

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

14 Luglio 2014

Esercizio 1: Sia data l'equazione alle differenze finite del terzo ordine:

$$x_{k+1} = -x_k - x_{k-1} - x_{k-2}$$

- Scrivere il sistema dinamico discreto corrispondente su \mathbf{R}^3 .
- Trovare i moltiplicatori di Lyapounov e discutere la stabilità dell'origine.
- Trovare il valore della soluzione particolare con condizioni iniziali $(1, 0, -1)^T$ per $k = 22$.

Esercizio 2: Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4x^3 + 2x - \gamma \frac{dx}{dt}$$

con dissipazione $0 < \gamma < 1$.

- Discretizzare il sistema dinamico continuo con passo $h > 0$, ottenendo un'equazione alle differenze finite del secondo ordine, con le approssimazioni:

$$\ddot{x} \simeq \frac{\Delta_0^2 x}{h^2} \quad ; \quad \dot{x} \simeq \frac{\Delta_- x}{h} .$$

- Trasformare l'equazione alle differenze finite del secondo ordine in un sistema dinamico discreto e trovare i punti fissi.

- c) Provare che il punto fisso corrispondente alla sella del sistema dinamico continuo è sempre iperbolico.
- d) Provare che i punti fissi corrispondenti ai fuochi del sistema dinamico continuo sono asintoticamente stabili.

Esercizio 3: Si consideri un corpo puntiforme di massa m vincolato alla cubica

$$z = x^3/3 + x$$

in un piano verticale (x, z) , ruotante attorno all'asse z (orientato verso l'alto) con velocità angolare costante ω . Sul corpo agisce la gravità di accelerazione g .

- a) Usando x come coordinata lagrangiana scrivere la funzione di Lagrange, l'equazione differenziale di moto, l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- b) Al variare dei parametri g, ω , trovare tutti i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano.
- c) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati nel punto precedente e disegnare il diagramma di biforcazione in funzione del parametro $J = \omega^2/(2g)$.