isometria, può comunque definire un confronto tra questi spazi.

**Definizione 1.0.2.** *Siano $(X, d)$ e $(X', d')$ spazi metrici. Un'applicazione $f : X \to X'$ si dice* isometria locale *se $\forall\, x \in X\ \exists\, U$ intorno di $x$ tale che $f(U)$ è un intorno di $f(x)$ e $f|_U$ è un'isometria con l'immagine.*

Isometrie, immersioni isometriche e isometrie locali sono localmente lipschitziane di costante 1, perciò continue.

Se $Y \subset X$ è un sottoinsieme, $d|_{Y \times Y}$ è detta *metrica indotta su $Y$*. Osserviamo che $f$ è un immersione isometrica se e solo se è un isometria con l'immagine dotata della metrica indotta.

La distanza di un punto da un sottoinsieme di uno spazio metrico è l'estremo inferiore delle possibili distanze tra il punto e i punti del sottoinsieme; anche questa funzione è lipschitziana di costante 1.

Una *curva* in $X$ è una funzione continua da un'intervallo di $\mathbb{R}$, di solito chiuso, ma non necessariamente limitato, dotato della topologia euclidea, in $X$. Ricordiamo che la topologia euclidea su $\mathbb{R}$ è essa stessa indotta dalla distanza

$d(x,y) = |x-y|$; $\mathbb{R}$ verrà supposto avere questa topologia a meno di diverse indicazioni. Le curve verranno indicate con lettere greche minuscole di inizio alfabeto.

Il *prodotto* di due spazi metrici $(X', d')$ e $(X'', d'')$ è lo spazio metrico $(X, d)$ con supporto $X = X' \times X''$ e distanza

$$d\left((x', x''), (y', y'')\right) = \sqrt{d'(x', y')^2 + d''(x'', y'')^2}.$$

Uno spazio metrico si dice *localmente compatto* se ogni suo punto possiede un intorno compatto, *completo* se ogni successione di Cauchy converge e *proprio* se le palle chiuse sono insiemi compatti.

Consideriamo ora un gruppo $G$ che agisce su uno spazio metrico $X$ mediante isometrie. Chiaramente, in tal caso $G$ si immerge in $Isom(X)$. L'azione di un elemento $g \in G$ su $x \in X$ verrà indicata con $g \cdot x$.

L'azione si dice *propria* se per ogni $x \in X$ esiste $U \subseteq X$ intorno di $x$ tale che $g \cdot U \cap U = \emptyset$ tranne per al più un numero finito di $g \in G$. L'azione è *propriamente discontinua* se l'intorno $U$ può essere scelto in modo che $g \cdot U \cap U = \emptyset$ per tutti i $g \in G$ tranne che per l'identità.

L'azione si dice *cocompatta* se esiste $K \subseteq X$ compatto tale che $\{g \cdot K | g \in G\}$ ricopre $X$; in particolare il quoziente $X/G$ è compatto.

# 2 Curvatura degli spazi metrici

Dopo aver introdotto nella prima parte i concetti fondamentali su cui verterà la trattazione, vedremo in questa sezione una serie di definizioni e risultati che serviranno a restringere il campo d'indagine, per arrivare a parlare in maniera compiuta di un concetto generalizzato di curvatura per una certa classe di spazi metrici. Si finirà osservando come i concetti introdotti siano generalizzazioni di proprietà differenziali delle varietà riemanniane.

## 2.1 Lunghezza

Gli assiomi di spazio metrico sono troppo ampi, basta pensare alla metrica discreta $d(x,y) = 1 - \delta_{x,y}$. Quindi per poter ottenere risultati geometricamente significativi è necessario aggiungere ipotesi. Per gli scopi di questo testo, le ipotesi riguarderanno il comportamento delle curve negli spazi metrici. Iniziamo col definirne la lunghezza, e ad esplorarne le conseguenze.

Consideriamo un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, e sia $\alpha : [a,b] \to X$ una curva in uno spazio metrico $(X,d)$. Una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ è una scelta di un numero finito di punti $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

**Definizione 2.1.1.** *La* lunghezza di $\alpha$ associata a $\mathcal{P}$ *è*

$$\ell(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} d(t_{i-1}, t_i).$$

Notiamo che, grazie alla diseguaglianza triangolare, se una partizione $\mathcal{P}'$ è più fine di $\mathcal{P}$, ossia se contiene $\mathcal{P}$ come sottoinsieme, la lunghezza associata a $\mathcal{P}'$ è maggiore o uguale a quella associata a $\mathcal{P}$. Inoltre la lunghezza associata ad una qualunque partizione è non negativa; questa stima si può migliorare osservando che, poiché $\{a,b\}$ è una partizione meno fine di qualunque altra, la lunghezza associata a qualunque partizione è maggiore o uguale a $d(\alpha(a), \alpha(b))$.

**Definizione 2.1.2.** *La* lunghezza (metrica) *di $\alpha$ è*

$$\ell(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}} \ell(\alpha, \mathcal{P}),$$

*ove $\mathcal{P}$ varia tra tutte le partizioni di $[a,b]$.*

Grazie all'osservazione precedente, la lunghezza di una curva è sempre non negativa, e maggiore o uguale alla distanza tra gli estremi. Inoltre la lunghezza è 0 se e solo se la curva è costante, altrimenti basterebbe scegliere una partizione in cui due dei suoi punti abbiano immagini distinte. Notiamo che la lunghezza di una curva potrebbe essere infinita. Se così non è, la curva si dice *rettificabile.*

La lunghezza delle curve è additiva, nel senso precisato dal seguente

**Lemma 2.1.3.** Siano $(X,d)$ uno spazio metrico, e siano $\alpha' : [a,b] \to X$ e $\alpha'' : [b,c] \to X$ due curve tali che $\alpha'(b) = \alpha''(b)$. Allora, detta $\alpha : [a,c] \to X$ la curva definita come giunzione di $\alpha'$ e $\alpha''$, si ha $\ell(\alpha) = \ell(\alpha') + \ell(\alpha'')$.

*Dimostrazione.* Da una parte, se $\mathcal{P}'$ è una partizione di $[a,b]$ e $\mathcal{P}''$ è una partizione di $[b,c]$, allora $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ è una partizione di $[a,c]$ e $\ell(\alpha, \mathcal{P}) = \ell(\alpha', \mathcal{P}') + \ell(\alpha'', \mathcal{P}'')$, perciò

$$\left\{ l' + l'' \,\middle|\, \begin{array}{rl} l' = \ell(\alpha', \mathcal{P}') & \mathcal{P}' \text{ partizione di } [a,b] \\ l'' = \ell(\alpha'', \mathcal{P}'') & \mathcal{P}'' \text{ partizione di } [b,c] \end{array} \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \{\ell(\alpha, \mathcal{Q}) \,|\, \mathcal{Q} \text{ partizione di } [a,c]\}$$

e dunque $\ell(\alpha) \geqslant \ell(\alpha') + \ell(\alpha'')$.

D'altra parte, se $\mathcal{Q}$ é una partizione di $[a,c]$, allora $\mathcal{Q}' = (\mathcal{Q} \cap [a,b]) \cup \{b\}$ è una partizione di $[a,b]$ e $\mathcal{Q}'' = (\mathcal{Q} \cap [b,c]) \cup \{b\}$ è una partizione di $[b,c]$, e dalla diseguaglianza triangolare segue che $\ell(\alpha, \mathcal{Q}) \leqslant \ell(\alpha', \mathcal{Q}') + \ell(\alpha'', \mathcal{Q}'')$, dunque $\ell(\alpha) \leqslant \ell(\alpha') + \ell(\alpha'')$ per l'arbitrarietà di $\mathcal{Q}$. □

La prossima definizione fornisce il legame, per alcune curve, tra il dominio di parametrizzazione e la lunghezza.

**Definizione 2.1.4.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una curva $\alpha : I \to (X,d)$ si dice* parametrizzata per lunghezza d'arco *se $\forall\, a < b \in I$ si ha $\ell\left(\alpha|_{[a,b]}\right) = b - a$.*

La seguente classe di curve può tornare utile quando si vogliono parametrizzare comodamente più curve sullo stesso intervallo; il caso classico è quello di $[0,1]$.

**Definizione 2.1.5.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una curva $\alpha : I \to (X,d)$ si dice* parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco *se esiste $\lambda$ reale positivo tale che per ogni $a < b \in I$ si abbia $\ell\left(\alpha|_{[a,b]}\right) = \lambda(b-a)$.*

Il concetto di lunghezza permette di isolare una classe particolare di spazi metrici.

**Definizione 2.1.6.** *Uno spazio metrico $(X,d)$ si dice* length space *se per ogni $x, y \in X$ si ha $d(x,y) = \inf_{\alpha} \ell(\alpha)$, ove l'inf è eseguito su tutte le curve $\alpha$ di estremi $p$ e $q$.*

Per i length spaces vale la seguente proprietà:

**Lemma 2.1.7** (Teorema di Hopf-Rinow)**.** Un length space $(X,d)$ completo e localmente compatto è proprio.

*Dimostrazione.* Fissiamo $p \in X$ e consideriamo l'insieme $R$ degli $r \in [0, +\infty)$ tali che $\overline{B}(p,r)$ è compatta. Tale insieme contiene un intorno dello 0 per la locale compattezza, e si tratta sicuramente di un intervallo in quanto se al suo interno c'è un valore del raggio, ci sono anche tutti i valori inferiori. Mostriamo che è aperto e chiuso in $[0,+\infty)$, da cui la tesi.

Perché l'insieme sia aperto bisogna mostrare che se $\rho \in R$, allora anche $[\rho, \rho+\delta] \subseteq R$ per qualche $\delta > 0$. Per ogni punto $q$ di $\overline{B}(p,\rho)$ esiste $r_q > 0$ tale che $\overline{B}(q, r_q)$ risulti compatta. Per compattezza di $\overline{B}(p,\rho)$ posso ricoprirla con una quantità finita di tali palle aperte $B(q_i, r_{q_i})$. Ma allora per ogni punto di $\overline{B}(p,\rho)$ la sua distanza dal complementare di $\bigcup_i B(q_i, r_{q_i})$ è strettamente positiva, quindi lo è anche il minimo $\delta$ di questa distanza su $\overline{B}(p,\rho)$. Questo vuol dire che $\overline{B}(p, \rho+\delta)$ è inclusa nell'unione di finiti compatti $\left(\bigcup_i B(q_i, r_{q_i})\right) \cup \overline{B}(p,\rho)$ ed è pertanto compatta.

Rimane ora da mostrare che se $\overline{B}(p,r)$ è compatta per ogni $r < \rho$, allora anche $\overline{B}(p,\rho)$ lo è. Sia $x_n$ una successione in $\overline{B}(p,\rho)$. Se per una sua sottosuccessione $x_{n_k}$ si ha $d(p, x_{n_k}) \leqslant L < \rho$ per trovare una sottosuccessione convergente posso usare la compattezza di $\overline{B}(p,L)$, altrimenti $d(p,x_n) \to \rho$. Sia $t_m$ una successione di reali positivi minori di $\frac{\rho}{2}$ e strettamente decrescente verso 0. Per ogni $n$ costruisco una curva tra $x_n$ e $p$ di lunghezza strettamente minore di $d(x_n,p)+\frac{t_1}{2}$ e scelgo $y_n^{(1)}$ tale che il tratto di questa curva tra $x_1$ e $y_n^{(1)}$ sia più corto di $t_1$ e il tratto tra $y_n^{(1)}$ e $p$ sia più corto di $d(x_n,p)-\frac{t_1}{2}$; in tal modo per ogni $n$ naturale $d\left(p,y_n^{(1)}\right) < \rho - \frac{t_1}{2}$ e $d\left(x_n,y_n^{(1)}\right) < t_1$. Ma allora $y_n^{(1)}$ è una successione in $\overline{B}\left(p,\rho-\frac{t_1}{2}\right)$ e pertanto ha una sottosuccessione convergente $y_{n_i}^{(1)}$. Prendendo la corrispondente sottosuccessione $x_{n_i}$ della successione originaria, chiamiamo $z_1 = x_{n_1}$ e rinominiamo $x_{n_i}$ come $x_n^{(1)}$.

Si procede per ricorsione: data $x_n^{(m)}$ con $m$ naturale si costruisce una successione $y_n^{(m+1)}$ tale che $d\left(p,y_n^{(m+1)}\right) < \rho - \frac{t_{m+1}}{2}$ e $d\left(x_n^{(m)},y_n^{(m+1)}\right) < t_{m+1}$; questo garantisce l'esistenza di una sottosuccessione convergente $y_{n_i}^{(m+1)}$; consideriamo la sottosuccessione corrispondente $x_{n_i}^{(m)}$, chiamiamo $z_{m+1} = x_{n_{m+1}}^{(m)}$ e rinominiamo questa sottosuccessione $x_n^{(m+1)}$. Notiamo che in questo modo $z_j$ è una sottosuccessione di $x_n$ tale che se $j < k$ allora $z_j$ precedeva strettamente $z_k$ in $x_n$ e inoltre, fissato $j$, per ogni $m \leqslant j$ è ben definito un $y_{n(j)}^{(m)}$ tale che $d\left(z_j,y_{n(j)}^{(m)}\right) < t_m$, e viceversa, fissato $m$, si ha $n(j)$ definito per $j \geqslant m$ e crescente in $j$, e la successione $y_{n(j)}^{(m)}$ è una sottosuccessione della sottosuccessione convergente di $y_n^{(m)}$ trovata al passo $m$; in particolare è di Cauchy. Affermo che anche $z_j$ è di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $m$ tale che $t_m < \frac{\varepsilon}{3}$ ed un $N \geqslant m$ tale che per ogni $h_1,h_2 \geqslant N$ si abbia $d\left(y_{n(h_1)}^{(m)},y_{n(h_2)}^{(m)}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ma allora, presi $j_1,j_2 \geqslant n$ si ha

$$d(z_{j_1},z_{j_2}) \leqslant d\left(z_{j_1},y_{n(j_1)}^{(m)}\right) + d\left(y_{n(j_1)}^{(m)},y_{n(j_2)}^{(m)}\right) + d\left(y_{n(j_2)}^{(m)},z_{j_2}\right) < 2t_m + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

La successione $z_j$ converge allora per la completezza dello spazio e fornisce una sottosuccessione convergente di $x_n$, il che prova la compattezza di $\overline{B}(p,\rho)$. □

## 2.2 Spazi geodetici

In questa parte verranno definite le curve dette geodetiche, che permetteranno di isolare la classe di spazi metrici geodetici. Iniziamo definendo la geodetica tra due punti.

**Definizione 2.2.1.** *Siano $x$, $y \in X$, con $d(x,y) = l$. Una curva $\alpha : [0,l] \to X$ si dice* geodetica (metrica) tra $x$ e $y$, *e si indica con $[x,y]$ se $\alpha(0) = x$, $\alpha(l) = y$ e per ogni $t,t' \in [0,l]$ si ha $d(\alpha(t),\alpha(t')) = |t-t'|$.*

Notiamo che una geodetica tra $x$ e $y$ non è necessariamente unica. La notazione con le parentesi quadre nasconde un po' questo aspetto, tuttavia può tornare comoda per brevità. Questa notazione verrà usata indifferentemente per indicare la geodetica sia come funzione, sia come la sua immagine.

Definiamo ora una linea geodetica.

**Definizione 2.2.2.** *Una curva* $\alpha : \mathbb{R} \to X$ *si dice* linea geodetica *se per ogni* $t, t' \in \mathbb{R}$ *si ha* $d(\alpha(t), \alpha(t')) = |t - t'|$.

Notiamo che una curva è una geodetica in uno dei due sensi definiti sopra se e solo se è un immersione isometrica del dominio in $X$.

Definiamo una proprietà geometrica delle linee o dei raggi geodetici.

**Definizione 2.2.3.** *Sia* $(X, d)$ *uno spazio metrico. Due linee o raggi geodetici* $\alpha, \alpha' : I \to X$*, ove* $I$ *è il rispettivo intervallo di definizione, si dicono* asintotici *se la funzione* $t \mapsto d(\alpha(t), \alpha'(t))$ *è limitata.*

Introduciamo ora una definizione più debole, ma utile in alcune tipologie di spazi metrici, incluse le varietà riemanniane.

**Definizione 2.2.4.** *Sia* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo. Una curva* $\alpha : I \to (X, d)$ *si dice* geodetica locale *se per ogni* $t \in I$ *esiste* $\varepsilon_t > 0$ *tale che* $\forall t', t'' \in (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap I$ *si ha* $d(\alpha(t'), \alpha(t'')) = |t' - t''|$*, o, equivalentemente,* $\alpha|_{I \cap B(t, \varepsilon_t)}$ *è una geodetica.*

Il seguente lemma tecnico precisa, tra l'altro, le condizioni che impediscono ad una geodetica locale di essere una geodetica.

**Lemma 2.2.5.** Siano $(X, d)$ uno spazio metrico, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $\alpha : I \to X$ una geodetica locale, e sia $[a, b] \subseteq I$. Allora

1) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che, se $[s, s'] \subseteq [a, b]$ e $s' - s < \varepsilon$, allora $\alpha|_{[s,s']}$ è una geodetica;

2) $d(\alpha(a), \alpha(b)) \leqslant b - a$, e vale l'uguaglianza se e solo se $\alpha|_{[a,b]}$ è una geodetica.

*Dimostrazione.*

1) Consideriamo il ricoprimento aperto $\{(t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap [a, b] \,|\, t \in [a, b]\}$ di $[a, b]$, con $\varepsilon_t$ come da definizione precedente. La restrizione di $\alpha$ a qualunque intervallo chiuso contenuto in un aperto di questo ricoprimento è una geodetica. La tesi segue allora dal Lemma del numero di Lebesgue.

2) Siano $\varepsilon$ la costante trovata al punto precedente ed $n$ tale che $\dfrac{b - a}{n} < \varepsilon$. Siano $t_i = a + i\left(\dfrac{b - a}{n}\right)$, $i \in \{0, \dots, n\}$, allora $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è una geodetica per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$; in particolare $d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) = \dfrac{b - a}{n}$. Allora $d(\alpha(a), \alpha(b)) \leqslant b - a$ per la diseguaglianza triangolare.

   Per definizione, se $\alpha|_{[a,b]}$ è una geodetica, vale l'uguaglianza. Supponiamo invece non sia una geodetica, ossia che esistano $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$ tali che $d(\alpha(t'), \alpha(t'')) \neq t'' - t'$; allora, per quanto appena visto, $d(\alpha(t'), \alpha(t'')) < t'' - t'$, quindi

   $$d(\alpha(a), \alpha(b)) \leqslant d(\alpha(a), \alpha(t')) + d(\alpha(t'), \alpha(t'')) + d(\alpha(t''), \alpha(b)) < b - a.$$

□

Notiamo che le geodetiche sono naturalmente parametrizzate per lunghezza d'arco. Tuttavia, a volte può tornare utile una definizione leggermente diversa.

**Definizione 2.2.6.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una curva $\alpha : I \to (X, d)$ si dice* geodetica (ri)parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco *se $\exists \lambda > 0$ reale tale che $\forall\, t, t' \in I$ si abbia $d(\alpha(t), \alpha(t')) = \lambda |t - t'|$*

Un'analoga definizione vale per le geodetiche locali; in tal caso $\lambda$ deve essere uguale per tutta la curva.

Le geodetiche si comportano bene rispetto alle isometrie, come precisato dal seguente

**Lemma 2.2.7.** Siano $X$, $Y$ spazi metrici, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $\gamma : I \to X$ una geodetica (geodetica locale, geodetica parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco) e $f : X \to Y$ un'immersione isometrica, allora $f \circ \gamma$ è ancora una geodetica (geodetica locale, geodetica parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco con lo stesso rapporto tra lunghezza della curva e dell'intervallo di parametrizzazione).

*Dimostrazione.* Segue facilmente dalle definizioni. □

Le geodetiche permettono di definire una classe importante di spazi metrici.

**Definizione 2.2.8.** *Uno spazio metrico $X$ si dice* geodetico *se per ogni $x, y \in X$ esiste una geodetica tra $x$ e $y$, e si dice* unicamente geodetico *se tale geodetica è unica.*

Dalla definizione di spazio geodetico si deduce facilmente il seguente

**Lemma 2.2.9.** Uno spazio geodetico è un length space.

*Dimostrazione.* Una geodetica tra due punti è la curva di lunghezza esattamente uguale alla distanza tra di essi, e realizza quindi l'inf della definizione di length space. □

## 2.3 Convessità

In questa parte verrà descritta un'estensione del concetto di convessità per funzioni e sottoinsiemi agli spazi metrici geodetici. Iniziamo definendo cosa si intende per sottoinsieme o sottospazio convesso.

**Definizione 2.3.1.** *Sia $X$ uno spazio metrico geodetico. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice* convesso *se per ogni $p, q \in C$ e per ogni geodetica $[p, q]$ si ha $[p, q] \subseteq C$.*

Chiaramente, un sottoinsieme convesso di uno spazio (unicamente) geodetico è ancora (unicamente) geodetico.

Il seguente risultato è utile quando si vuole provare la convessità di un sottospazio.

**Lemma 2.3.2.** Siano $X$, $Y$ spazi metrici, $X$ geodetico, $Y$ unicamente geodetico, e sia $f : X \to Y$ un'immersione isometrica. Allora $f(X)$ è convesso.

*Dimostrazione.* Siano $p, q \in X$. Allora $f([p, q])$ è una geodetica tra $f(p)$ e $f(q)$ per il Lemma (2.2.7), è unica per ipotesi ed è contenuta in $f(X)$. □

Ne discende, in particolare, il seguente

**Corollario 2.3.3.** In uno spazio unicamente geodetico, le immagini delle geodetiche sono sottoinsiemi convessi.

*Dimostrazione.* Un intervallo di $\mathbb{R}$, su cui una geodetica è parametrizzata, è uno spazio unicamente geodetico; la geodetica tra due punti è l'intervallo chiuso che li ha come estremi. $\square$

Notiamo che il risultato del corollario non è vero in generale.
Definiamo ora la convessità per funzioni.

**Definizione 2.3.4.** *Sia $X$ uno spazio geodetico. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice* convessa *se, per ogni geodetica $\gamma : I \to X$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intevallo, $f \circ \gamma$ è una funzione convessa.*

Mostriamo infine che negli spazi geodetici continua a valere una naturale proprietà delle funzioni convesse.

**Lemma 2.3.5.** I sottolivelli di una funzione convessa $f$ definita su uno spazio geodetico $(X, d)$ sono convessi.

*Dimostrazione.* Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $p, q \in X$ appartenenti ad un sottolivello $\{f < (\leqslant) \, a\}$; definiamo inoltre $l = d(p, q)$ e sia $\gamma : [0, l] \to X$ la parametrizzazione di una geodetica $[p, q]$. Per la convessità di $f \circ \gamma$ si ha allora $f < (\leqslant) \, a$ su tutta $[p, q]$, pertanto $[p, q] \subseteq \{f < (\leqslant) \, a\}$. $\square$

## 2.4 Geometria di $\mathbb{E}^n$

Seguirà un ripasso delle proprietà geometriche di uno degli spazi metrici più noti, fin dall'antichità, e usato per confronti nei vari rami della geometria, inclusa appunto la geometria degli spazi metrici.

Lo spazio metrico $\mathbb{E}^n$ è $\mathbb{R}^n$ con la distanza euclidea

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

La funzione distanza euclidea è indotta dal prodotto scalare euclideo $\langle v; w \rangle$, $v, w \in \mathbb{E}^n$, che induce una norma che verrà indicata con $\|v\|$, $v \in \mathbb{E}^n$. Equivalentemente, si tratta del prodotto di $n$ copie di $\mathbb{R}$ con la distanza standard.

Lo spazio metrico $\mathbb{E}^n$ è completo ed unicamente geodetico, e l'unica geodetica tra due punti distinti è il segmento che li unisce. La riparametrizzazione su $[0, 1]$ proporzionalmente alla lunghezza d'arco della geodetica tra $p$ e $q$ in $\mathbb{E}^n$ è $t \mapsto p + t(q - p) = (1 - t)p + tq$. I casi di uguaglianza nella diseguaglianza triangolare $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ si hanno se e solo se i tre punti sono allineati, con $y$ tra $x$ e $z$.

Ogni isometria di $\mathbb{E}^n$ si scrive come composizione di un elemento di $O(n)$ con una traslazione, ossia addizione di un vettore costante.

## 2.5 Proprietà CAT(0)

In questa parte si parlerà in modo specifico delle diverse definizioni della condizione CAT(0), e si vedrà che queste sono equivalenti.

L'ipotesi quasi imprescindibile per questa parte è che gli spazi metrici di cui si tratta siano geodetici. Le geodetiche permettono di parlare di triangoli, la cui definizione è quella naturale.

**Definizione 2.5.1.** *Dati tre punti $p$, $q$, $r$ in uno spazio metrico geodetico, si dice* triangolo geodetico di vertici $p$, $q$, $r$ *l'unione di tre geodetiche* $[p, q]$, $[q, r]$, $[r, p]$.

Se tra due dei vertici esistono più geodetiche se ne sceglie una. La notazione estesa usata per il triangolo geodetico con quei vertici e quei lati è $\triangle([p, q], [q, r], [r, p])$. Nel caso non ci siano ambiguità, ad esempio in uno spazio unicamente geodetico, si scrive semplicemente $\triangle(p, q, r)$.

La proprietà CAT(0) deriva da un confronto di triangoli geodetici in spazi geodetici qualunque e in $\mathbb{E}^2$. Introduciamo alcune definizioni.

**Definizione 2.5.2.** *Dato un triangolo geodetico $\triangle(p_1, p_2, p_3)$ in $(X, d)$, un triangolo geodetico $\overline{\triangle}(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3})$ in $\mathbb{E}^2$ con funzione distanza $\overline{d}$, si dice* triangolo di confronto *per $\triangle(p_1, p_2, p_3)$ se per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$ si ha $d(p_i, p_j) = \overline{d}(\overline{p_i}, \overline{p_j})$.*

Si può usare semplicemente la notazione $\overline{\triangle}(p_1, p_2, p_3)$. Non è ambiguo parlare del triangolo di confronto, infatti

**Lemma 2.5.3.** Date due terne di punti $(x_1, x_2, x_3)$ e $(y_1, y_2, y_3)$ in $\mathbb{E}^2$ con funzione distanza $d$ tali che per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$ si ha $d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$, esiste un'isometria $f$ di $\mathbb{E}^2$ tale che per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$ si abbia $f(x_i) = y_i$.

*Dimostrazione.* A meno di traslazioni, $x_1 = y_1 = O$, l'origine di $\mathbb{E}^2$, perciò $\|x_2\| = \|y_2\|$ e $\|x_3\| = \|y_3\|$ per ipotesi. $O$, $x_2$, $x_3$ sono allineati se e solo se vale un'uguaglianza non banale nella diseguaglianza triangolare, e allora sono allineati anche $O$, $y_2$, $y_3$, e portando $x_2$ in $y_2$ con un elemento di $O(2)$ si porta anche $x_3$ in $y_3$. Se invece non sono allineati allora $\{x_2, x_3\}$ e $\{y_2, y_3\}$ sono basi di $\mathbb{E}^2$, e oltre alla già citata condizione sulle norme vale

$$\langle x_2; x_3 \rangle = -\frac{1}{2}\left(\|x_2 - x_3\|^2 - \|x_2\|^2 - \|x_3\|^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\|y_2 - y_3\|^2 - \|y_2\|^2 - \|y_3\|^2\right) = \langle y_2; y_3 \rangle ,$$

quindi l'unica applicazione lineare che porta $x_2$ in $y_2$ e $x_3$ in $y_3$ è un elemento di $O(2)$. □

**Definizione 2.5.4.** *Siano $[p, q]$ una geodetica in uno spazio metrico $(X, d)$ e $\overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{E}^2$ con funzione distanza $\overline{d}$ tali che $d(p, q) = \overline{d}(\overline{p}, \overline{q})$. Un punto $\overline{x}$ su $[\overline{p}, \overline{q}]$ si dice* punto di confronto *per $x \in [p, q]$ se $d(p, x) = \overline{d}(\overline{p}, \overline{x})$*

Una costruzione che nasce dal confronto tra le funzioni distanza di un dato spazio metrico e di $\mathbb{E}^n$ è quella di angolo. Per definirlo si usa il Teorema di Carnot.

**Definizione 2.5.5.** *Siano $(X, d)$ uno spazio metrico e $p, q, r \in X$ con $p \neq q, r$. Si dice* angolo di confronto *tra $q$ ed $r$ con vertice in $p$ il numero, evidentemente compreso tra $0$ e $\pi$ estremi inclusi,*

$$\angle_p(q, r) = \arccos\left(\frac{d(p, q)^2 + d(p, r)^2 - d(q, r)^2}{2d(p, q)\, d(p, r)}\right).$$

Notiamo che si tratta dell'angolo tra i due lati uscenti da $\overline{p}$ di $\overline{\triangle}(p,q,r)$.

Se $a>0$ e $\gamma,\gamma':[0,a]\to X$ sono due geodetiche uscenti da uno stesso punto $\gamma(0)=\gamma'(0)=p$, allora, dati $t,t'\in(0,a]$, la formula per l'angolo di confronto tra $\gamma(t)$ e $\gamma'(t')$ con vertice in $p$ diventa più semplicemente

$$\angle_p\left(\gamma(t),\gamma'(t')\right)=\arccos\left(\frac{t^2+t'^2-d\left(\gamma(t),\gamma(t')\right)^2}{2tt'}\right).$$

Si può ora definire l'angolo tra due geodetiche.

**Definizione 2.5.6.** *Siano $X$ uno spazio metrico, $a>0$, e $\gamma,\gamma':[0,a]\to X$ due geodetiche uscenti da uno stesso punto $\gamma(0)=\gamma'(0)=p$. L'*angolo (di Aleksandrov) tra $\gamma$ e $\gamma'$ *è*

$$\angle(\gamma,\gamma')=\limsup_{(t,t')\to(0,0)}\angle_p\left(\gamma(t),\gamma'(t')\right).$$

Chiaramente, l'angolo di Aleksandrov tra i lati di un triangolo nello spazio euclideo è uguale all'ordinario angolo euclideo tra di essi. Osserviamo inoltre che, se $a>0$ e $\alpha:[0,a]\to X$ è una geodetica, che possiamo pensare uscente da $\alpha(0)$, allora $\angle(\alpha,\alpha)=0$, mentre, se $\beta:[-a,a]\to X$ è una geodetica, allora $\beta'=\beta|_{[0,a]}$ e $\beta'':[0,a]\to X$ definita da $\beta''(t)=\beta(-t)$ per ogni $t\in[0,a]$ sono uscenti da $\beta(0)$ e $\angle(\beta',\beta'')=\pi$.

Gli angoli tra geodetiche uscenti da uno stesso punto sono subadditivi, nel senso precisato dal seguente

**Lemma 2.5.7.** Siano $(X,d)$ uno spazio metrico, $a>0$, e $\gamma,\gamma',\gamma'':[0,a]\to X$ tre geodetiche uscenti da uno stesso punto $\gamma(0)=\gamma'(0)=\gamma''(0)=p$. Allora $\angle(\gamma',\gamma'')\leqslant\angle(\gamma',\gamma)+\angle(\gamma,\gamma'')$.

*Dimostrazione.* Se per assurdo fosse $\angle(\gamma',\gamma'')>\angle(\gamma',\gamma)+\angle(\gamma,\gamma'')$, allora esiste $\delta>0$ tale che $\angle(\gamma',\gamma'')>\angle(\gamma',\gamma)+\angle(\gamma,\gamma'')+3\delta$. Per definizione di angolo, esiste $\varepsilon\in(0,a]$ tale che per ogni $t',t\in(0,\varepsilon)$ si ha $\angle_p(\gamma'(t'),\gamma(t))<\angle(\gamma',\gamma)+\delta$ e per ogni $t,t''\in(0,\varepsilon)$ similmente $\angle_p(\gamma(t),\gamma''(t''))<\angle(\gamma,\gamma'')+\delta$; inoltre esistono $t',t''\in(0,\varepsilon)$ tali che $\angle_p(\gamma'(t'),\gamma''(t''))>\angle(\gamma',\gamma'')+2\delta$. Consideriamo in $\mathbb{E}^2$ il triangolo di confronto $\overline{\triangle}(p,\gamma'(t'),\gamma''(t''))$, con $t',t''$ come appena definiti, mettendo $p$ nell'origine $O$ e chiamando per comodità $v=\overline{\gamma'(t')}$, $w=\overline{\gamma''(t'')}$. Per costruzione, esiste un punto $u$ del segmento che unisce $v$ e $w$ tale che $\angle_O(v,u)>\angle(\gamma',\gamma)+\delta$ e $\angle_O(u,w)>\angle(\gamma,\gamma'')+\delta$; inoltre, per la diseguaglianza triangolare in $\mathbb{E}^2$, $\|u\|<\varepsilon$. Da come è stato scelto $\varepsilon$ e dalla formula per l'angolo di confronto risulta che

$$d\left(\gamma'(t'),\gamma''(t'')\right)=\|v-w\|=\|v-u\|+\|u-w\|>$$

$$>d\left(\gamma'(t'),\gamma(\|u\|)\right)+d\left(\gamma(\|u\|),\gamma''(t'')\right)\geqslant d\left(\gamma'(t'),\gamma''(t'')\right),$$

assurdo. □

Il confronto, eseguito sui triangoli geodetici, tra le funzioni distanza di uno spazio metrico geodetico e di $\mathbb{E}^n$ permette di definire quando un tale spazio rispetta la condizione CAT(0).

**Definizione 2.5.8.** *Uno spazio metrico geodetico* $(X, d)$ *ha la* proprietà CAT(0) *se, per ogni terna di punti* $p, q, r \in X$ *e per ogni coppia di punti* $x, y$ *sui lati di un triangolo geodetico* $\triangle([p, q], [q, r], [r, p])$*, considerati i punti di confronto* $\overline{x}, \overline{y}$ *per* $x, y$ *sui lati corrispondenti di* $\overline{\triangle}(p, q, r)$ *in* $\mathbb{E}^2$ *con distanza* $\overline{d}$*, vale*

$$d(x, y) \leqslant \overline{d}(\overline{x}, \overline{y})$$

La definizione appena fornita permette di definire un concetto di curvatura più vasto di quello classico differenziale.

**Definizione 2.5.9.** *Uno spazio metrico si dice* localmente CAT(0)*, o* di curvatura (di Aleksandrov) non positiva *se ogni suo punto ha un intorno che è* CAT(0)*.*

È possibile fornire definizioni equivalenti della condizione CAT(0) esplorando diseguaglianze relative agli angoli di un triangolo geodetico. Tra quelle che descriveremo, una coinvolge l'angolo di confronto, una l'angolo tra geodetiche, ed una è un caso particolare della definizione generale, utile per motivi tecnici.

**Teorema 2.5.10.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico geodetico. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) $X$ è CAT(0) come nella Definizione (2.5.8);

2) Per ogni triangolo geodetico $\triangle(p, q, r)$ in $X$ e per ogni coppia di punti $x \in [p, q]$, $y \in [p, r]$ diversi da $p$ si ha $\angle_p(x, y) \leqslant \angle_p(q, r)$; chiaramente permutando i nomi a $p$, $q$, $r$ si ottiene la stessa condizione prendendo gli angoli con vertice in uno qualsiasi dei tre punti;

3) Per ogni triangolo geodetico $\triangle(p, q, r)$ in $X$ e per ogni suo vertice, l'angolo tra i lati uscenti da quel vertice è minore o uguale all'angolo tra i lati uscenti dal vertice corrispondente nel triangolo di confronto $\overline{\triangle}(p, q, r)$;

4) Per ogni triangolo geodetico in $X$ e per ogni suo vertice, la diseguaglianza CAT(0) vale per quel vertice e un punto qualsiasi sul lato opposto.

*Dimostrazione.* In tutta la dimostrazione $\overline{d}$ indicherà la funzione distanza nel piano euclideo.

Che la prima condizione implichi la seconda è ovvio dalla definizione di angolo di confronto. Per far vedere che la prima condizione vale se vale la seconda l'unica configurazione non banale di $x$, $y$ sui lati di un triangolo geodetico $\triangle(p, q, r)$ per cui verificare la diseguaglianza CAT(0) è quella per cui almeno uno tra $x$ e $y$ non è un vertice e l'altro non appartiene allo stesso lato di $x$; a meno di cambiare nomi $x \in [p, q]$, $x \neq p, q$ e $y \notin [p, q]$. A meno di invertire $p$ e $q$ possiamo supporre $y \in [p, r]$, si avrà $y \neq p$ per costruzione. Allora $\angle_{\overline{p}}(\overline{x}, \overline{y}) = \angle_{\overline{p}}(\overline{q}, \overline{r}) = \angle_p(q, r) \geqslant \angle_p(x, y)$, e la definizione di angolo di confronto implica $d(x, y) \leqslant \overline{d}(\overline{x}, \overline{y})$.

Dimostreremo ora le implicazioni 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 2), il che è sufficiente a concludere.

La diseguaglianza al 2) sugli angoli di confronto passa al $\limsup$ e implica così facilmente la diseguaglianza sugli angoli tra i lati al punto 3).

Supponiamo ora valga la condizione 3). Sia $\triangle(p, q, r)$ un triangolo geodetico in $X$ e sia $x \in [q, r]$; vogliamo mostrare la diseguaglianza CAT(0) per $p$ ed $x$.

Possiamo supporre che i lati del triangolo abbiano lunghezza positiva e che $x$ sia diverso da $q$ ed $r$, altrimenti la condizione 4) vale banalmente. Consideriamo la seguente costruzione: i triangoli di confronto $\widetilde{\triangle}(\widetilde{p},\widetilde{x},\widetilde{q})$ e $\widetilde{\triangle}(\widetilde{p},\widetilde{x},\widetilde{r})$ per $\triangle(p,x,q)$ e $\triangle(p,x,r)$ rispettivamente sono attaccati per il lato $[\widetilde{p},\widetilde{x}]$ e gli altri due vertici sono dalle parti opposte rispetto a questo lato; siano poi $\overline{\triangle}(\overline{p},\overline{q},\overline{r})$ il triangolo di confronto per $\triangle(p,q,r)$ e $\overline{x}$ il punto di confronto per $x$ in $\overline{\triangle}(\overline{p},\overline{q},\overline{r})$. Siano $l=\overline{d}(\widetilde{p},\widetilde{x})=d(p,x)$ e $L=\overline{d}(\overline{p},\overline{x})$; con queste notazioni la tesi si riscrive come $l\leqslant L$. Ovviamente, se $l=0$ vale la tesi, supporremo quindi d'ora in poi $l>0$.

Siano $\eta=\angle([\widetilde{x},\widetilde{q}],[\widetilde{x},\widetilde{p}])$ e $\theta=\angle([\widetilde{x},\widetilde{p}],[\widetilde{x},\widetilde{r}])$. Questi angoli sono ben definiti in quanto le lunghezze coinvolte nel loro calcolo, $l$ incluso, sono positive, e si ha

$$\eta+\theta\geqslant\angle([x,q],[x,p])+\angle([x,p],[x,r])\geqslant\angle([x,q],[x,r])=\pi$$

per ipotesi e per il Lemma (2.5.7). Questo implica in particolare che nel quadrilatero di vertici $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$, $\widetilde{x}$, $\widetilde{r}$ nel piano euclideo l'angolo in $\widetilde{p}$ è minore di $\pi$. Ne segue, analogamente a prima

$$\angle([p,q],[p,r])\leqslant\angle([p,q],[p,x])+\angle([p,x],[p,r])\leqslant$$

$$\leqslant\angle([\widetilde{p},\widetilde{q}],[\widetilde{p},\widetilde{x}])+\angle([\widetilde{p},\widetilde{x}],[\widetilde{p},\widetilde{r}])=\angle([\widetilde{p},\widetilde{q}],[\widetilde{p},\widetilde{r}])<\pi.$$

Dalla definizione di angolo segue che esistono punti $p_1$ e $p_2$ sufficientemente vicini a $p$ su $[p,q]$ e $[p,r]$ rispettivamente che siano distinti dagli estremi delle geodetiche cui appartengono e tali che $d(p_1,p_2)<d(p,p_1)+d(p,p_2)$. Ma allora

$$d(q,p)+d(p,r)>d(q,p_1)+d(p_1,p_2)+d(p_2,r)\geqslant d(q,r).$$

Ne segue che il triangolo $\overline{\triangle}(\overline{p},\overline{q},\overline{r})$ è non degenere e che quindi $L>0$.

Da $\eta+\theta\geqslant\pi$ segue $\cos\eta+\cos\theta\leqslant 0$. Infatti questi due angoli sono compresi tra 0 e $\pi$; non possono essere entrambi minori di $\frac{\pi}{2}$ poiché la somma è maggiore o uguale a $\pi$; se fossero entrambi maggiori o uguali a $\frac{\pi}{2}$ sarebbe banale, mentre se fossero uno maggiore o uguale e l'altro minore di $\frac{\pi}{2}$, senza perdita di generalità $\eta<\frac{\pi}{2}\leqslant\theta$, allora $\theta-\frac{\pi}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}-\eta$, il che implica la diseguaglianza sui coseni. Detti poi $\eta'=\angle([\overline{x},\overline{q}],[\overline{x},\overline{p}])$ e $\theta'=\angle([\overline{x},\overline{p}],[\overline{x},\overline{r}])$, si ha $\cos\eta'+\cos\theta'=0$, essendo $\overline{x}\in[\overline{q},\overline{r}]$.

Siano $a_1=d(p,q)=\overline{d}(\overline{p},\overline{q})=\overline{d}(\widetilde{p},\widetilde{q})$, $a_2=d(p,r)=\overline{d}(\overline{p},\overline{r})=\overline{d}(\widetilde{p},\widetilde{r})$, $b_1=d(x,q)=\overline{d}(\overline{x},\overline{q})=\overline{d}(\widetilde{x},\widetilde{q})$, $b_2=d(x,r)=\overline{d}(\overline{x},\overline{r})=\overline{d}(\widetilde{x},\widetilde{r})$, allora

$$0=\cos\eta'+\cos\theta'=\frac{{b_1}^2+L^2-{a_1}^2}{2Lb_1}+\frac{{b_2}^2+L^2-{a_2}^2}{2Lb_2},$$

$$0\geqslant\cos\eta+\cos\theta=\frac{{b_1}^2+l^2-{a_1}^2}{2lb_1}+\frac{{b_2}^2+l^2-{a_2}^2}{2lb_2},$$

ed essendo le quantità coinvolte positive per costruzione, si ha

$$0\leqslant\frac{{b_1}^2+L^2-{a_1}^2}{b_1}+\frac{{b_2}^2+L^2-{a_2}^2}{b_2}-\frac{{b_1}^2+l^2-{a_1}^2}{b_1}-\frac{{b_2}^2+l^2-{a_2}^2}{b_2}=$$

$$= \frac{(b_1 + b_2)(L + l)(L - l)}{b_1 b_2},$$

da cui segue $L - l \geqslant 0$.

Supponiamo infine valga la condizione 4) e siano $\triangle(p, q, r)$ un triangolo geodetico in $X$, $x \in [p, q]$ e $y \in [p, r]$ diversi da $p$. Considerando il triangolo di confronto $\overline{\triangle}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ si ha $d(x, r) \leqslant \overline{d}(\overline{x}, \overline{r})$, perciò

$$\angle_p(x, r) \leqslant \angle_{\overline{p}}(\overline{x}, \overline{r}) = \angle_{\overline{p}}(\overline{q}, \overline{r}) = \angle_p(q, r);$$

mentre considerando il triangolo di confronto $\widetilde{\triangle}(\widetilde{p}, \widetilde{r}, \widetilde{x})$ per $\triangle(p, r, x)$ si ha $d(y, x) \leqslant \overline{d}(\widetilde{y}, \widetilde{x})$, quindi

$$\angle_p(y, x) \leqslant \angle_{\widetilde{p}}(\widetilde{y}, \widetilde{x}) = \angle_{\widetilde{p}}(\widetilde{r}, \widetilde{x}) = \angle_p(r, x),$$

dunque $\angle_p(x, y) \leqslant \angle_p(q, r)$. $\square$

## 2.6 Generalità sulle varietà Riemanniane

In questa parte verranno richiamate, senza dimostrazione, le definizioni di base di geometria Riemanniana, soprattutto per fissare le convenzioni di notazione, sulle quali non c'è accordo unanime tra i matematici. Io mi rifarò soprattutto a quelle usate in [GHL04].

Una *varietà riemanniana* verrà indicata con una coppia $(M, g)$, ove $M$, o lettere latine maiuscole analoghe, è una varietà reale liscia, e $g$, o lettere latine minuscole vicine, è la metrica. Tutte le varietà verranno supposte connesse. Punti della varietà verranno indicati con lettere latine minuscole come $p$, $q$, ecc. Lo spazio tangente in un punto $p$ verrà indicato con $T_pM$, il fibrato tangente con $TM$, analogamente $T_p^*M$ e $T^*M$ indicheranno lo spazio cotangente in un punto e il fibrato cotangente. I campi tangenti alla varietà verranno indicati con lettere latine maiuscole di fine alfabeto, come la $Y$.

La restrizione $g|_{T_pM \times T_pM}$ della metrica allo spazio tangente in $p \in M$ è un prodotto scalare definiro positivo, e verrà indicato più semplicemente con $g|_p$. Dati $p \in M$ e $v \in T_pM$ si userà la notazione $\|v\|_p$ per indicare $\sqrt{g|_p(v, v)}$, la norma indotta da questo prodotto scalare.

Il modo canonico per derivare un campo rispetto ad un altro su una varietà riemanniana è la *connessione di Levi-Civita*; la derivata di un campo $Z$ rispetto ad un campo $Y$ rispetto a questa connessione si indicherà con $\nabla_Y Z$.

La connessione di Levi-Civita ha un'estensione al caso in cui il secondo argomento sia un qualunque tensore, e restituisce un tensore dello stesso tipo. Inoltre, fissato il secondo argomento $T$, la connessione agisce come un tensore sul primo, questo tensore si indica con $\nabla T$. Allora, se $Y$, $Z$, $W$ sono campi su un aperto della varietà, il seguente

$$\nabla^2_{Z,Y} W - \nabla^2_{Y,Z} W \underset{\text{def}}{=} \nabla_Z (\nabla W)(Y) - \nabla_Y (\nabla W)(Z) =$$

$$= \nabla_Z (\nabla_Y W) - \nabla_Y (\nabla_Z W) + \nabla_{[Y,Z]} W = R(Y, Z) W$$

restituisce un campo, ed è un tensore di tipo $(1, 3)$, detto operatore di Riemann.

Fissati $p \in (M, g)$, un 2-piano $\pi \subseteq T_pM$ e $v, w \in T_pM$ tali che span $\{v, w\} = \pi$, si definisce la curvatura sezionale di $\pi \subseteq T_pM$ come

$$Sec\,(p, \pi) = \frac{g|_p\,(R\,(v, w)\,v, w)}{\|v\|_p{}^2 \|w\|_p{}^2 - g|_p\,(v, w)^2}$$

Grazie alle simmetrie dell'operatore di Riemann e alla natura tensoriale delle applicazioni coinvolte, l'espressione è ben definita e dipende solamente dal punto e dal 2-piano considerato. La curvatura isola una classe importante di varietà Riemanniane.

**Definizione 2.6.1.** *Una varietà riemanniana* $(M, g)$ *si dice* di curvatura non positiva *se* $\forall\, p \in M$ *e* $\forall\, \pi \subseteq T_pM$ *si ha* $Sec\,(p, \pi) \leqslant 0$.

Sia $I$ un intervallo e $\alpha : I \to M$ una curva liscia. Un *campo lungo* $\alpha$ è una funzione liscia $Y : I \to TM$ tale che per ogni $t \in I$ si abbia $Y\,(t) \in T_{\alpha(t)}M$. La connessione di Levi-Civita definisce un modo canonico per derivare un campo lungo la curva rispetto alla curva, ottenendo ancora un campo lungo la curva, che si indica con $\dfrac{D}{dt}Y\,(t)$.

Una curva $t \mapsto \alpha\,(t)$ definisce il vettore ad essa tangente $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt} = d\alpha\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$, il quale è un campo lungo la curva. Una curva $\gamma$ si dice *geodetica* (riemanniana) se $\dfrac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$. Se $\gamma$ è una geodetica, $\|\dot{\gamma}\,(t)\|_{\gamma(t)}$ risulta essere costante in $t$.

Per ogni $p \in M$ indicheremo con $0_p$ l'origine di $T_pM$. Le geodetiche permettono di definire l'applicazione esponenziale exp da un intorno aperto di $0_p$ in $TM$ a valori in $M$; $\exp\,(v_p)$ con $v_p \in T_pM$ è $\gamma_{v_p}\,(1)$, ove $\gamma_{v_p}$ è l'unica geodetica definita su $[0, 1]$ tale che $\gamma_{v_p}\,(0) = p$ e $\dot{\gamma}_{v_p}\,(0) = v_p$. Detta $\pi$ la proiezione dal fibrato tangente sulla varietà, si ha che $d\,(\pi, \exp)|_{0_p} : T_{0_p}\,(TM) \cong (T_pM)^2 \to (T_pM)^2$ agisce come $(u, w) \mapsto (u, u + w)$, con $u, w \in T_pM$. Ne segue che per ogni $p \in M$ la coppia $(\pi, \exp)$ è un diffeomorfismo tra un intorno di $0_p$ in $TM$ e la sua immagine, un intorno di $(p, p)$ in $M^2$, e che la restrizione $\exp_p$ dell'applicazione esponenziale ad un intorno di $0_p \in T_pM$ è un diffeomorfismo con l'immagine, un intorno di $p$ in $M$, tale che $d\exp_p|_{0_p} : T\,(T_pM) \cong T_pM \to T_pM$ è l'applicazione identità.

## 2.7 Varietà Riemanniane come spazi metrici

In questa sezione useremo il tensore metrico di una varietà riemanniana per dotarla di una struttura di spazio metrico, e vedremo che questo spazio possiede buone proprietà, soprattutto per quanto riguarda le geodetiche. Si chiarirà inoltre il legame tra la definizione di geodetica riemanniana e quella di geodetica metrica.

Negli spazi metrici la lunghezza di una curva viene definita attraverso la metrica. Nelle varietà riemanniane si fa il contrario: si definisce, usando il tensore metrico, la lunghezza di una certa classe di curve, e mediante le lunghezze si definisce la funzione distanza.

Siano allora $M$ una varietà riemanniana e $\alpha : [a, b] \to M$ una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti, ossia per cui esista una partizione $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ di $[a, b]$ tale che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ la curva $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sia di classe $\mathcal{C}^1$; in particolare, $\dot{\alpha}$ è ben definito tranne al più nei punti della partizione. Si ha allora la seguente

**Definizione 2.7.1.** *Siano $M$ una varietà riemanniana e $\alpha : [a, b] \to M$ una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti. La* lunghezza (riemanniana) *di $\alpha$ è*

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)} \, dt$$

Grazie alle ipotesi la lunghezza è ben definita, finita e non negativa, ed è nulla se e solo se $\alpha$ è la curva costante; inoltre la lunghezza è invariante per riparametrizzazione. Definiamo $d : M^2 \to [0, +\infty)$ per una coppia di punti $p, q \in M$ come

$$d(p, q) = \inf_{\alpha} \ell(\alpha),$$

ove l'inf è esteso a tutte le curve $\mathcal{C}^1$ con estremi $p$ e $q$. Si ha il seguente

**Lemma 2.7.2.** La $d$ appena definita è una funzione distanza su $M$.

*Dimostrazione.* $d(p, p) = 0$ segue immediatamente considerando la curva costante, la simmetria si ottiene invertendo tutte le curve da $p$ a $q$, il che non altera la lunghezza, e la diseguaglianza triangolare segue dalla considerazione che, se $\alpha$ è una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti tra $p$ e $q$ e $\beta$ è una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti tra $q$ ed $r$, allora la loro giunzione è una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti tra $p$ ed $r$, e la lunghezza della giunzione è la somma delle lunghezze di $\alpha$ e $\beta$; si conclude con le proprietà dell'inf.

Manca da dimostrare che su due punti distinti la $d$ è strettamente positiva. Ricordiamo che, se $p \in M$, allora $\exp_p$ è un diffeomorfismo tra un intorno di $0_p$ in $T_pM$ e un intorno di $p$ in $M$. In particolare, essendo $T_pM$ dotato della norma indotta di $g|_p$, possiamo pensare che l'intorno in partenza sia una palla aperta di raggio $r_p$ centrata in $0_p$.

Prendiamo ora $v \in T_pM$, e definiamo $\gamma_v : [0, 1] \to M$ come l'unica geodetica tale che $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Poiché $\|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}$ è costante in $t$ si ha che $\ell(\gamma) = \|v\|_p$, quindi $d\left(p, \exp_p(v)\right) \leqslant \|v\|_p$. In realtà si può dimostrare [GHL04, Theorem 2.92] che se $\|v\|_p < r_p$, allora vale l'uguaglianza. Questo prova la stretta positività di $d(p, q)$ con $q \in \exp_p(B(0_p, r_p) \setminus \{0_p\})$. Supponiamo ora che $q$ non sia in questo aperto, e sia $\alpha : [a, b] \to M$ una qualunque curva $\mathcal{C}^1$ a tratti tra $p$ e $q$. Allora per la connessione esiste $\bar{t} \in [a, b]$ tale che $\left\|\exp_p^{-1}(\alpha(\bar{t}))\right\|_p = \frac{r_p}{2}$, ed essendo $\alpha|_{[a,\bar{t}]}$ una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti tra $p$ e $\alpha(\bar{t})$ si ha

$$\ell(\alpha) \geqslant \ell\left(\alpha|_{[a,\bar{t}]}\right) \geqslant d(p, \alpha(\bar{t})) = \frac{r_p}{2},$$

perciò $d(p, q) \geqslant \frac{r_p}{2}$. □

Una funzione distanza induce una topologia, e vale il seguente risultato.

**Lemma 2.7.3.** La topologia indotta dalla distanza introdotta sulla varietà riemanniana $(M, g)$ è la topologia di varietà di $M$.

*Dimostrazione.* Da una parte, una palla aperta centrata in $p \in M$ di raggio sufficientemente piccolo è immagine mediante il diffeomorfismo exp di una palla aperta dello stesso raggio centrata nell'origine di $T_pM$. La topologia su $T_pM$ è quella standard per uno spazio vettoriale reale di dimensione finita essendo tutte le norme su un tale spazio equivalenti, pertanto la palla iniziale è aperta nella topologia di varietà.

Dall'altra, preso $p \in U$ aperto nella topologia di varietà, esiste un intorno di $p$ contenuto in $U$ e diffeomorfo mediante $\exp^{-1}$ ad un intorno aperto dell'origine in $T_pM$, che contiene una palla di raggio $r$ centrata nell'origine. Allora $\exp\left(B\left(0_p, r\right)\right) \subseteq U$ è un intorno di $p$ nella topologia di varietà, essendo exp un diffeomorfismo in un intorno di $0_p \in T_pM$, ma allora $U$ è aperto nella topologia metrica. □

La seguente è una costruzione classica nella teoria delle varietà riemanniane.

**Definizione 2.7.4.** *Siano $(M, g)$ una varietà riemanniana di dimensione $n$, $p \in M$, $r_p > 0$ tale che $\exp_p$ sia un diffeomorfismo tra $B\left(0_p, r_p\right) \subseteq T_pM$ e la sua immagine, che per il lemma precedente sappiamo essere $B\left(p, r_p\right)$. Sia poi $\xi : T_pM \to \mathbb{E}^n$ un'isometria lineare. La mappa locale $\psi_p = \xi \circ exp_p^{-1} : U \to \mathbb{E}^n$ è detta* mappa normale centrata in $p$.

La mappa normale attorno a $p$ è tale che $d\left(p, \psi_p^{-1}(v)\right) = \|v\|$ per costruzione, inoltre nelle coordinate locali indotte, dette *coordinate normali*, il tensore metrico rispetta $\left(g|_q\right)_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}\left(d(p,q)^2\right)$ [GHL04, Corollary 2.89 bis].

Il seguente è un risultato di coerenza di definizioni.

**Lemma 2.7.5.** Sia $(M, g)$ una varietà riemanniana e sia $\alpha : [a, b] \to M$ una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti. Allora la lunghezza riemanniana e la lunghezza metrica di tale curva sono uguali.

*Dimostrazione.* Innanzitutto, per l'additività dell'integrale e per il Lemma 2.1.3 possiamo supporre che $\alpha$ sia $\mathcal{C}^1$ riducendoci a sommare le lunghezze dei suoi singoli tratti per cui lo è.

Sia $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ una partizione di $[a, b]$. Poiché per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ il tratto $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti tra $\alpha(t_{i-1})$ e $\alpha(t_i)$, la lunghezza riemanniana di questo tratto è maggiore o uguale a $d\left(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)\right)$, pertanto la lunghezza metrica della curva associata a tale partizione è minore o uguale alla sua lunghezza riemanniana; passando al sup sulle partizioni la lunghezza metrica di $\alpha$ risulta essere minore o uguale alla sua lunghezza riemanniana.

Definiamo ora $l : [a, b] \to \mathbb{R}$ come la funzione che a $t$ associa la lunghezza metrica di $\alpha|_{[a,t]}$. Affermo che $l$ è derivabile e che $l'(t) = \|\dot\alpha(t)\|_{\alpha(t)}$; integrando segue l'uguaglianza tra la lunghezza metrica e la lunghezza riemanniana di $\alpha$.

Per il Lemma 2.1.3 si ha che, dati $t \in [a, b)$ e $h \leqslant b - t$ positivo, $l(t+h) - l(t)$ è la lunghezza metrica di $\alpha|_{[t,t+h]}$, pertanto

$$l(t+h) - l(t) \leqslant \int_t^{t+h} \|\dot\alpha(\tau)\|_{\alpha(\tau)} \, d\tau$$

per dimostrazione precedente. Inoltre $l(t+h) - l(t) \geqslant d\left(\alpha(t), \alpha(t+h)\right)$ per l'osservazione alla Definizione 2.1.2.

Sia $\psi$ la mappa normale centrata in $\alpha(t)$, e supponiamo $h$ sia sufficientemente piccolo da far sì che $\alpha(t+h)$ sia incluso nel suo dominio. Detto $v = d\psi|_{\alpha(t)}\left(\dot\alpha(t)\right)$, si ha che $\psi \circ \alpha(t+h) = vh + o(h)$. D'altra parte,

$$d\left(\alpha(t), \alpha(t+h)\right) = \|\psi \circ \alpha(t+h)\|$$

e $\|v\| = \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)}$ per le proprietà della mappa normale, perciò

$$\left\| \frac{vh + o(h)}{h} \right\| = \frac{d(\alpha(t), \alpha(t+h))}{h} \leqslant \frac{l(t+h) - l(t)}{h} \leqslant \frac{\int_t^{t+h} \|\dot{\alpha}(\tau)\|_{\alpha(\tau)} d\tau}{h}.$$

Passando al limite per $h \to 0$ la derivata destra di $l$ in $t$ risulta essere $\|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)}$; ripetendo l'analogo ragionamento per gli $h$ negativi tale conclusione vale anche per la derivata sinistra, nei punti in cui è definita. □

Quanto appena visto permette di parlare semplicemente di "lunghezza" per curve sufficientemente regolari su una varietà riemanniana intesa come spazio metrico. Una conseguenza è il seguente

**Corollario 2.7.6.** Una varietà riemanniana è un length space.

*Dimostrazione.* In un qualunque spazio metrico, la distanza tra due punti è minore o uguale alla lunghezza di una curva che li connette, e pertanto anche dell'estremo inferiore di queste lunghezze. D'altra parte, la distanza tra due punti punti sulla varietà è definita proprio come l'inf delle lunghezze riemanniane delle curve $\mathcal{C}^1$ a tratti che li connettono, ma la lunghezza riemanniana di tali curve è uguale alla loro lunghezza metrica. Aggiungendo anche le lunghezze metriche delle curve continue, l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che connettono i due punti risulta minore o uguale alla distanza tra gli estremi, il che fornisce la diseguaglianza opposta. □

Continuiamo enunciando una proprietà intuitiva delle lunghezze.

**Lemma 2.7.7.** Siano $(M, g)$ una varietà riemanniana, $I \in \mathbb{R}$ un intervallo e $\alpha : I \to M$ una curva $\mathcal{C}^1$. Essa è parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco se e solo se $\|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)}$ è costantemente uguale a una costante reale $\lambda \geqslant 0$; inoltre in tal caso $\lambda$ è proprio il rapporto tra la lunghezza di un tratto di $\alpha$ e quella dell'intervallo di parametrizzazione di quel tratto.

*Dimostrazione.* Segue facilmente dalla definizione di lunghezza e dalla continuità di $\|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)}$. □

Ne deriva immediatamente il seguente

**Corollario 2.7.8.** Una geodetica riemanniana $\gamma$ è parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco, con il rapporto tra la lunghezza di un suo tratto e del relativo intervallo di parametrizzazione pari alla norma di $\dot{\gamma}$ in un qualunque suo punto.

Il seguente lemma chiarirà il legame esistente tra la definizione di geodetica negli spazi metrici e quello nelle varietà riemanniane.

**Lemma 2.7.9.** Sia $M$ una varietà riemanniana. Ogni $p \in M$ ha un intorno $U$ unicamente geodetico, sia in senso metrico come da Definizione 2.2.8, sia in senso riemanniano, ossia per ogni coppia di punti in $U$ esiste un'unica geodetica riemanniana interamente contenuta in $U$ che li ha come estremi. Le geodetiche metriche interamente contenute in $U$ sono geodetiche riemanniane, e viceversa le geodetiche riemanniane interamente contenute in $U$ sono anche geodetiche metriche.

*Dimostrazione.* Diamo un abbozzo di dimostrazione seguendo quella di [GHL04, Theorem 2.92]. Si ha che la mappa $(\pi, \exp)$, ove $\pi$ è la proiezione sulla varietà, è un diffeomorfismo tra un intorno di $0_p$ in $TM$ e un intorno di $(p, p)$ in $M^2$. L'intorno di partenza può essere scelto in modo che per ogni $v \in T_q M$ che vi appartiene, con $q \in M$, la curva $\gamma_v : [0, 1]$ con $\gamma(0) = q$ e $\dot{\gamma}(0) = v$ sia l'unica curva di lunghezza minima tra $v$ ed $\exp_q(v)$ e sia una geodetica metrica parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco tra gli estremi. L'intorno di arrivo può essere scelto della forma $U \times U$, con $U$ intorno di $p$ in $M$.

Ne segue che per ogni coppia $r, s$ di punti di $U$ esiste un unico $v_s \in T_r M$ che sia contenuto nell'intorno di partenza e tale che $\gamma_{v_s}$, definita come sopra, sia l'unica geodetica riemanniana e l'unica geodetica metrica tra $r$ ed $s$. Inoltre, qualunque geodetica riemanniana interamente contenuta in $U$ si può rappresentare in un suo tratto tra due punti di $U$ in questo modo, ed è pertanto una geodetica metrica in quel tratto, e quindi lo è tutta.

D'altra parte, l'immagine di una geodetica metrica contenuta in $U$ tra due suoi punti coincide con quella dell'unica geodetica riemanniana che li congiunge, ma essendo entrambe parametrizzate proporzionalmente alla lunghezza d'arco coincidono anche come funzioni, a meno di affinità di $\mathbb{R}$. Quindi una tale geodetica metrica è una geodetica riemanniana, in quanto la proprietà di essere una geodetica riemanniana è differenziale, perciò locale. $\square$

Ne deriva una caratterizzazione completa delle geodetiche in una varietà riemanniana intesa come spazio metrico, che chiarisce infine il rapporto tra le due definizioni

**Corollario 2.7.10.** Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $\gamma : I \to M$ una curva continua non costante. Essa è una geodetica riemanniana se e solo se è una geodetica locale parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco dal punto di vista metrico.

*Dimostrazione.* Indichiamo con $d$ la distanza introdotta su $M$. Supponiamo $\gamma$ sia una geodetica in senso riemanniano, e sia $\lambda > 0$ la norma di $\dot{\gamma}$ in un suo qualunque punto. Fissato $t \in I$, sia $U$ un intorno unicamente geodetico di $\gamma(t)$. Per continuità, esiste $\varepsilon_t$ tale che $\gamma((t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap I) \subseteq U$. Allora, se $t' < t'' \in (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap I$ si ha $\gamma(t'), \gamma(t'') \in U$, perciò esiste un'unica geodetica metrica tra $\gamma(t')$ e $\gamma(t'')$, la cui immagine per il lemma precedente deve coincidere con $\gamma|_{[t', t'']}$. La lunghezza di questo tratto è $\lambda(t'' - t')$; poichè in esso l'immagine di $\gamma$ coincide con una geodetica metrica, necessariamente $d(\gamma(t'), \gamma(t'')) = \lambda(t'' - t')$. Ciò vale per ogni scelta di $t'$ e $t''$ siffatti, quindi $\gamma$ è una geodetica locale parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco in senso metrico.

Supponiamo ora $\gamma$ sia una geodetica locale in senso metrico parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco, e sia $\lambda$ la costante reale positiva tale che per ogni $t_1, t_2$ per cui $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ è una geodetica si abbia $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \lambda|t_1 - t_2|$, e fissiamo $t$ interno ad $I$. Sia $U$ un intorno unicamente geodetico di $\gamma(t)$, e sia $\varepsilon > 0$ tale che $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq I$ e $\gamma(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq U$. Per il lemma precedente, $\gamma|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)}$ è una geodetica riemanniana. Nel caso $t$ non sia interno ad $I$ si ripete lo stesso ragionamento su un suo intorno destro o sinistro. Poichè la proprietà di essere una geodetica riemanniana è locale, $\gamma$ è una geodetica riemanniana. $\square$

Rimane da indagare il legame tra la curvatura sezionale di una varietà riemanniana e il fatto che essa, intesa come spazio metrico, rispetti la condizione CAT(0), almeno localmente. Iniziamo con alcune definizioni.

**Definizione 2.7.11.** *Siano $(M, g)$ una varietà riemanniana, $p \in M$, $v, w \in T_pM$ diversi dall'origine. L'*angolo riemanniano *tra $v$ e $w$ è dato da*

$$\arccos\left(\frac{g|_p\,(v, w)}{\|v\|_p\,\|w\|_p}\right)$$

*Se $a > 0$ e $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \to M$ sono due geodetiche non costanti tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, allora l'angolo riemanniano tra $\gamma_1$ e $\gamma_2$ è l'angolo riemanniano tra $\dot{\gamma_1}(0)$ e $\dot{\gamma_2}(0)$.*

Il Lemma seguente è un ulteriore risultato di coerenza tra le definizioni di angolo, dopo quello, immediato dalla definizione, tra l'angolo di Aleksandrov e quello euclideo.

**Lemma 2.7.12.** Siano $(M, g)$ una varietà riemanniana di dimensione $n$, $d$ la distanza indotta dalla metrica, $p \in M$ e $\gamma_1, \gamma_2$ due geodetiche non costanti uscenti da $p$. Allora l'angolo riemanniano e l'angolo di Aleksandrov tra esse sono uguali.

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa normale $\psi$ centrata in $p$, e siano $u$, $v$ i tangenti a $\gamma_1$, $\gamma_2$ rispettivamente in $p$. Allora $\gamma_1(t) = \exp_p(tu)$ e $\gamma_1(t') = \exp_p(t'v)$. A patto di prendere $t$, $t'$ minori di $\varepsilon$ sufficientemente piccolo, possiamo supporre che $\gamma_1(t)$ e $\gamma_1(t')$ si trovino in un intorno $U$ di $p$ su cui è definita la mappa normale e tale che la coppia $(\pi, \exp)$ è un diffeomorfismo tra un intorno di $0_p$ in $TM$ e $U^2$, ove $\pi$ è la proiezione sulla varietà. Identifichiamo l'aperto di partenza di $TM$ con $U \times V$, ove $V \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto contenente l'origine, in modo che $\{q\} \times V$ sia isomorfo a un intorno di $0_q \in T_qM$ al variare di $q \in U$. Ricordando l'espressione di $d(\pi, \exp)|_{0_p}$ si ha $(\pi, \exp)^{-1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) = \left(\gamma(t), vt' - ut + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$. Usando la definizione di geodetica e l'espressione per $g$ nella mappa normale si ha

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t'))^2 = \left\|\exp_{\gamma_1(t)}{}^{-1}(\gamma_2(t'))\right\|^2_{\gamma_1(t)} =$$

$$= t^2\|u\|_p^2 + t'^2\|v\|_p^2 - 2tt'\ g|_p\,(u, v) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\,.$$

Ma allora, essendo $t, t' < \varepsilon$,

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \angle_p(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) =$$

$$= \arccos\left(\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{t^2\|u\|_p^2 + t'^2\|v\|_p^2 - d(\gamma(t), \gamma(t'))^2}{2tt'\ \|u\|_p\,\|v\|_p}\right) = \arccos\left(\frac{g|_p\,(u, v)}{\|u\|_p\,\|v\|_p}\right),$$

e l'ultima espressione è esattamente l'angolo riemanniano tra $\gamma_1$ e $\gamma_2$. □

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il legame tra la curvatura non positiva in senso differenziale e nel senso di Aleksandrov. Prima di passare alla dimostrazione osserviamo che è possibile definire spazi CAT($\kappa$) per qualunque costante reale $\kappa$. Il confronto in questo caso si esegue non con $\mathbb{E}^2$ ma con lo spazio modello di dimensione 2 e curvatura $\kappa$, ossia l'unica varietà completa, semplicemente connessa, di dimensione 2 e curvatura costantemente $\kappa$. In questo modo per una varietà riemanniana il fatto di avere tutte le curvature sezionali maggiorate da $\kappa$ è equivalente al suo essere localmente CAT($\kappa$). Qui lo enunceremo e lo dimostreremo solo nel caso $\kappa = 0$.

**Teorema 2.7.13.** Sia $(M, g)$ una varietà riemanniana, e consideriamo $(M, d)$ come spazio metrico, ove $d$ è definita nel modo standard. Allora $(M, d)$ è uno spazio metrico localmente CAT(0) se e solo se per ogni $p \in M$ e per ogni 2-piano $\pi \subset T_pM$ si ha $Sec\,(p, \pi) \leqslant 0$.

*Dimostrazione.* Supponiamo valga la condizione sulle curvature sezionali, fissiamo $p \in M$ e consideriamo un intorno $U$ di $p$ per il quale $(\pi, \exp)$ è un diffeomorfismo tra un intorno di $0_p$ in $TM$ e $U^2$. Per un tale intorno le geodetiche metriche tra due suoi punti sono geodetiche riemanniane interamente contenute nell'intorno; sia quindi $\triangle\,(q, r, s)$ un triangolo geodetico contenuto in $U$. Possiamo supporre che tutti i lati abbiano lunghezza positiva, altrimenti la condizione CAT(0) è verificata facilmente essendo $U$ unicamente geodetico.

Per la scelta di $U$, la funzione $\exp_q^{-1}$ è definita su tutto $U$ ed è un diffeomorfismo. L'immagine di $[q, r]$ mediante $\exp_q^{-1}$ nel tangente è la curva $\gamma_r : [0, 1] \to T_qM$ tale che $t \mapsto tu$ con $u = \dot{\gamma_r}\,(0)$; analogamente $\exp_q^{-1}\,([q, s]) = \gamma_s : [0, 1] \to T_qM$ tale che $t \mapsto tv$ con $v = \dot{\gamma_s}\,(0)$. Sia poi $\gamma = \exp_q^{-1}\,([r, s])$. La lunghezza di $\gamma$ è maggiore o uguale alla distanza tra i suoi estremi nel tangente, che è $\|u - v\|_p$; è quindi sufficiente dimostrare che $d\,(r, s) = \ell\,([r, s]) \geqslant \ell\,(\gamma) \geqslant \|u - v\|_p$ per ottenere che nel triangolo di confronto $\overline{\triangle}\,(q, r, s)$ l'angolo tra i lati uscenti da $q$ è maggiore dell'angolo riemanniano tra $u$ e $v$, che però è uguale all'angolo tra $\gamma_r$ e $\gamma_s$; ripetendo il ragionamento si conclude che vale per $U$ la condizione CAT(0) come nel punto 3) del Teorema 2.5.10.

Per dimostrare il risultato citato si sfrutta la seguente costruzione classica. Sia $\alpha : [0, a] \to M$ una geodetica non costante, allora $\alpha\,(t) = \exp_{\alpha(0)} tw$, con $w = \dot{\alpha}\,(0)$. Un campo $Y : [0, a] \to TM$ lungo $\alpha$ che rispetta l'equazione differenziale $\frac{D^2}{dt^2} Y\,(t) + g|_{\alpha(t)}\,(R\,(\dot{\alpha}\,(t)\,, Y\,(t))\,\dot{\alpha}\,(t)\,, Y\,(t)) = 0$ si dice *campo di Jacobi.* Useremo anche la notazione con l'apice per la derivata lungo la curva. Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria di secondo grado, il valore di un campo di Jacobi è completamente determinato dal suo valore e dal valore della sua derivata in 0. Si ha che, se $Y$ è un campo di Jacobi lungo $\alpha$ e valgono le condizioni iniziali $Y\,(0) = 0$ e $Y'\,(0) = z \in T_{\alpha(0)}M$, allora $Y\,(t) = d\exp_{\alpha(0)}\Big|_{tw}\,(tz)$ [GHL04, Corollary 3.46].

Affermo che, se la curvatura sezionale è non positiva e $Y$ è un campo di Jacobi lungo $\alpha$ tale che $Y\,(0) = 0$, allora $\|Y\,(t)\|_{\alpha(t)} \geqslant t\,\|Y'\,(0)\|_{\alpha(0)}$. Vale sempre l'uguale nel caso $\|Y'\,(0)\|_{\alpha(0)} = 0$ perché allora il campo di Jacobi è quello costantemente nullo, supponiamo quindi di non trovarci in questo caso. Chiamiamo $f\,(t) = \|Y\,(t)\|_{\alpha(t)}$. Innanzitutto $f'\,(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\,(t)}{t} = \|Y'\,(0)\|_{\alpha(0)}$ sviluppando $Y$ al prim'ordine in un intorno di 0; in particolare $f$ si annulla solo in 0 in un intorno di 0. È sufficiente perciò mostrare che $f''\,(t) \geqslant 0$. Si ha precisamente

$$f''(t) = \frac{\|Y(t)\|^2_{\alpha(t)} \|Y'(t)\|^2_{\alpha(t)} - g|_{\alpha(t)}(Y(t), Y'(t))^2}{\|Y(t)\|^3_{\alpha(t)}} + \frac{g|_{\alpha(t)}(Y''(t), Y(t))}{\|Y(t)\|_{\alpha(t)}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{g|_{\alpha(t)}(R(\dot{\alpha}(t), Y(t))\dot{\alpha}(t), Y(t))}{\|Y(t)\|_{\alpha(t)}} \geqslant 0$$

per Cauchy-Schwartz e per le ipotesi sulla curvatura. Notiamo che l'espressione ha senso; sia infatti per assurdo $t_0 = \inf \left\{ t \in (0,a] \mid \|Y(t)\|_{\alpha(t)} \right\}$; si ha $t_0 > 0$ per quanto detto prima. Ma allora $\lim\limits_{t \to t_0^-} \|Y(t)\|_{\alpha(t)} \geqslant t \|Y'(t)\|_{\alpha(0)} > 0$ perché prima di $t_0$ ho una stima valida sul modulo di $Y$, assurdo.

Stabilito ciò, possiamo descrivere il comportamento del differenziale dell'applicazione esponenziale. Consideriamo $x \in M$ e fissiamo $w \in T_xM$, prendiamo poi $s \in (0, +\infty)$ tale che $\exp_x(sw)$ sia definito. Possiamo identificare $T_{sw}(T_xM)$ con $T_xM$ trattandosi di spazi vettoriali. Allora per le proprietà delle geodetiche $\| d\exp_x|_{sw}(w)\|_{\exp_x(sw)} = \|w\|_x$, mentre in curvatura non positiva $\| d\exp_x|_{sw}(z)\|_{\exp_x(sw)} \geqslant \|z\|_x$. Consideriamo infatti il campo di Jacobi $Y_z$ tale che $Y_z(0) = 0$ e $Y_z'(0) = z$. Allora

$$\| d\exp_x|_{sw}(z)\|_{\exp_x(sw)} = \frac{\|Y_z(s)\|_{\exp_x(sw)}}{s} \geqslant \|z\|_x$$

per quanto appena visto. Inoltre, se per un $y \in T_xM$ si ha $g|_x(y, w) = 0$, allora $g|_{\exp_x(sw)}(d\exp_x|_{sw}(w), d\exp_x|_{sw}(y)) = 0$ [GHL04, Gauss Lemma, 2.93].

Torniamo a $\gamma = \exp_q^{-1}([r,s])$. Supponiamo per comodità che $[r,s]$, e quindi $\gamma$, siano parametrizzate su $[a,b]$. Ricordiamo che $\exp_q$ è un diffeomorfismo nell'intorno trattato. Indicheremo con due barrette parallele in basso la componente radiale di un vettore nel tangente e con $\perp$ la componente ad essa ortogonale. Allora

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_q \, dt = \int_a^b \sqrt{\left\|\dot{\gamma}(t)_{//}\right\|_q^2 + \|\dot{\gamma}(t)_\perp\|_q^2} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \sqrt{\left\| d\exp_q|_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}(t)_{//}\right)\right\|^2_{\exp_q(\gamma(t))} + \left\| d\exp_q|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)_\perp)\right\|^2_{\exp_q(\gamma(t))}} \, dt =$$

$$= \ell([r,s]) = d(r,s)$$

per le proprietà del differenziale. Mettendo insieme tutto quanto è stato visto, si conclude la dimostrazione.

Supponiamo viceversa per assurdo che esista $p \in M$ e un 2-piano $\pi \subseteq T_pM$ tali che $Sec(p,\pi) = \kappa > 0$, e prendiamo $\psi$ la mappa normale centrata in $p$. Consideriamo $u$, $v$ una base ortonormale di $\pi$. Espandendo l'operatore di Riemann in coordinate nel punto $p$ e usando il fatto che con la mappa normale le derivate prime di $g$ in $p$ sono nulle si ha, per le derivate seconde delle componenti di $g$ in $p$

$$2\kappa = 2\, g|_p(R(v,w)v, w) = 2\partial^2_{vw} g_{vw} - \partial^2_{vv} g_{ww} - \partial^2_{ww} g_{vv}.$$

Dall'equazione delle geodetiche derivano

$$\partial^2_{vv} g_{vv} = \partial^2_{ww} g_{ww} = 0;$$

$$\left(\partial^2_{vv}+2\partial^2_{vw}+\partial^2_{ww}\right)\left(g_{vv}+2g_{vw}+g_{ww}\right)=0;$$
$$\left(\partial^2_{vv}-2\partial^2_{vw}+\partial^2_{ww}\right)\left(g_{vv}-2g_{vw}+g_{ww}\right)=0.$$

Dal fatto che il differenziale dell'esponenziale preserva l'ortogonalità di due vettori di cui uno radiale si ricava infine

$$\partial^2_{vv}g_{vw}=\partial^2_{ww}g_{vw}=0;$$

$$\left(\partial^2_{vv}+2\partial^2_{vw}+\partial^2_{ww}\right)\left(g_{vv}-g_{ww}\right)=0;$$
$$\left(\partial^2_{vv}-2\partial^2_{vw}+\partial^2_{ww}\right)\left(g_{vv}-g_{ww}\right)=0.$$

Risolvendo il sistema così ottenuto si ricava che tutte le possibili derivate parziali seconde delle componenti del tensore metrico in $p$ sono nulle, tranne che per $\partial^2_{vv}g_{ww}=\partial^2_{ww}g_{vv}=-\frac{2}{3}\kappa$ e $\partial^2_{vw}g_{vw}=\frac{\kappa}{3}$.

Dato $\varepsilon>0$ abbastanza piccolo perché $\exp_p$ sia definito sui vettori di $T_pM$ di norma minore o uguale a $\varepsilon$ consideriamo il triangolo geodetico $\triangle_\varepsilon$ di vertici $p$, $\exp_p(\varepsilon v)$ e $\exp_p(\varepsilon w)$. Notiamo che l'angolo tra i lati uscenti da $p$ è $\frac{\pi}{2}$ per la scelta di $v$, $w$. Sia $\beta:[0,1]\to M$ la curva parametrizzata da $\beta(t)=\exp_p((\varepsilon-\varepsilon t)v,\varepsilon t w)$. Allora, espandendo le coordinate del tensore metrico con Taylor

$$d\left(\exp_p(\varepsilon v),\exp_p(\varepsilon w)\right)\leqslant\ell(\beta)=\int_0^1\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{\frac{g_{vv}|_{\beta(t)}+g_{ww}|_{\beta(t)}}{2}-g_{vw}|_{\beta(t)}}\,dt=$$
$$=\int_0^1\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\frac{\kappa}{6}\left((\varepsilon t)^2+(\varepsilon-\varepsilon t)^2+2\varepsilon(\varepsilon-\varepsilon t)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)}\,dt=$$
$$=\int_0^1\sqrt{2}\varepsilon-\frac{\kappa\sqrt{2}}{12}\varepsilon^3+\mathcal{O}\left(\varepsilon^4\right)\,dt=\sqrt{2}\varepsilon-\frac{\kappa\sqrt{2}}{12}\varepsilon^3+\mathcal{O}\left(\varepsilon^4\right).$$

Per $\varepsilon$ sufficientemente piccoli si ha perciò $d\left(\exp_p(\varepsilon v),\exp_p(\varepsilon w)\right)<\sqrt{2}\varepsilon$, ossia, nel triangolo di confronto $\overline{\triangle}_\varepsilon$ l'angolo in $p$ è minore di $\frac{\pi}{2}$, cioè il valore dell'angolo corrispondente in $\triangle_\varepsilon$; quindi lo spazio metrico $(M,d)$ non può essere CAT(0). $\square$

# 3 Geometria degli spazi CAT(0)

In questa sezione verranno esaminate le conseguenze di tipo geometrico che derivano dalla condizione CAT(0). Si tratterà di una serie di risultati generali seguiti da una parte sulle azioni di gruppo mediante isometrie.

## 3.1 Conseguenze geometriche della condizione CAT(0)

Verranno ora esaminate alcuni fatti di base sulla geometria degli spazi metrici CAT(0). Si tratta principalmente di proprietà ereditate dallo spazio euclideo, e che continuano a valere, magari in forma più debole, sotto questa ipotesi più generale. Si concluderà questa parte isolando alcune condizioni che permettano l'immersione isometrica di sottoinsiemi dello spazio euclideo in uno spazio CAT(0).

Iniziamo con un'osservazione sulle geodetiche.

**Lemma 3.1.1.** Uno spazio CAT(0) è unicamente geodetico.

*Dimostrazione.* Siano $p$, $q$ due punti in uno spazio CAT(0) con funzione distanza $d$, siano $l = d(p,q)$ e $\alpha, \beta$ due geodetiche tra $p$ e $q$ definite su $[0,l]$. Consideriamo il triangolo di confronto $\overline{\triangle}(p,q,q)$ in $\mathbb{E}^2$ con funzione distanza $\overline{d}$, e sia $t \in [0,l]$. Per i punti di confronto $\overline{\alpha(t)}$, $\overline{\beta(t)}$ vale $\overline{d}\left(\overline{\alpha(t)}, \overline{\beta(t)}\right) = 0$ poiché $\mathbb{E}^2$ è unicamente geodetico, ma allora $0 \leqslant d(\alpha(t), \beta(t)) \leqslant \overline{d}\left(\overline{\alpha(t)}, \overline{\beta(t)}\right) = 0$ per la proprietà CAT(0), perciò $\alpha$ e $\beta$ coincidono punto per punto. □

**Corollario 3.1.2.** Le geodetiche di uno spazio CAT(0) sono sottoinsiemi convessi.

*Dimostrazione.* Immediata usando il Lemma 2.3.3. □

Un'altra ovvia osservazione è il seguente

**Lemma 3.1.3.** Un sottoinsieme convesso di uno spazio CAT(0) è uno spazio CAT(0).

La funzione distanza in uno spazio CAT(0) è convessa, il significato di quest'affermazione è precisato dal seguente

**Lemma 3.1.4.** Sia $(X,d)$ uno spazio metrico CAT(0) e siano $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ due geodetiche parametrizzate proporzionalmente alla lunghezza d'arco. Allora, per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$d(\alpha(t), \beta(t)) \leqslant t d(\alpha(1), \beta(1)) + (1-t) d(\alpha(0), \beta(0)).$$

*Dimostrazione.* Nel caso in cui $\alpha(0) = \beta(0)$ si ha, nel triangolo di confronto $\overline{\triangle}(\alpha(0) = \beta(0), \alpha(1), \beta(1))$, scelto in modo che $\overline{\alpha(0)} = \overline{\beta(0)} = O$, l'origine di $\mathbb{E}^2$, $\overline{\alpha(t)} = t\overline{\alpha(1)}$, e analogamente per $\overline{\beta(t)}$. Perciò

$$\left\| \overline{\alpha(t)} - \overline{\beta(t)} \right\| = t \left\| \overline{\alpha(1)} - \overline{\beta(1)} \right\| = td(\alpha(1), \beta(1)),$$

quindi la tesi è un caso particolare della diseguaglianza CAT(0).

Per il caso generale consideriamo la geodetica $\gamma : [0,1] \to X$, parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco, tale che $\gamma(0) = \alpha(0)$, $\gamma(1) = \beta(1)$; siano inoltre $\beta'$, $\gamma'$ le geodetiche ottenute invertendo la parametrizzazione di $\beta$ e $\gamma$, ossia tali che per ogni $t \in [0,1]$ valga $\beta'(t) = \beta(1-t)$, $\gamma'(t) = \gamma(1-t)$. Allora, per quanto appena mostrato, per ogni $t \in [0,1]$ risulta

$$d(\alpha(t), \gamma(t)) \leqslant td(\alpha(1), \gamma(1)) = td(\alpha(1), \beta(1))$$

$$\begin{gathered} d(\gamma(t), \beta(t)) = d(\gamma'(1-t), \beta'(1-t)) \leqslant \\ \leqslant (1-t)\, d(\gamma'(1), \beta'(1)) = (1-t)\, d(\alpha(0), \beta(0)). \end{gathered}$$

Dalla diseguaglianza triangolare segue la tesi. □

Dal lemma deriva immediatamente il seguente

**Corollario 3.1.5.** Siano $(X,d)$ uno spazio metrico CAT(0), $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $\alpha, \beta : I \to X$ due geodetiche. Allora la funzione, definita su $I$, $t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$ è convessa.

È possibile ora stabilire un'altra proprietà delle geodetiche in uno spazio CAT(0).

**Lemma 3.1.6.** Le geodetiche locali di uno spazio CAT(0) $(X,d)$ sono geodetiche.

*Dimostrazione.* Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $\gamma : I \to X$ una geodetica locale. Supponiamo per assurdo che essa non sia una geodetica. Si troverà un intervallo $[t-a, t+a] \subseteq I$ tale che $d(\gamma(t-a), \gamma(t)) = d(\gamma(t), \gamma(t+a)) = a$, ma $d(\gamma(t-a), \gamma(t+a)) < 2a$, e si vedrà che ciò non è possibile.

Per trovare un tale intervallo consideriamo $t_1 < t_2$ tali che $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) < t_2 - t_1 = l$, che esistono per il Lemma (2.2.5) in quanto $\gamma$ non è una geodetica. Se fosse

$$d\left(\gamma(t_1), \gamma\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right) = d\left(\gamma\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right), \gamma(t_2)\right) = \frac{l}{2}$$

avremmo trovato l'intervallo voluto, nel caso contrario potremmo continuare il ragionamento su una metà di $[t_1, t_2]$ per cui valga la diseguaglianza stretta. Il Lemma (2.2.5) ci assicura che sono necessari al più $k$ passi per trovare l'intervallo desiderato, ove $k$ è tale che la restrizione di $\gamma$ ad un intervallo chiuso di lunghezza $\leqslant \frac{l}{2^k}$ contenuto in $[t_1, t_2]$ è sempre una geodetica.

Una volta trovato un intervallo con le proprietà richieste, lo stesso lemma implica che le restrizioni di $\gamma$ a $[t-a, t]$, $[t, t+a]$ sono geodetiche; indicheremo con $\beta, \beta' : [0,1] \to X$ le riparametrizzazioni proporzionali alla lunghezza d'arco di $[\gamma(t), \gamma(t-a)]$, $[\gamma(t), \gamma(t+a)]$ rispettivamente. Vale $d(\beta(s), \beta'(s)) = 2as$ per $s \in (0,1]$ sufficientemente piccoli in quanto $\gamma$ è una geodetica locale. Tuttavia $d(\beta(1), \beta'(1)) < 2a$, e per ogni $s \in (0,1]$ dovrebbe valere $d(\beta(s), \beta'(s)) < 2as$ per il Lemma 3.1.4, assurdo. □

Un ulteriore dettagio del comportamento delle geodetiche in uno spazio CAT(0) è fornito dal seguente

**Lemma 3.1.7.** Siano $\gamma$, $\gamma'$ linee geodetiche asintotiche in uno spazio CAT(0) $(X, d)$. Allora esse sono *parallele*, ossia la funzione $t \mapsto d(\gamma(t), \gamma'(t))$ è costante.

*Dimostrazione.* La funzione in esame è limitata per definizione di linee asintotiche, ed è convessa per il Lemma (3.1.5), perciò è costante. □

A causa del lemma precedente nel contesto degli spazi CAT(0) i termini "asintotiche" e "parallele" associati a linee geodetiche sono sinonimi.

Dagli spazi di Hilbert, di cui la varietà piatta $\mathbb{E}^n$ fa parte, gli spazi CAT(0) ereditano una proiezione sui sottoinsiemi convessi.

**Lemma 3.1.8.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico CAT(0) e sia $C \subseteq X$ non vuoto, convesso e completo rispetto alla metrica indotta, quindi, in particolare, chiuso. Allora

1) $\forall\, x \in X\ \exists!\, \pi(x) \in C$ tale che

$$d(x, \pi(x)) = d(x, C) \underset{\text{def}}{=} \inf_{y \in C} d(x, y);$$

2) Se $x' \in [x, \pi(x)]$, allora $\pi(x') = \pi(x)$;

3) Se $x \notin C$ e $C \ni y \neq \pi(x)$, allora $\angle([\pi(x), x], [\pi(x), y]) \geqslant \frac{\pi}{2}$;

4) $\pi$ è lipschitziana di costante 1;

5) Detta $\gamma_x : [0, 1] \to X$ la geodetica $[x, \pi(x)]$ riparametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco, curva costante se $x \in C$ e quindi $x = \pi(x)$, la funzione $X \times [0, 1] \to X$ tale che $(x, t) \mapsto \gamma_x(t)$ è una retrazione per deformazione di $X$ su $C$.

*Dimostrazione.*

1) Sia $x \in X \backslash C$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ una successione tale che $d(x, x_n) \searrow d(x, C) = l$, con $l > 0$ grazie alla chiusura. È una successione di Cauchy. Scegliamo infatti $\varepsilon > 0$ e $n_\varepsilon$ sufficientemente grande da avere

$$l^2 \leqslant d(x, x_n)^2 < l^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}$$

per ogni $n \geqslant n_\varepsilon$, allora, per ogni $n, m \geqslant n_\varepsilon$ risulta $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Supponiamo per assurdo $d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$; costruiamo in $\mathbb{E}^2$ il triangolo di confronto $\overline{\triangle}(x, x_m, x_n)$ posizionando $\overline{x}$ nell'origine, e indichiamo con $v$, $w$ i due vettori di confronto per $x_m$ e $x_n$. Si ha $\|v + w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 - \|v - w\|^2$, perciò

$$\left\| \frac{v + w}{2} \right\|^2 = \frac{2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 - \|v - w\|^2}{4} < \frac{4l^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^2}{4},$$

allora $\left\| \dfrac{v + w}{2} \right\| < l$, ossia il punto medio della geodetica tra $v = \overline{x_m}$ e $w = \overline{x_n}$ dista dall'origine meno di $l$, ma allora a maggior ragione il punto corrispondente di $[x_m, x_n] \subseteq C$ dista da $x$ meno di $l$ grazie alla proprietà CAT(0), il che va contro la definizione di $d(x, C)$. Quindi la successione ha un limite $\pi(x) \in C$, e grazie alla continuità della funzione distanza $d(x, \pi(x)) = d(x, C)$.

Se esistessero $p$, $p'$ due proiezioni di $x$ su $C$, la successione che alterna $p$ e $p'$ dovrebbe essere di Cauchy per il ragionamento appena fatto, ossia $p = p'$.

2) Se, per assurdo, $\pi(x') = q \neq \pi(x)$, allora $d(x', q) < d(x', \pi(x))$, e

$$d(x, q) \leqslant d(x, x') + d(x', q) < d(x, x') + d(x', \pi(x)) = d(x, \pi(x))$$

per definizione di geodetica, ma allora $\pi(x)$ non sarebbe la proiezione, assurdo.

3) Se, per assurdo, valesse il minore stretto, esisterebbero, per definizione di angolo, $x' \in [\pi(x), x]$ e $y' \in [\pi(x), y]$ tali che $\angle_{\pi(x)}(x', y') < \frac{\pi}{2}$, ossia, nel triangolo di confronto $\overline{\triangle}(\pi(x), x', y')$, l'angolo in $\overline{\pi(x)}$ sarebbe $< \frac{\pi}{2}$ per l'osservazione alla Definizione (2.5.5). Poniamo questo vertice nell'origine; la condizione diventa $\left\langle \overline{x'}; \overline{y'} \right\rangle > 0$. Allora, per $0 < \delta < \min \left\{ \frac{2\left\langle \overline{x'}; \overline{y'} \right\rangle}{\left\| \overline{y'} \right\|^2}, 1 \right\}$, si ha

$$d(x', \pi(x))^2 = \left\| \overline{x'} \right\|^2 > \left\| \overline{x'} \right\|^2 + \delta^2 \left\| \overline{y'} \right\|^2 - 2\delta \left\langle \overline{x'}; \overline{y'} \right\rangle = \left\| \overline{x'} - \delta \overline{y'} \right\|^2.$$

Per le ipotesi imposte $\delta \overline{y'} \in \left[ \overline{\pi(x)}, \overline{y'} \right]$, e per la proprietà CAT(0), detto $r \in [\pi(x), y'] \subseteq C$ il punto corrispondente, si avrebbe $d(x', \pi(x)) > d(x', r)$, ossia $\pi(x)$ non sarebbe la proiezione di $x'$, assurdo.

4) Dimostreremo in realtà una tesi più forte, ossia che, definita $\gamma_x : [0, 1] \to X$ come nel punto 5) dell'enunciato, per ogni $x, y \in X$ e per ogni $t \in [0, 1]$ si ha $d(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \leqslant d(x, y)$. La tesi è ovvia se $x, y \in C$, ed è una facile conseguenza del Lemma 3.1.4 nel caso $\pi(x) = \pi(y)$. Se $x \notin C$ e $y \in C$, si ha, per quanto appena visto e per il Teorema (2.5.10) che nel triangolo di confronto $\overline{\triangle}(x, \pi(x), y)$ l'angolo in $\overline{\pi(x)}$ è $\geqslant \frac{\pi}{2}$. Ponendo $\overline{y}$ nell'origine e $\overline{\pi(x)} = v$, $\overline{x} - \overline{\pi(x)} = w$ per comodità, ciò è equivalente a $\langle v; w \rangle \geqslant 0$. I punti di confronto di $[\pi(x), x]$ si parametrizzano come $\overline{\gamma_x(t)} = v + sw$ con $s = 1 - t$, e

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\gamma_x(t)} \right\|^2 &= \|v\|^2 + s^2 \|w\|^2 + 2s \langle v; w \rangle \leqslant \\ &\leqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v; w \rangle = \|\overline{x}\|^2 = d(x, y)^2, \end{aligned}$$

e la diseguaglianza vale a maggior ragione per i relativi punti di $[\pi(x), x]$ grazie alla proprietà CAT(0).

Rimane il caso in cui $x, y \notin C$ hanno proiezioni diverse. Consideriamo la seguente costruzione: i triangoli di confronto $\overline{\triangle}(\pi(y), x, \pi(x))$ e $\overline{\triangle}(\pi(y), x, y)$ sono attaccati per il lato $\left[ \overline{\pi(y)}, \overline{x} \right]$ e gli altri due vertici sono da parti opposte rispetto a questo segmento, inoltre $\overline{\pi(y)}$ è nell'origine. L'angolo in $\pi(x)$ di questo quadrilatero è $\geqslant \frac{\pi}{2}$ analogamente a prima. Anche l'angolo tra $\overline{\pi(x)}$ e $\overline{y}$ con vertice in $\overline{\pi(y)}$ è $\geqslant \frac{\pi}{2}$, infatti esso è uguale a

$$\begin{gathered} \angle_{\pi(y)}(\pi(x), x) + \angle_{\pi(y)}(x, y) \geqslant \\ \geqslant \angle([\pi(y), \pi(x)], [\pi(y), x]) + \angle([\pi(y), x], [\pi(y), y]) \geqslant \\ \geqslant \angle([\pi(y), \pi(x)], [\pi(y), y]) \geqslant \frac{\pi}{2} \end{gathered}$$

per il Teorema 2.5.10 e il Lemma 2.5.7. Ponendo per comodità $v = \overline{\pi(x)}$, $w = \overline{x} - \overline{\pi(x)}$, $u = \overline{y}$, le due condizioni sugli angoli si esprimono con $\langle v; w\rangle \geqslant 0$ e $\langle v; u\rangle \leqslant 0$, perciò $\langle v; w - u\rangle \geqslant 0$. Analogamente a prima, $\overline{\gamma_x(t)} = v + sw$ e $\overline{\gamma_y(t)} = su$ con $s = 1 - t$, e

$$\left\|\overline{\gamma_x(t)} - \overline{\gamma_y(t)}\right\|^2 = \|v\|^2 + s^2\|w - u\|^2 + 2s\langle v; w - u\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|v\|^2 + \|w - u\|^2 + 2\langle v; w - u\rangle = \|\overline{x} - \overline{y}\|^2 = d(x, y)^2.$$

Sia ora $\overline{p}(t)$ il punto in cui il segmento $\left[\overline{\gamma_x(t)}, \overline{\gamma_y(t)}\right]$ incontra $\left[\overline{\pi(y)}, \overline{x}\right]$, e sia $p(t)$ il corrispondente punto su $[\pi(y), x]$. Allora

$$d(x, y) \geqslant \left\|\overline{\gamma_x(t)} - \overline{\gamma_y(t)}\right\| = \left\|\overline{\gamma_x(t)} - \overline{p}(t)\right\| + \left\|\overline{p}(t) - \overline{\gamma_y(t)}\right\| \geqslant$$

$$\geqslant d(\gamma_x(t), p(t)) + d(p(t), \gamma_y(t)) \geqslant d(\gamma_x(t), \gamma_y(t)).$$

5) Il punto 4) dimostra la continuità dell'applicazione così ottenuta; che sia una retrazione per deformazione è a questo punto ovvio.

□

Ne deriva, in particolare, una conseguenza topologica.

**Corollario 3.1.9.** Uno spazio CAT(0) è contrattile.

*Dimostrazione.* Un punto è chiaramente un sottoinsieme convesso e completo rispetto alla metrica indotta, perciò esiste, per il punto 5) del lemma precedente, una contrazione per deformazione di tutto lo spazio su di esso. □

Nei lemmi seguenti verranno forniti alcuni esempi di condizioni per cui uno spazio piatto, ossia sottospazio di $\mathbb{E}^n$, possa immergersi in uno spazio CAT(0). Iniziamo con i vertici di un rettangolo.

**Lemma 3.1.10.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico CAT(0), e siano $p, q, r, s \in X$ punti distinti tali che

$$\angle([p, s], [p, q]), \angle([q, p], [q, r]), \angle([r, q], [r, s]), \angle([s, r], [s, p]) \geqslant \frac{\pi}{2}.$$

Allora esistono $a, b$ reali positivi tali che $(0, 0) \mapsto p$, $(a, 0) \mapsto q$, $(a, b) \mapsto r$, $(0, b) \mapsto s$ è un'immersione isometrica dei quattro punti di $\mathbb{E}^2$ in $X$.

*Dimostrazione.* Consideriamo la seguente costruzione: i due triangoli di confronto $\overline{\triangle}(p, r, q)$ e $\overline{\triangle}(p, r, s)$ sono attaccati per il lato $[\overline{p}, \overline{r}]$ e gli altri due punti sono dalle parti opposte rispetto a questo lato. Analogamente alla dimostrazione del punto 4) del lemma precedente, si ha che gli angoli del quadrilatero risultante nel piano euclideo sono $\geqslant \frac{\pi}{2}$; poiché la somma degli angoli di un quadrilatero nel piano euclideo è $2\pi$, si ha che tutti questi angoli sono effettivamente $\frac{\pi}{2}$. Questo vuol dire che $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$, $\overline{s}$ sono vertici di un rettangolo, $d(p, q) = d(r, s) = a$, $d(q, r) = d(s, p) = b$ e $d(p, r) = \sqrt{a^2 + b^2}$ per definizione di triangolo di confronto; ripetendo il ragionamento con $\overline{\triangle}(q, s, r)$ e $\overline{\triangle}(q, s, p)$ si ottiene anche $d(q, s) = \sqrt{a^2 + b^2}$. □

Due geodetiche parallele in uno spazio CAT(0) determinano l'immersione di due rette euclidee parallele nello spazio. Si ha infatti il seguente

**Lemma 3.1.11** (della Striscia Piatta)**.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico CAT(0), e siano $\gamma, \gamma' : \mathbb{R} \to X$ due linee geodetiche parallele. Allora esistono $D$, $a$ reali ed un'immersione isometrica $f : [0, D] \times \mathbb{R} \to X$ tale che per ogni $t \in R$ si abbia $f(0, t) = \gamma(t)$ e $f(D, t) = \gamma'(t + a)$.

*Dimostrazione.* Consideriamo $\pi'$, la proiezione sul sottospazio $\gamma'(\mathbb{R})$ non vuoto, convesso per il Corollario 3.1.2, e completo rispetto alla metrica indotta. A meno di traslare la parametrizzazione di $\gamma'$, il che introduce la $a$ dell'enunciato, possiamo supporre $\pi'(\gamma(0)) = \gamma'(0)$. Chiamiamo $D = d(\gamma(0), \gamma'(0))$. Se $c \neq 0$, si ha, per l'unicità della proiezione, $d(\gamma(0), \gamma'(c)) > D$. Le funzioni $t \mapsto d(\gamma(t), \gamma'(t))$ e $t \mapsto d(\gamma(t), \gamma'(t + c))$ sono costanti per il Lemma 3.1.7, questo vuol dire che per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta $\pi'(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ per definizione di proiezione. Inoltre, se $c \neq 0$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$d(\gamma'(t), \gamma(t + c)) = d(\gamma'(t - c), \gamma(t)) > d(\gamma'(t), \gamma(t)) = D,$$

quindi anche la proiezione su $\gamma(\mathbb{R})$ manda $\gamma'(t)$ in $\gamma(t)$.

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ costruiamo la geodetica $\beta_t$, parametrizzata per lunghezza d'arco su $[0, D]$, tra $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$. Per ogni $s \in [0, D]$, la funzione $t \mapsto \beta_t(s)$ risulta essere una geodetica. Infatti, per il punto 2) del Lemma (3.1.8), $\pi(\beta_t(s)) = \gamma(t)$, allora, per il punto 4) dello stesso Lemma, $d(\beta_t(s), \beta'_t(s)) \geqslant d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$. L'altra diseguaglianza segue dal Corollario (3.1.5) applicato a $\beta_t$ e $\beta_{t'}$. Notiamo che per $s = 0, D$ otteniamo le geodetiche originali.

Osserviamo ora che, per $s \neq s' \in [0, D]$, detta $\pi_s$ la proiezione sulla geodetica $t \mapsto \beta_t(s)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta $\pi_s(\beta_t(s')) = \beta_t(s)$. Innanzitutto la distanza tra questi due punti è $|s - s'|$ per definizione di geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco. Siano per assurdo $0 \leqslant s < s' \leqslant D$ tali che la proprietà fallisca per qualche $\beta_{t_0}(s)$, e sia $t_1 \neq t_0$ tale che $\pi_s(\beta_{t_0}(s')) = \beta_{t_1}(s)$. Allora

$$d(\gamma'(t_0), \gamma(t_1)) \leqslant d(\gamma'(t_0), \beta_{t_0}(s')) + d(\beta_{t_0}(s'), \beta_{t_1}(s)) + d(\beta_{t_1}(s), \gamma(t_1)) <$$

$$< (D - s') + (s' - s) + s = D,$$

il che andrebbe contro l'osservazione iniziale sulla proiezione su $\gamma$. Affermo ora che $f : [0, D] \times \mathbb{R}$ che manda $(s, t)$ in $\beta_t(s)$ è un'immersione isometrica, cioè che per ogni scelta di $(s, t), (s', t') \in [0, D] \times \mathbb{R}$ risulta

$$d(\beta_t(s), \beta_{t'}(s')) = \sqrt{(t - t')^2 + (s - s')^2}.$$

Questo segue dalla definizione di geodetica se $t = t'$ o $s = s'$; nel rimanente caso, dall'osservazione sulle proiezioni $\pi_s$ e dal punto 3) del Lemma (3.1.8) segue che i quattro punti $\beta_t(s)$, $\beta_{t'}(s)$, $\beta_{t'}(s')$, $\beta_t(s')$ rispettano le ipotesi del Lemma precedente, dal quale segue la tesi. □

Il seguente lemma chiarisce il caso più generale di sottospazi di uno spazio CAT(0) determinati da un insieme di geodetiche parallele.

**Lemma 3.1.12.** Sia $\gamma$ una linea geodetica in uno spazio CAT(0). Allora l'insieme delle linee geodetiche parallele a $\gamma$ è convesso ed è isometrico ad un prodotto $Y \times \mathbb{R}$, con $Y$ convesso.

*Dimostrazione.* La convessità segue dalla dimostrazione del lemma della striscia piatta, da cui risulta che tale striscia è un'unione di geodetiche parallele alle due che la delimitano, ed è immagine di un'immersione isometrica di uno spazio geodetico in uno unicamente geodetico, e quindi tale striscia è convessa per il Lemma (2.3.2). Due linee parallele a $\gamma$ sono a loro volta parallele grazie alla diseguaglianza triangolare, e la geodetica che unisce un punto su una linea ad uno dell'altra giace nella striscia da loro individuata, che ancora è inclusa nell'insieme considerato.

Siano $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ le geodetiche parallele a $\gamma$. Riparametrizziamole in modo che, detta $\pi_i$ la proiezione sulla geodetica $i$-esima, $\pi_i(\gamma(0)) = \gamma_i(0)$. Affermo che $Y = \{\gamma_i(0) | i \in I\}$ rispetta la tesi. Innanzitutto è convesso, segue infatti dall'osservazione sulle proiezioni nella dimostrazione del lemma della striscia piatta che, per $i, j \in I$, la geodetica $[\gamma_i(0), \gamma_j(0)]$ è formata da punti di geodetiche parallele a queste due, e quindi a $\gamma$, a coordinata 0. Che l'insieme $\bigcup_{i\in I} \gamma_i(\mathbb{R})$ sia isometrico al prodotto $Y \times \mathbb{R}$ segue ora facilmente sempre dal lemma della striscia piatta. □

## 3.2 Isometrie degli spazi CAT(0)

Verranno ora introdotti alcuni termini e dimostrati alcuni lemmi relativi alle isometrie e alle azioni di gruppo mediante isometrie su spazi metrici, con particolare riguardo al caso CAT(0).

Iniziamo introducendo alcune distinzioni tra isometrie di uno spazio metrico.

**Definizione 3.2.1.** *Sia $f$ un'isometria di uno spazio metrico $(X, d)$. La* funzione di displacement *$d_f : X \to [0, +\infty)$ è definita come $d_f(x) = d(x, f(x))$.*

**Definizione 3.2.2.** *La* lunghezza di traslazione *$|f|$ di un'isometria $f$ che agisce su uno spazio metrico $X$ è data da $\inf_{x\in X} d_f(x)$.*

La lunghezza di traslazione permette di individuare un particolare sottoinsieme di $X$.

**Definizione 3.2.3.** *Se $f$ è un'isometria di uno spazio metrico $X$, chiamiamo* $\mathrm{Min}(f) \subseteq X$ *l'insieme $\{x \in X | d_f(x) = |f|\}$.*

$\mathrm{Min}(f)$ è un sottoinsieme chiuso di $X$ in quanto controimmagine di un punto mediante una funzione continua. Esso potrebbe anche essere vuoto. Usando questo sottoinsieme è possibile dare una classificazione delle isometrie di $X$.

**Definizione 3.2.4.** *Un'isometria $f$ di $(X, d)$ si dice* semisemplice *se* $\mathrm{Min}(f) \neq \emptyset$*, altrimenti si dice* parabolica*. $f$ semisemplice si dice* ellittica *se ha un punto fisso, ossia se $|f| = 0$,* iperbolica *altrimenti.*

Notiamo che la classificazione della definizione precedente è esauriente.

Fissiamo la convenzione usata per il significato di un termine che comparirà più volte nel testo.

**Definizione 3.2.5.** *Sia $f$ un'isometria di uno spazio metrico $X$. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice* $f$-invariante *se $f|_Y$ è ancora un'isometria (in particolare è biiettiva su $Y$). Se $G$ agisce su $X$ mediante isometrie, $Y \subseteq X$ è $G$-invariante se è $g$-invariante per ogni $g \in G$.*

Stabiliamo ora alcune proprietà delle isometrie di uno spazio metrico relative al comportamento della funzione di displacement e dell'insieme $\mathrm{Min}\,(f)$.

**Lemma 3.2.6.** Sia $f$ un'isometria di uno spazio metrico $(X, d)$, e sia $G$ un gruppo che agisce su $X$ mediante isometrie. Allora

1) $\mathrm{Min}\,(f)$ è $f$-invariante e $\mathrm{Min}\,(G) \underset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{g \in G} \mathrm{Min}\,(g)$ è $G$-invariante;

2) Se $\varphi$ è un isometria di $X$, allora $|f| = \left|\varphi f \varphi^{-1}\right|$;

3) Se $\varphi$ è un'isometria di $X$, allora $\mathrm{Min}\left(\varphi f \varphi^{-1}\right) = \varphi\,(\mathrm{Min}\,(f))$.

*Dimostrazione.*

1) Sia $x \in \mathrm{Min}\,(f)$. Allora

$$d\,(f\,(f\,(x))\,, f\,(x)) = d\,(f\,(x)\,, x) = |f|$$

per definizione di isometria, quindi $f\,(x) \in \mathrm{Min}\,(f)$, e analogamente

$$d\left(f\left(f^{-1}\,(x)\right), f^{-1}\,(x)\right) = d\left(x, f^{-1}\,(x)\right) = d\,(f\,(x)\,, x) = |f|\,,$$

da cui segue la biiettività di $f|_{\mathrm{Min}(f)}$. Se $x \in \mathrm{Min}\,(G)$, quanto appena detto vale per ciascun $g \in G$, pertanto $\mathrm{Min}\,(G)$ è $G$-invariante.

2) Per la biiettività dell'isometria, $\varphi\,(X) = X$ e per ogni $x \in X$ esiste un unico $y \in X$ tale che $x = \varphi\,(y)$, perciò

$$d\left(\varphi f \varphi^{-1}\,(x)\,, x\right) = d\left(\varphi f \varphi^{-1} \varphi\,(y)\,, \varphi\,(y)\right) = d\,(\varphi f\,(y)\,, \varphi\,(y)) = d\,(f\,(y)\,, y)\,,$$

pertanto $d_f\,(X) = d_{\varphi f \varphi^{-1}}\,(X)$ e quindi $|f| = \left|\varphi f \varphi^{-1}\right|$.

3) Sia $x \in \mathrm{Min}\,(f)$. Allora

$$d\left(\varphi f \varphi^{-1} \varphi\,(x)\,, \varphi\,(x)\right) = d\,(f\,(x)\,, x) = |f| = \left|\varphi f \varphi^{-1}\right|\,,$$

perciò $\varphi\,(\mathrm{Min}\,(f)) \subseteq \mathrm{Min}\left(\varphi f \varphi^{-1}\right)$. Se poi $x \in \mathrm{Min}\left(\varphi f \varphi^{-1}\right)$, allora

$$\left|\varphi f \varphi^{-1}\right| = |f| = d\left(\varphi f \varphi^{-1}\,(x)\,, x\right) = d\left(\varphi^{-1} \varphi f \varphi^{-1}\,(x)\,, \varphi^{-1}\,(x)\right),$$

quindi $\varphi^{-1}\left(\mathrm{Min}\left(\varphi f \varphi^{-1}\right)\right) \subseteq \mathrm{Min}\,(f)$, da cui la tesi.

□

La presenza di ipotesi sulla curvatura permette di stabilire altre proprietà.

**Lemma 3.2.7.** Siano $f$ e $(X, d)$ come nel lemma precedente, e assumiamo inoltre che $X$ sia CAT(0). Allora

1) La funzione di displacement $d_f$ è convessa;

2) $\mathrm{Min}\,(f)$ è convesso;

3) Se $C \subseteq X$ è non vuoto, convesso, $f$-invariante e completo rispetto alla metrica indotta, allora $\left|\,f|_C\right| = |f|$ e $f$ è semisemplice se e solo se $f|_C$ lo è, ossia $\mathrm{Min}\,(f)$ è non vuoto se e solo se $\mathrm{Min}\,(\,f|_C)$ lo è.

*Dimostrazione.*

1) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $\gamma : I \to \mathbb{R}$ una geodetica. Per il Lemma (2.2.7) $f \circ \gamma$ è ancora una geodetica, pertanto $d_f \circ \gamma = d(\gamma(t), f(\gamma(t)))$ definita su $I$ è convessa per il Corollario (3.1.5).

2) Usando la convessità di $d_f$ appena mostrata, l'insieme $\operatorname{Min}(f) = \{d_f \leqslant |f|\}$ è convesso per il Lemma (2.3.5).

3) Sia $\pi$ la proiezione su $C$, allora $\pi(f(x)) = f(\pi(x))$. Infatti

$$d(f(x), f(\pi(x))) = d(x, \pi(x))$$

e $f(\pi(x)) \in C$ per ipotesi, rimane perciò da mostrare che per ogni $y \in C$ si ha $d(f(x), y) \geqslant d(x, \pi(x))$. Per l'invarianza, esiste $z \in C$ tale che $y = f(z)$, ma allora $d(f(x), y) = d(x, z) \geqslant d(x, \pi(x))$. Ne segue che per ogni $x \in X$ si ha

$$d_f(\pi(x)) = d_{f|_C}(\pi(x)) = d(\pi(x), f(\pi(x))) =$$
$$d(\pi(x), \pi(f(x))) \leqslant d(x, f(x)) = d_f(x)$$

per le proprietà della proiezione, ma allora $|f|_C| \leqslant |f|$; l'altra diseguaglianza è banale. Inoltre, se $x \in \operatorname{Min}(f)$, da questo conto segue che $\pi(x) \in \operatorname{Min}(f|_C)$, ossia $\operatorname{Min}(f)$ non vuoto implica $\operatorname{Min}(f|_C)$ non vuoto. Se poi $\operatorname{Min}(f|_C) = \left\{d_{f|_C} = |f|_C| = |f|\right\}$ è non vuoto, allora anche $\operatorname{Min}(f)$ è non vuoto.

□

Il seguente lemma precisa il comportamento delle isometrie in uno spazio prodotto.

**Lemma 3.2.8.** Siano $(X', d')$, $(X'', d'')$ spazi metrici, $f'$ e $f''$ isometrie di $X'$ e $X''$ rispettivamente, e sia $f$ l'isometria di $X' \times X''$, con funzione distanza $d$, data da $(x', x'') \mapsto (f(x'), f(x''))$, allora $\operatorname{Min}(f) = \operatorname{Min}(f') \times \operatorname{Min}(f'')$, in particolare, $f$ è semisemplice se e solo se $f'$ e $f''$ lo sono.

*Dimostrazione.* Se $(x', x'') \in \operatorname{Min}(f') \times \operatorname{Min}(f'')$, allora per ogni $y' \in X'$ si ha $d_{f'}(x') \leqslant d_{f'}(y')$ e per ogni $y'' \in X''$ si ha $d_{f''}(x'') \leqslant d_{f''}(y'')$, perciò per ogni $(y', y'') \in X' \times X''$ risulta $d_f(x', x'') \leqslant d_f(y', y'')$, quindi $(x', x'') \in \operatorname{Min}(f)$. D'altra parte, se $(x', x'') \in \operatorname{Min}(f)$, allora, in particolare, per ogni $y' \in X'$ si ha $d_f(x', x'') \leqslant d_f(y', x'')$, da cui segue $x' \in \operatorname{Min}(f')$; analogamente $x'' \in \operatorname{Min}(f'')$. □

Diamo ora una caratterizzazione delle isometrie iperboliche di uno spazio metrico CAT(0).

**Lemma 3.2.9.** Un'isometria $f$ di uno spazio metrico CAT(0) $(X, d)$ è iperbolica se e solo se esiste una linea geodetica $\gamma : \mathbb{R} \to X$ tale che $f(\gamma(t)) = \gamma(t + a)$, con $a$ costante reale non nulla. Una tale linea è detta *asse* di $f$. Inoltre, $|a|$ è esattamente $|f|$.

*Dimostrazione.* Da una parte, se esiste un asse $\gamma$ di $f$, esso è un sottoinsieme non vuoto, convesso per il Corollario 3.1.2, completo rispetto alla metrica indotta e $f$-invariante di $X$, e l'azione di $f$ su $\gamma(\mathbb{R})$ è un'isometria iperbolica di lunghezza di traslazione $|a| = \left| f|_{\gamma(\mathbb{R})} \right|$. Allora, per il punto 5) del lemma precedente, l'azione di $f$ su tutto $X$ è semisemplice di lunghezza di traslazione $|a|$, quindi, in particolare, iperbolica.

Siano ora $f$ un'isometria iperbolica di $X$, e $x \in \mathrm{Min}(f)$. Un asse di $f$ è la curva $\beta : \mathbb{R} \to X$ formata dalla giunzione delle geodetiche

$$\left\{ \left[ f^n(x), f^{n+1}(x) \right] | n \in \mathbb{Z} \right\}$$

parametrizzate per lunghezza d'arco su intervalli $[n|f|, (n+1)|f|]$ rispettivamente; ricordiamo che la distanza tra gli estremi di tutte queste geodetiche è proprio $|f|$ per definizione di $\mathrm{Min}(f)$ e che

$$f\left( \left[ f^n(x), f^{n+1}(x) \right] \right) = \left[ f^{n+1}(x), f^{n+2}(x) \right]$$

per il Lemma 2.2.7. Dimostreremo che questa è una geodetica locale, per il Lemma 3.1.6 sarà una geodetica. Non c'è nessun problema per i punti interni degli intervalli su cui $\beta$ è definita a tratti; rimane da mostrare che $\beta$ è una geodetica in un intorno di $n|f|$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e per farlo si vedrà che $\beta|_{\left[n|f| - \frac{|f|}{2}, n|f| + \frac{|f|}{2}\right]}$ è una geodetica.

Si ha che

$$f\left( \beta\left( n|f| - \frac{|f|}{2} \right) \right) = f\left( \beta\left( n|f| + \frac{|f|}{2} \right) \right)$$

perché punti corrispondenti su due geodetiche una immagine dell'altra mediante $f$, quindi

$$d\left( \beta\left( n|f| - \frac{|f|}{2} \right), \beta\left( n|f| + \frac{|f|}{2} \right) \right) \geqslant |f|$$

per definizione di $|f|$. Questo è sufficiente per concludere. Siano infatti $n|f| - \frac{|f|}{2} \leqslant t < t' \leqslant n|f| + \frac{|f|}{2}$; se sono entrambi $\geqslant n|f|$ o $\leqslant n|f|$ allora già si sa che $d(\beta(t), \beta(t')) = t' - t$, altrimenti $t < n|f| < t'$ e

$$d(\beta(t), \beta(t')) \leqslant d(\beta(t), \beta(n|f|)) + d(\beta(n|f|), \beta(t')) = t' - t;$$

tuttavia, se valesse il minore stretto, allora

$$d\left( \beta\left( n|f| - \frac{|f|}{2} \right), \beta\left( n|f| + \frac{|f|}{2} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant d\left( \beta\left( n|f| - \frac{|f|}{2} \right), \beta(t) \right) + d(\beta(t), \beta(t')) + d\left( \beta(t'), \beta\left( n|f| + \frac{|f|}{2} \right) \right) < |f|,$$

assurdo. Inoltre, la linea geodetica così trovata è un asse per la già citata proprietà di $f$ di portarne un tratto nell'altro. $\square$

Approfondiamo il trattamento delle isometrie iperboliche.

**Lemma 3.2.10.** Sia $f$ un'isometria iperbolica di uno spazio metrico $(X, d)$ con la proprietà CAT(0) . Allora

1) Gli assi di $f$ sono tra loro paralleli e la loro unione è $\mathrm{Min}\,(f)$;

2) $\mathrm{Min}\,(f)$ è isometrico ad un prodotto $Y \times \mathbb{R}$, con $Y$ convesso, e la restrizione di $f$ a $\mathrm{Min}\,(f)$ è della forma $(y,t) \mapsto (y, t+|f|)$ per ogni $y \in Y$ e $t \in \mathbb{R}$;

3) Se $\varphi$ è un'isometria di $X$ che commuta con $f$, allora $\mathrm{Min}\,(f)$ è $\varphi$-invariante, e la sua restrizione a $Y \times \mathbb{R}$ è del tipo $(\varphi', \varphi'')$, ove $\varphi'$ è un'isometria di $Y$ e $\varphi''$ è una traslazione di $\mathbb{R}$.

*Dimostrazione.*

1) Siano $\gamma$, $\gamma'$ assi di $f$. Si ha, per definizione, $f(\gamma(t)) = \gamma(t+|f|)$ e analogamente per $\gamma'$, allora la funzione $t \mapsto d(\gamma(t), \gamma'(t))$ è continua e periodica, essendo $f$ un'isometria, quindi limitata, dunque costante per il Lemma 3.1.7. Dalla dimostrazione del Lemma precedente segue che ogni punto di $\mathrm{Min}\,(f)$ appartiene ad un asse e che ogni asse è incluso in $\mathrm{Min}\,(f)$.

2) $\mathrm{Min}\,(f)$ è convesso per il Lemma 3.2.7, quindi è a sua volta uno spazio CAT(0) per il Lemma 3.1.3. Possiamo allora applicare ad esso il Lemma 3.1.12 per ottenere la decomposizione voluta. Che l'azione di $f$ su $\mathrm{Min}\,(f)$ sia quella enunciata segue banalmente dalla definizione di asse.

3) Per il Lemma 3.2.6 e per ipotesi, $\mathrm{Min}\,(f) = \mathrm{Min}\left(\varphi f \varphi^{-1}\right) = \varphi(\mathrm{Min}\,(f))$, analogamente $\mathrm{Min}\,(f) = \varphi^{-1}(\mathrm{Min}\,(f))$, da cui l'invarianza. Inoltre $\varphi$ porta assi di $f$ in assi di $f$. Sia infatti $\gamma(\mathbb{R})$ un asse di $f$, allora $f\varphi(\gamma(t)) = \varphi f(\gamma(t)) = \varphi(\gamma(t+|f|))$, perciò $\varphi \circ \gamma$ è ancora un asse di $f$, e analoga conclusione vale per $\varphi^{-1}$.

   Usando il punto precedente, indicizziamo gli assi di $f$ come $\{\gamma_i\}_{i \in Y}$, e sia $\varphi' : Y \to Y$ l'applicazione indotta dall'azione di $\varphi$ sull'insieme degli assi di $f$. Essa è un'isometria. La biiettività segue dalla biiettività di $\varphi|_{\mathrm{Min}(f)}$, e $\varphi^{-1}$ induce l'azione di $\varphi'^{-1}$. Notiamo poi che, detta $d_Y$ la distanza in $Y$, $d_Y(i,j) = d((i,0),(j,0))$, con $(i,0),(j,0) \in Y \times \mathbb{R} \cong \mathrm{Min}\,(f)$, e

$$d((i,0),(j,0)) = d(\varphi(i,0), \varphi(j,0)) = d((\varphi'(i), t_i), (\varphi'(j), t_j)) =$$

$$= \sqrt{d_Y(\varphi'(i), \varphi'(j))^2 + (t_i - t_j)^2},$$

   perciò $d_Y(\varphi'(i), \varphi'(j)) \leqslant d_Y(i,j)$. D'altra parte

$$d_Y(\varphi'(i), \varphi'(j)) = d((\varphi'(i), 0), (\varphi'(j), 0)) =$$

$$= d\left(\varphi^{-1}(\varphi'(i), 0), \varphi^{-1}(\varphi'(j), 0)\right) = d((i, s_i), (j, s_j)) =$$

$$= \sqrt{d_Y(i,j)^2 + (s_i - s_j)^2},$$

   da cui segue la diseguaglianza opposta e quindi la proprietà di conservazione delle distanze di $\varphi'$.

   Questo vuol dire che per ogni $(i,t) \in Y \times \mathbb{R}$ si ha $\varphi(i,t) = (\varphi'(i), \varphi''_i(t))$, con $\varphi'$ isometria di $Y$ e $\varphi''_i$ isometria di $\mathbb{R}$, e rimane da mostrare che $\varphi''_i$ non dipende da $i$. Siano perciò $i, j \in Y$, $t \in \mathbb{R}$. Allora

$$d_Y(i,j)^2 = d((i,t),(j,t))^2 = d(\varphi(i,t), \varphi(j,t))^2 =$$

$$= d_Y\left(\varphi'(i), \varphi'(j)\right)^2 + \left(\varphi''_i(t) - \varphi''_j(t)\right)^2 = d_Y(i,j)^2 + \left(\varphi''_i(t) - \varphi''_j(t)\right)^2,$$

perciò $\varphi''_i = \varphi''_j = \varphi''$. Poichè $\varphi''$ è un'isometria di $\mathbb{R}$ che commuta con una traslazione non banale, dev'essere essa stessa una traslazione.

□

Dalla definizione di geodetica e dal Lemma (3.2.9) segue che, se $f$ è un'isometria iperbolica di uno spazio CAT(0) $X$, lo sono anche $f^n$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$, per ogni $x \in \mathrm{Min}(f)$ l'insieme $\{f^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$ è discreto e, se $m \neq n$, allora $f^m \neq f^n$, quindi in particolare il gruppo generato da $f$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Si può allora esprimere il tutto come

**Corollario 3.2.11.** Se $\mathbb{Z}$ agisce su uno spazio CAT(0) $X$ mediante isometrie iperboliche (a parte, ovviamente, lo 0), allora è possibile immergere in $X$ un prodotto $Y \times \mathbb{R}$ che sia $\mathbb{Z}$-invariante e tale che ogni elemento agisca come l'identità su $Y$ e come traslazione su $\mathbb{R}$.

*Dimostrazione.* È sufficiente applicare il lemma precedente ad un generatore di $\mathbb{Z}$. □

Passiamo dallo studio delle isometrie prese individualmente allo studio di gruppi di isometrie. Iniziamo col seguente

**Lemma 3.2.12.** Sia $G$ un gruppo che agisce propriamente e in maniera cocompatta su un length space $(X, d)$. Allora $X$ è proprio.

*Dimostrazione.* Mostriamo che $X$ è completo e localmente compatto, la tesi seguirà allora dal Lemma 2.1.7. Indicheremo con $K$ il compatto tale che $G \cdot K$ ricopre $X$.

Sia $x_n$ una successione di Cauchy in $X$, e siano $g_n \in G$ tali che $g_n \cdot x_n \in K$. A meno di passare ad una sottosuccessione, $g_n \cdot x_n \to \overline{x} \in K$. Per ipotesi esiste $r > 0$ tale che $\{g \in G | g \cdot B(\overline{x}, r) \cap B(\overline{x}, r) \neq \emptyset\}$ è finito. Inoltre esiste $N$ naturale tale che se $n \geqslant N$ allora $d(g_n \cdot x_n, \overline{x}) < \frac{r}{2}$ e per ogni $m \geqslant N$ si ha $d(x_m, x_N) < \frac{r}{2}$. Ne risulta che $x_N \in g_m^{-1} \cdot B(\overline{x}, r)$ per ogni $m \geqslant N$. Ciò è chiaro per $m = N$, per gli altri si ha

$$d\left(x_N, g_m^{-1} \cdot \overline{x}\right) \leqslant d(x_N, x_m) + d\left(x_m, g_m^{-1} \cdot \overline{x}\right) =$$

$$= d(x_N, x_m) + d(g_m \cdot x_m, \overline{x}) < 2\frac{r}{2} = r,$$

da cui questo fatto segue. Quindi le intersezioni $g_N^{-1} \cdot B(\overline{x}, r) \cap g_m^{-1} \cdot B(\overline{x}, r) = g_N^{-1} \cdot \left(B(\overline{x}, r) \cap g_N g_m^{-1} \cdot B(\overline{x}, r)\right)$ non sono mai vuote, il che vuol dire che in realtà i possibili $g_m$ sono in numero finito, e quindi uno in particolare, che chiamiamo $h$, si ripeterà infinite volte, quindi, a meno di passare a sottosuccessioni, $h \cdot x_n \to \overline{x}$ da cui segue $x_n \to h^{-1} \cdot \overline{x}$; si finisce osservando che il limite di una successione di Cauchy, se esiste, coincide con quello di una qualunque sottosuccessione.

Fissiamo ora $x \in X$; esiste $\rho$ tale che $\{g \in G | g \cdot B(x, \rho) \cap B(x, \rho) \neq \emptyset\}$ è finito. Si ha allora che solo per un numero finito di $g \in G$ risulta $g \cdot K \cap B\left(x, \frac{\rho}{2}\right) \neq \emptyset$. Supponiamo per assurdo non sia così. Prendiamo allora una successione iniettiva $g_n$ di tali elementi del gruppo. Si ha $g_n^{-1} \cdot B\left(x, \frac{\rho}{2}\right) \cap K \neq \emptyset$, scegliamo pertanto $y_n \in g_n^{-1} B\left(x, \frac{\rho}{2}\right) \cap K$. A meno di sottosuccessioni, $y_n \to y$, perciò esiste $N$ naturale tale che per $n \geqslant N$ si abbia $d(y_n, y) < \frac{\rho}{2}$. Ma allora, per $n \geqslant N$ si ha

$$d\left(g_n^{-1} \cdot x, y\right) \leqslant d\left(g_n^{-1} \cdot x, y_n\right) + d(y_n, y) < 2\frac{\rho}{2} = \rho,$$

pertanto $y \in g_N^{-1} \cdot B(x, \rho) \cap g_n^{-1} \cdot B(x, \rho) = g_N^{-1} \cdot \left(B(x, \rho) \cap g_N g_n^{-1} \cdot B(x, \rho)\right)$, assurdo.

Siano allora $h_1, \ldots, h_k$ gli unici, finiti, elementi di $G$ tali che $h_i \cdot K \cap B\left(x, \frac{\rho}{2}\right) \neq \emptyset$ per $i$ tra 1 e $k$. D'altra parte $G \cdot K$ ricopre $B\left(x, \frac{\rho}{2}\right)$; ne segue che $B\left(x, \frac{\rho}{2}\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} h_i \cdot K$; il membro di destra è compatto in quanto unione finita di compatti, pertanto, se $0 < r < \frac{\rho}{2}$, la palla $\overline{B}(x, r)$ è compatta. □

Continuiamo con una caratterizzazione delle azioni proprie.

**Lemma 3.2.13.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e sia $G$ che vi agisce propriamente mediante isometrie. Allora per ogni compatto $K \subseteq X$ l'insieme $\{g \in G | g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ è finito.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo non sia così, sia $K$ un compatto che fornisce il controesempio e $g_n$ una successione iniettiva di elementi di $G$ tale che $g_n \cdot K \cap K \neq \emptyset$. Riusciamo cioè a trovare una successione $x_n$ in $K$ tale che per ogni $n$ naturale $g_n \cdot x_n \in K$. A meno di passare ad una sottosuccessione, $x_n \to \overline{x} \in K$; a meno di passare ad un ulteriore sottosuccessione, $g_n \cdot x_n \to \overline{y} \in K$. Sia ora $r > 0$ qualunque. Allora esiste $N$ naturale tale che per ogni $n \geqslant N$ si abbia $x_n \in B\left(\overline{x}, \frac{r}{2}\right)$ e $g_n \cdot x_n \in B\left(\overline{y}, \frac{r}{2}\right)$, e perciò

$$d(g_n \cdot \overline{x}, \overline{y}) \leqslant d(g_n \cdot \overline{x}, g_n \cdot x_n) + d(g_n \cdot x_n, \overline{y}) = d(\overline{x}, x_n) + d(g_n \cdot x_n, \overline{y}) < 2\frac{r}{2} = r,$$

pertanto per ogni $n \geqslant N$ si ha che

$$\overline{y} \in g_N \cdot B(\overline{x}, r) \cap g_n \cdot B(\overline{x}, r) = g_N \cdot \left(\cdot B(\overline{x}, r) \cap g_N^{-1} g_n \cdot B(\overline{x}, r)\right),$$

il che va contro la definizione di applicazione propria. □

Un altro fatto sulle applicazioni proprie è il seguente

**Lemma 3.2.14.** Sia $G$ che agisce propriamente su uno spazio metrico $(X, d)$. Allora per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste $r > 0$ tale che gli elementi $g \in G$ per cui $g \cdot (B(x, r)) \cap B(y, r)$ è non vuoto sono in numero finito.

*Dimostrazione.* Sia $\rho_x$ tale che $\{g \in G | g \cdot B(x, \rho_x) \cap B(x, \rho_x) \neq \emptyset\}$ è finito, e $\rho_y$ analogamente per $y$. Si ha che $r = \min\left\{\frac{\rho_x}{2}, \frac{\rho_y}{2}\right\}$. Infatti, se $g \cdot B(x, r) \cap B(y, r) \neq \emptyset$, allora per la diseguaglianza triangolare $y \in B(g \cdot x, \rho_x)$, quindi, per qualunque altro $h \in G$ con la stessa proprietà, $g^{-1} \cdot y \in g^{-1} h \cdot B(x, \rho_x) \cap B(x, \rho_x)$, pertanto gli elementi di $G$ del genere sono in numero finito poiché l'azione è propria. □

Si ha infine il seguente

**Lemma 3.2.15.** Sia $G$ un gruppo che agisce propriamente per isometrie su uno spazio metrico $(X, d)$. Allora

1) Se $G'$ è un sottogruppo di $G$, e $X' \subseteq X$ è $G'$-invariante, allora l'azione di $G'$ su $X'$ è propria;

2) Se $X$ è un length space e l'azione di $G$ è cocompatta, allora ogni suo elemento è un'isometria semisemplice;

3) Supponiamo che $X$ si possa scrivere come un prodotto $X' \times X''$ in modo che ogni elemento $g \in G$ si possa scrivere come $(g', g'')$, e sia $H$ il sottogruppo normale di $G$ formato dagli elementi del tipo $(Id_{X'}, g'')$. Supponiamo esista $K \subseteq X''$ compatto tale che $X'' = \bigcup_{(Id,g'') \in H} g'' \cdot K$. Allora l'azione di $G/H$ indotta su $X'$, con $(g', g'')\, H$ che agisce come $g'$, è propria.

*Dimostrazione.*

1) Segue facilmente dalle definizioni.

2) Sia $K$ un compatto i cui traslati mediante $G$ ricoprano $X$, e sia $h \in G$. Prendiamo una successione $x_n$ tale che $d_h(x_n) \to |h|$ e siano $g_n \in G$ tali che $g_n \cdot x_n = y_n \in K$. Si ha

$$d(h \cdot x_n, x_n) = d(g_n h \cdot x_n, g_n \cdot x_n) =$$
$$= d\left(g_n h g_n^{-1} g_n \cdot x_n, g_n \cdot x_n\right) = d\left(g_n h g_n^{-1} y_n, y_n\right),$$

ossia le quantità $d_{g_n h g_n^{-1}}(y_n)$ sono definitivamente limitate da $|h| + 1$. Inoltre, a meno di sottosuccessioni, $y_n \to y$ e, per $n$ sufficientemente grandi, $d(y_n, y) < 1$, perciò

$$d\left(y, g_n h g_n^{-1} \cdot y\right) \leqslant$$
$$\leqslant d(y, y_n) + d\left(y_n, g_n h g_n^{-1} \cdot y_n\right) + d\left(g_n h g_n^{-1} \cdot y_n, g_n h g_n^{-1} \cdot y\right) =$$
$$= 2d(y, y_n) + d\left(y_n, g_n h g_n^{-1} \cdot y_n\right) \leqslant |h| + 3.$$

Ma la palla di centro $y$ e raggio $|h|+3$ è compatta per ipotesi e per il Lemma 3.2.12 quindi, se per assurdo tra gli elementi $g_n h g_n^{-1}$ ce ne fossero infiniti distinti, allora $g_n h g_n^{-1} \cdot y \in g_n h g_n^{-1} \cdot \left(\overline{B}(y, |h|+3)\right) \cap \left(\overline{B}(y, |h|+3)\right)$ andando contro la caratterizzazione di azione propria data dal Lemma 3.2.13. Quindi gli elementi siffatti sono finiti e necessariamente $g_n h g_n^{-1} = g$ per qualche $g \in G$ per infiniti $n$; a meno di passare a sottosuccessioni possiamo supporre che lo siano tutti. Ma allora, facendo il conto per il primo termine di tale sottosuccessione

$$d_h\left(g_1^{-1} \cdot y\right) = d\left(h g_1^{-1} \cdot y, g_1^{-1} \cdot y\right) = d\left(g_1 h g_1^{-1} \cdot y, g_1 g_1^{-1} \cdot y\right) =$$
$$d(g \cdot y, y) = \lim_{n \to \infty} d(g \cdot y_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} d(h \cdot x_n, x_n) = |h|.$$

3) Fissiamo un punto $x' \in X'$ e un punto $p = (x', x'') \in X$ della fibra di $x'$ mediante la proiezione. Essendo l'azione di $G$ propria, al variare di $y$ in $K$ sia $r_y$ il raggio dato dal lemma precedente tale che esistono un numero finito di elementi $g \in G$ per cui $g \cdot B(p, r_y) \cap B((x', y), r_y)$ è non vuoto; notiamo che ciò vale anche se $x'' = y \in K$, per definizione. Il compatto $\{x'\} \times K$ è allora ricoperto dalla famiglia di palle $B((x', y), r_y)$; quindi da un numero finito $B((x', y_i), r_{y_i})$ di esse. La distanza di un punto di $\{x'\} \times K$ dal complementare di $\bigcup_i B((x', y_i), r_{y_i})$ è strettamente positiva, pertanto anche il minimo sul compatto $\varepsilon$ di queste distanze, che esiste essendo la distanza da un sottoinsieme continua. Notiamo che $\varepsilon < \min_i r_{y_i}$, in particolare i $g \in G$ per cui $B(g \cdot p, \varepsilon)$ interseca una delle palle $B((x', y_i), r_{y_i})$ sono finiti essendo un sottoinsieme di

$$\bigcup_i \{g \in G | g \cdot B(p, r_{y_i}) \cap B((x', y_i), r_{y_i}) \neq \emptyset\}.$$

Inoltre $B(x', \varepsilon) \times K \cap \left( \bigcup_i B((x', y_i), r_{y_i}) \right) = \emptyset$. Affermo ora che l'intorno $B(x', \varepsilon) \subseteq X'$ di $x'$ è quello che dimostra che l'azione sia propria per il punto $x'$. Supponiamo infatti $z \in (g', g'') H \cdot B(x', \varepsilon) \cap B(x', \varepsilon)$; a meno di comporre con un'isometria della forma $(Id_{X'}, g'') \in H$ posso supporre che $g'' \cdot x'' \in K$. Si ha inoltre che $(z, g'' \cdot x'') \in B((g' \cdot x', g'' \cdot x''), \varepsilon) \cap (B(x', \varepsilon) \times K)$, ma allora $B((g' \cdot x', g'' \cdot x''), \varepsilon)$ interseca una delle palle $B((x', y_i), r_{y_i})$, quindi $(g', g'')$ può essere solo uno dei possibili finiti elementi di $G$ per cui ciò poteva succedere.

$\square$

# 4 Teorema del Toro Piatto e conseguenze

Dopo il lavoro preliminare svolto nelle sezioni precedenti, verrà ora enunciato e dimostrato il Teorema del Toro Piatto e ne verranno discusse alcune conseguenze sulla curvatura.

## 4.1 Teorema del Toro Piatto

**Teorema 4.1.1** (del Toro Piatto)**.** Supponiamo che $G \cong \mathbb{Z}^n$ agisca propriamente mediante isometrie semisemplici su uno spazio metrico $(X, d)$ che rispetti la condizione CAT(0). Allora

1) $\mathrm{Min}\,(G)$ è non vuoto ed è isometrico ad un prodotto $Y \times \mathbb{E}^n$;

2) $\mathrm{Min}\,(G)$ è $g$-invariante per ogni $g \in G$, e l'azione di $g$ su $\mathrm{Min}\,(G)$ è un'identità sul primo fattore e una traslazione sul secondo;

3) Fissato $y \in Y$, il quoziente di $\{y\} \times \mathbb{E}^n$ per l'azione di $G$ è un $n$-toro.

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sul rango di $G$ come gruppo abeliano. Un elemento non banale di $G$ non può avere punti fissi, se no il sottogruppo ciclico infinito generato contraddirebbe l'ipotesi di azione propria. Quindi, essendo l'isometria indotta dall'azione semisemplice, deve essere necessariamente iperbolica. Scegliamo un insieme di generatori indipendenti $g_1, g_2, \ldots, g_n$ di $G$. Dal Lemma 3.2.10 segue una decomposizione di $\mathrm{Min}\,(g_1)$ come $Z \times \mathbb{E}^1$. Ne segue anche che $g_1$ agisce come identità sul primo fattore e come traslazione di lunghezza $|g_1|$ sul secondo; un altro elemento di $g$, commutando con $g_1$, agisce preservando la decomposizione in prodotto mediante un'isometria su $Z$ e una traslazione su $\mathbb{E}^1$.

Dimostriamo che il sottogruppo $H$ di $G$ formato dagli elementi che agiscono banalmente su $Z$ è il sottogruppo generato da $g_1$. Sicuramente lo contiente. Inoltre, per ciascun $z \in Z$, l'azione di $H$ su $\{z\} \times \mathbb{E}^1$ è per traslazioni e propria per il Lemma 3.2.15. Se per assurdo $h \in H$ non appartiene al sottogruppo generato da $g_1$, risulta che $\dfrac{|h|}{|g_1|}$ è razionale per la propria discontinuità, ma questo ci fornisce una relazione non banale tra $g_1$ e gli altri generatori di $g$, essendo l'azione sul fattore $Z$ banale per entrambi, assurdo. Notiamo inoltre che il quoziente di ciascun $\{z\} \times \mathbb{E}^1$ per l'azione di $H$ è un 1-toro.

Il gruppo abeliano libero $G/H$ ha rango $n-1$, ed agisce su $Z$ in maniera propriamente discontinua per il Lemma 3.2.15 e per isometrie sempisemplici per il Lemma 3.2.8; $Z$ inoltre è CAT(0) per i Lemmi 3.2.10 e 3.1.3. Ma allora $\mathrm{Min}\,(G/H) \subseteq Z$ è isometrico ad un prodotto $Y \times \mathbb{E}^{n-1}$; $G/H$ agisce banalmente su $Y$ e per traslazioni su $\mathbb{E}^{n-1}$ e inoltre per ogni $y \in Y$ il quoziente di $\{y\} \times \mathbb{E}^{n-1}$ per l'azione di $G/H$ è un $n-1$-toro. La tesi segue per induzione. □

## 4.2 Ostruzioni alla curvatura

Il Teorema del Toro Piatto può essere utilizzato per utilizzare informazioni topologiche date dal gruppo fondamentale per imporre delle restrizioni alla possibilità di costruire metriche con una fissata curvatura su una varietà riemanniana o su spazi metrici più esotici. In particolare, la presenza nel gruppo fondamentale di $\mathbb{Z}^n$ con $n \geqslant 2$ implica la presenza di $\mathbb{E}^n$ immersi nel rivestimento universale dello spazio in esame, con l'immagine geodeticamente convessa, il che porta ad avere piani con curvatura 0 nel tangente in un punto dell'immagine della mappa da $\mathbb{E}^n$. Che l'immersione sia geodetica è garantito dalla convessità di $\mathrm{Min}\,(G)$ più volte osservata durante il testo. Poiché la curvatura è una proprietà locale, la piattezza passa allo spazio rivestito da cui si era partiti.

Le varietà riemanniane di curvatura sezionale non positiva sono CAT(0) localmente. Consideriamone una compatta; sarà perciò completa. Pertanto il rivestimento universale riemanniano avrà ancora curvatura sezionale non positiva, quindi sarà ancora CAT(0) localmente; inoltre rimane completo.

A questo punto ci sono due possibili strade da percorrere per dimostrare che in realtà il rivestimento è globalmente CAT(0). Una consiste nel riutilizzare la dimostrazione del Teorema 2.7.13 aiutati dal fatto che l'applicazione esponenziale è definita su tutto il piano tangente ad un punto fissato, il che segue da [GHL04, Theorem 2.103, Hopf-Rinow], ed è in realtà un diffeomorfismo globale, per cui la dimostrazione del succitato teorema vale su tutto il rivestimento considerato e non solo localmente. Un'altra consiste nello sfruttare il fatto che uno spazio completo e semplicemente connesso è CAT(0) localmente se e solo se lo è globalmente [BH99, Theorem 4.1, Cartan-Hadamard].

A questo punto, l'azione del gruppo fondamentale sul rivestimento universale è propriamente discontinua e cocompatta e, essendo una varietà riemanniana un length space, per isometrie semisemplici a causa del Lemma 3.2.15. È quindi possibile applicare, eventualmente, il Teorema del Toro Piatto.

**Corollario 4.2.1.** Siano $M$ e $N$ varietà differenziabili compatte aventi ciascuna una coppia di $\mathbb{Z}$ nel gruppo fondamentale. Allora non è possibile mettere su $M \times N$ un tensore metrico di curvatura strettamente negativa.

*Dimostrazione.* Con un tale metrica la varietà risultante risulterebbe localmente CAT(0), il rivestimento universale globalmente CAT(0) e dal Teorema del Toro Piatto seguirebbe la presenza di piani nel tangente ad un qualche punto di curvatura nulla. □

Ad esempio, si può applicare un tale corollario all'$n$-toro, o a $S^1 \times M$ con $M$ compatta contenente una copia di $\mathbb{Z}$ nel gruppo fondamentale.

Il legame col Teorema del Toro Piatto classico passa dal fatto che quozientando il rivestimento fondamentale per un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ si ottiene una varietà con un toro piatto embedded, essendo questo il quoziente di uno spazio euclideo immerso nel rivestimento per l'azione del gruppo. Quozientando ulteriormente per avere la varietà si ottengono dei tori che saranno in generale immersi. Ad esempio, una bottiglia di Klein piatta contiene nel gruppo fondamentale $\mathbb{Z}^2$ sotto forma di sottogruppo di indice 2, e c'è un rivestimento di grado 2 dal 2-toro alla bottiglia di Klein.

## Ringraziamenti

In questo spazio (non metrico) vorrei ringraziare diverse persone che mi hanno portato dove sono.

Innanzitutto un ringraziamento per la pazienza e lo stile didattico illuminante al mio relatore Roberto Frigerio.

Un ringraziamento speciale va ai miei amici di ogni tempo e luogo. Se iniziassi ad elencare i nomi probabilmente tralascerei qualcuno di importante, ma chiunque si riconosca nella descrizione si sentirà ricordato qui. Non credo però di fare un torto a qualcuno citando esplicitamente la Trinità di quattro persone di cui faccio parte: un grazie particolare quindi a Francesco, Riccardo ed Alessia per le intense esperienze di vita e di matematica vissute insieme.

Vorrei anche ringraziare tutte le persone che contribuiscono al progetto Olimpiadi della Matematica, del cui lavoro per anni ho usufruito come concorrente, e di cui ora faccio parte. La Matematica mi piace anche perché ci sono le olimpiadi.

Non sarei qua senza la spinta di diversi professori di matematica che mi è capitato di avere negli anni. Vorrei quindi ringraziare Boris Bellone, Roberto Vai e altri professori per avermi avviato su questo percorso.

A Roberto Vai e al gruppo delle serate a casa sua rivolgo un ringraziamento apposito per il bel tempo passato assieme.

Un grazie alla mia famiglia per la presenza e per avere contribuito a portarmi a questo traguardo.

Grazie, Graziella, per aver fornito al popolo dell'Aula Studenti qualcuno da ringraziare.

E Grazie a Roberta. Lei sa meglio di chiunque altro, me incluso, perché.

# Bibliografia


[Ale51] Aleksandrov, Aleksandr Danilovich: *A theorem on triangles in a metric space and some of its applications.* Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni Steklova, 38:5–23, 1951.

[BH99] Bridson, Martin Robert e André Haefliger: *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, volume 319 della serie *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, 1999.

[GHL04] Gallot, Sylvestre, Dominique Hulin e Jacques Lafontaine: *Riemannian Geometry.* Universitext. Springer, terza edizione, 2004.

[GW71] Gromoll, Detlef e Joseph A. Wolf: *Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature.* Bulletin of the American Mathematical Society, 77(4), luglio 1971.

[LY72] Lawson, H. Blaine e Shing Tung Yau: *Compact manifolds of nonpositive curvature.* Journal of Differential Geometry, 7:211–228, 1972.