CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

28 Gennaio 2016

Esercizio 1 (6 pt) Sia data l'equazione alle differenze finite

$$x_{k+1} + x_k + x_{k-1} = a, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver scritto il sistema dinamico discreto corrispondente:

a) trovarne i punti fissi e discuterne la stabilità;

b) trovare le orbite periodiche del sistema e il loro periodo.

Esercizio 2 (12 pt) Sia dato il sistema dinamico gradiente

$$\begin{cases} \dot{x} = -\partial U/\partial x \\ \dot{y} = -\partial U/\partial y \end{cases}$$

definito dal potenziale

$$U(x, y) = (x^2 + 3y^2 - 3)(3x^2 + y^2 - 3).$$

a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne le proprietà di stabilità.

b) Trovare le rette invarianti passanti per l'origine.

c) Fare un disegno qualitativo delle principali curve di livello di U e tracciare le separatrici degli eventuali punti di sella non lineare.

d) Descrivere i bacini di attrazione dei pozzi non lineari e tracciare qualitativamente le orbite.

Esercizio 3 (12 pt) Nel piano verticale (x, z) siano dati due corpi puntiformi di ugual massa m, collegati tramite un'asta di lunghezza ℓ di massa trascurabile. Il primo corpo è vincolato a muoversi lungo l'asse z, mentre il secondo è vincolato a muoversi lungo l'asse x ed è collegato all'origine degli assi da una molla di costante elastica $k > 0$ (vedi figura). Supponiamo che i corpi siano soggetti ad un'accelerazione di gravità, rivolta verso il basso, di intensità $g > 0$. Inoltre il sistema viene fatto ruotare con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse verticale z.
Si consideri come coordinata lagrangiana l'angolo θ misurato dal semiasse positivo delle x all'asta che collega i due corpi (come indicato in figura).

a) Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la lagrangiana e l'equazione di Lagrange.

b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano in funzione dei parametri m, ℓ, k, g, ω.

c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e si tracci il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio nel piano (J, θ), con $J = \frac{\ell(k-m\omega^2)}{mg}$.

d) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nel caso in cui $J = \sqrt{2}$.