CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

18 Febbraio 2016

Esercizio 1 (6 pt) Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si consideri il seguente sistema dinamico discreto lineare:

$$X_{k+1} = A\, X_k, \qquad X_k \in \mathbb{R}^3.$$

a) Si calcolino i moltiplicatori di Lyapunov e si discuta la stabilità dell'origine.

b) Si scriva la matrice C^k dove C è la forma canonica di Jordan della matrice A.

Esercizio 2 (14 pt) Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\cos(2x) - 1 - \gamma \frac{dx}{dt}.$$

Si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè $\gamma = 0$.

a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità.

b) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), con $y = dx/dt$, e determinare le tangenti alle separatrici negli eventuali punti con linearizzato di tipo sella.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo.

c) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.

d) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), con $y = dx/dt$, ponendo in risalto le separatrici dei punti di sella nonlineare ed evidenziando i bacini di attrazione dei pozzi nonlineari.

e) Determinare il limite per $t \to +\infty$ dell'orbita con condizioni iniziali $(x, y) = (2\pi, -1/5)$.

f) Dimostrare che la variabile x può essere considerata una variabile angolo.

Esercizio 3 (12 pt) Si consideri il sistema meccanico formato da 3 punti materiali A, B, C di massa m vincolati ad un piano verticale in cui introduciamo il riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. Il punto C è vincolato a scivolare lungo l'intero asse y ed è collegato ad A e a B da due sbarrette di lunghezza r e massa trascurabile. I punti A, B sono collegati all'origine O da altre due sbarrette di lunghezza r e massa trascurabile (vedi figura). Inoltre i punti A e B sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Supponiamo che i corpi siano soggetti ad un'accelerazione di gravità, rivolta verso il basso, di intensità $g > 0$.
Si consideri come coordinata lagrangiana l'angolo θ misurato dal semiasse positivo delle x all'asta che collega il punto materiale B all'origine O (come indicato in figura). L'angolo θ può variare su tutto l'intervallo $[0, 2\pi)$, quindi assumiamo che le sbarrette e le masse non si intralcino lungo il loro movimento e che inoltre la molla e l'origine non intralcino il movimento del punto materiale C.

a) Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la lagrangiana e l'equazione di Lagrange.

b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano in funzione dei parametri m, r, k, g.

c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e si tracci il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio nel piano (J, θ), con $J = \frac{mg}{kr}$.

d) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nel caso in cui $J = 1/2$.