

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

5 Febbraio 2015

Esercizio 1 (9 pt) Sia dato il seguente sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

- Trovare gli esponenti di Lyapounov e discutere la stabilità del punto di equilibrio.
- Scrivere il flusso integrale e trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali $(x, y, z, w)^T = (0, 1, 0, 0)^T$.

Esercizio 2 (11 pt) Sia dato il sistema dinamico gradiente

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad U(x, y) = y^2 + x^6 - 6x^5 - 9x^4.$$

- Trovare i punti di equilibrio e determinare le proprietà di stabilità.
- Descrivere qualitativamente (con un disegno) le traiettorie del sistema.
- Descrivere il bacino di attrazione di eventuali punti asintoticamente stabili.
- Calcolare esplicitamente la soluzione con dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, 4)$.
Calcolare il tempo necessario a raggiungere il punto di coordinate $(0, 1/2)$.

Esercizio 3 (10 pt) Sia dato un corpo puntiforme di massa m , vincolato a muoversi sull'iperbole equilatera di equazione

$$x y = 1$$

nel piano orizzontale (x, y) , che viene fatto ruotare (da forze esterne al sistema) con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale z .

Supponiamo che il corpo puntiforme sia soggetto ad una forza di richiamo di una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla con estremo libero nell'origine del piano (x, y) .

- a) Scrivere l'energia cinetica e quella potenziale in funzione di x , dx/dt , la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange.
- b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, k, ω .
- c) Discutere la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri.