

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

14 Novembre 2014

Esercizio 1 (9 pt) Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali

$$A = \begin{bmatrix} -h & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & h \end{bmatrix}$$

con h parametro reale.

Si consideri il seguente sistema dinamico continuo lineare:

$$\dot{X} = AX \quad X, \dot{X} \in \mathbf{R}^3$$

- Dire per quali valori del parametro h esiste un'infinità di punti di equilibrio.
- Sia $h = 1$, calcolare gli esponenti di Lyapunov e discutere gli equilibri del sistema dinamico e la loro stabilità.
- Sia $h = 2$, scrivere il flusso integrale e la soluzione particolare con condizioni iniziali $X_0 = (x, y, z)^T = (1, 1, 1)^T$.

Esercizio 2 (15 pt) Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} + 1 - \gamma \frac{dx}{dt}$$

considerato sul semipiano $x > 0$, si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con $\gamma = 0$.

- a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità.
- b) Tracciare qualitativamente le linee di livello dell'integrale dell'energia nel piano $(x, y = dx/dt)$.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo.

- c) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.
- d) Tracciare qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e tratteggiare il bacino di attrazione del pozzo.
- e) Dimostrare che l'orbita con condizioni iniziali $x = 5/2, y = dx/dt = 0$ ha limite per $t \rightarrow +\infty$.

Esercizio 3 (6 pt) Trovare la soluzione generale della seguente equazione alle differenze lineare:

$$x_{n+2} = 2(x_{n+1} - x_n)$$